Alkalmazott Matematikai Lapok **28** (2011), 59-76.

KÖLTSÉGELOSZTÁSI MODELLEK

KOVÁCS GERGELY ÉS RADVÁNYI ANNA

A cikk alapját egy öntözéses gazdálkodás területéről származó költségelosztási probléma adja. Felhasználók egy csoportja egy közös csatornarendszer segítségével látja el saját területének öntözését. A csatornarendszer egy közös ponton csatlakozik a főcsatornához, ahonnan a csatornarendszer vízellátását fedezik. A rendszer működéséhez és fenntartásához szükséges költségek a felhasználókat terhelik. Egy lehetséges költségelosztás megadja, hogy az egyes felhasználók külön-külön mekkora költségeket vállalnak a rendszer teljes költségéből. Természetesen a felhasználóknak együttesen fedezniük kell a teljes összköltséget. Az elosztásnak pedig olyannak kell lennie, amit minden résztvevő valamiféleképpen „igazságosnak" ítél meg.

Megvizsgáljuk tehát a költségelosztás fogalmát, elvárt tulajdonságait és modellezésének lehetőségeit, illetve értékeljük az egyes megoldási javaslatokat. A cikkben Aadland és Kolpin [1] lánc-struktúrákra vonatkozó eredményeit általánosítjuk fával reprezentálható csatornarendszerekre, kiegészítve azokat további, szintén vízgazdálkodási problémák kapcsán felmerült modellekkel [6].

1. Bevezetés

A cikk alapját egy költségelosztási probléma adja. Gazdálkodók egy csoportja egy főcsatornához csatlakozó csatornarendszerből fedezi saját földterületének vízigényét. A csatornarendszer működtetése és karbantartása költségeket von maga után, ezeket a gazdálkodók közösen állják. A probléma pedig az, hogy a gazdálkodók (továbbiakban felhasználók) hogyan osszák fel „igazságosan" egymás között a csatornarendszerre vonatkozó összköltséget. A bevezetőt követően megismerkedünk az alapmodellekkel és az „igazságosság" fogalmát megragadni kívánó axiómákkal. Az axiómák alapját Aadland és Koplin [1] munkája adja.

Modelljeink alapjai a valós életből vett problémák megoldása során felmerült megoldási javaslatok. Aadland és Kolpin [2] munkájukban a Montana állambeli állattenyésztők által évtizedek óta ténylegesen alkalmazott költségelosztási sémákat vizsgáltak. Két elosztási rendszert írtak le, az átlag szerinti és a soros elosztási elveket. Ezen felül bemutatták a korlátozott átlag szerinti költségelosztást [1], mely az előző két elosztás „előnyeit" egyesíti. Ezen láncokra megfogalmazott modelleket általánosítjuk fa-struktúrákkal reprezentálható problémák esetében, és megmutatjuk, hogy továbbra is rendelkeznek a láncokra megfogalmazott elosztások tulajdonságaival. A további két általunk vizsgált modell alapját szintén valós vízgazdálkodási probléma kapcsán felmerült megoldási javaslatok adják. A Tennessee Valley Authority 1933-ban alakult többek között a Tennessee Völgy gazdasági fejlesztésének kidolgozására. A TVA munkásságát a közgazdasági, illetve játékelméleti szakirodalomban Straffin és Heaney [6] mutatták be először, a szeparálható-nem szeparálható költségekre alapozott módszerek innen eredeztethetőek. Modelleink megfogalmazásának alapját Solymosi [5] munkája adja.

A formális elemzéshez először is foglaljuk össze a példánkban szereplő csatornarendszer két legfontosabb sajátosságát! Először is minden felhasználó alapvetően saját földterületének öntözése céljából használ vizet, az állatállomány eltartására szolgáló vízmennyiség és az ebből eredő költségek elhanyagolható nagyságrendűek. Az általános tapasztalat pedig azt mutatja, hogy az öntözőcsatornák kapacitása elegendő az összes érintett földterület öntözéséhez. Így tehát a feladat nem egy adott vízmennyiség elosztása, sokkal inkább a csatornák működési, fenntartási és egyéb költségeinek a felhasználók közötti elosztása lesz.

2. Alapmodellek

Reprezentáljuk a feladatot egy fával, a fa gyökere legyen a főcsatorna (amit 0. csúcsnak fogunk tekinteni), a fa egyéb csúcsai pedig a felhasználók. $\mathcal{L}$-lel a fa leveleinek halmazát jelöljük.

Legyen $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a főcsatornához csatlakozó felhasználók véges, rendezett halmaza. A felhasználók halmazán definiálható egy rendezés, ami reflexív, tranzitív, de nem feltétlenül teljes, ugyanis nem minden esetben lesz bármely két felhasználó pozíciója összehasonlítható. Tekintsük például a gráfon a gyökértől kiindulva végrehajtott mélységi keresés elérési sorrendjét. Az így kapott sorrendben jelölje i a zsiliptől számított i-edik felhasználót. A csatornarendszer i-edik szakasza (azaz a gráf i-edik éle) legyen az a szakasz, amivel az i-edik felhasználó a rendszerhez csatlakozik. Minden $i \in N$-re jelölje c_i a főcsatorna i-edik szakaszára eső éves fenntartási költségét, az ezen költségek által meghatározott költségvektort pedig $c = (c_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$. A keresett eredmény a $\sum c_i$ összesített költség egy „igazságos" elosztása lesz.

Megjegyzés. Speciális esetben a probléma egyetlen lánccal reprezentálható, aminek első csúcsa a főcsatorna, a felhasználók pedig a lánc további, egymás után következő csúcsai. Ekkor a rendezés a természetesen adódó sorrend szerinti lesz.

A továbbiakban definiálni fogunk különböző költségelosztási sémákat, és megvizsgáljuk, milyen természetesen adódó tulajdonságokkal rendelkeznek. Ehhez szükségünk van néhány jelölés bevezetésére.

Egy i felhasználóra megkülönböztetjük az őt *megelőző* és az őt *követő* felhasználók halmazát. Jelölje I_i^- azon csúcsok halmazát, melyek az i-t a gyökérrel összekötő, egyértelmű úton helyezkednek el. Ez a halmaz lesz az i-t *megelőző* felhasználók halmaza. Most tekintsünk egy olyan irányítást, ahol a fa éleit a gyökértől, mint forrástól kifelé mutató irányítással látjuk el, azaz a gyökérből csak kifelé vezetnek élek, minden további csúcs be-foka pedig egy. Az ilyen irányítással ellátott fában jelölje I_i^+ az i-ből irányított úton elérhető csúcsok halmazát. Ez pedig az i-t *követő* felhasználók halmaza lesz.

Vagyis $I_i^- = \{j \in N | j < i\}$, $I_i^+ = \{j \in N | i < j\}$, ahol a $j < i$ reláció fennállása jelöli, ha létezik j-ből i-be irányított út.

Példánkban először kétféle elosztási szabályt vizsgálunk, az (a) átlag szerinti és (b) a soros elosztást. A költségek mérhetők hektáronkénti egységben, egységnyi felhasznált vízmennyiségben vagy felhasználónként, mi ez utóbbit fogjuk tekinteni. (A 2.1. definíció és a fejezetben felhasznált axiómák alapjául Aadland és Kolpin [1] munkája szolgált.)

2.1. Definíció. Egy $\xi : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+^N$ leképezés egy költségelosztási szabály, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ -re $\sum \xi_i(c) = \sum c_i, ahol \left(\xi_i(c)\right)_{i\in N} = \xi(c)$.

(a) Az átlag szerinti költségelosztási szabály szerint a csatorna fenntartási költségeit egyenlő arányban osztjuk szét minden felhasználó között, azaz

$$\xi_i^a(c) = \sum_{j\in N} \frac{c_j}{n} \quad \forall i \in N\text{-re}.$$

(b) A soros költségelosztási szabály szerint az egyes szegmensekre eső költségeket osztjuk el egyenlő módon azok között, akik az adott szegmenst igénybe veszik, vagyis

$$\xi_i^s(c) = \sum_{j\in I_i^- \cup \{i\}} \frac{c_j}{|I_j^+| + 1} \quad \forall i \in N\text{-re}.$$

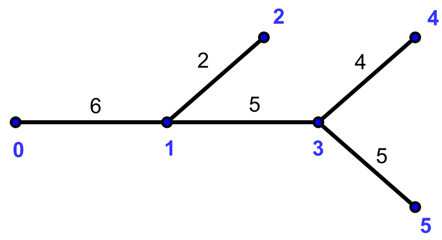
Megjegyzés. Utóbbi speciálisan a *lánc* esetére így is felírható:

$$\xi_i^s(c) = \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_i}{(n-i+1)} \quad \forall i \in N\text{-re}.$$

A definíció tartalmát a következő két példával szemléltetjük:

2.1. Példa. Tekintsünk először egy példát lánc esetén! Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és $c = \{6, 1, 5\}$. Az átlag szerinti elv esetén az aggregált költségek elosztása a felhasználók között egyenlő mértékű, azaz $\xi^a(c) = (4, 4, 4)$. Másrészről a soros elosztási szabályt alkalmazva az első szegmens költségeit mindhárom felhasználó között kell egyenlően felosztani, a második szegmenst a 2-es és 3-as számú között, míg a harmadik szegmens költségeit egyedül a 3-as felhasználó állja. Így tehát a következő elosztást kapjuk: $\xi^s(c) = (2;\ 2,5;\ 7,5)$.

Most pedig lássuk, milyen eredményt kapunk az alábbi ábrával reprezentálható esetben:



1. ábra. Fa-struktúrával reprezentált csatornarendszer

2.2. Példa. A fenti ábra egy olyan csatornarendszert ábrázol, ahol $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a felhasználók halmaza, $c = (6, 2, 5, 4, 5)$ a megfelelő szakaszokhoz tartozó költségeket leíró költségvektor. 0 jelöli a fa gyökerét, ez reprezentálja a főcsatornát, ahova a csatornarendszerünk becsatlakozik. Ebben az esetben a következő megoldások adódnak: $\xi^a(c) = (4,4;\ 4,4;\ 4,4;\ 4,4;\ 4,4)$, illetve $\xi^s(c) = (1,2;\ 3,2;\ 2,87;\ 6,87;\ 7,87)$. Az átlag szerinti elosztás esetén a teljes összköltséget – ami 22 – osztottuk fel 5 egyenlő részre. A soros esetében pedig a c_1 szakaszhoz tartozó költséget osztottuk 5 egyenlő részre, mert ezt mind az 5 felhasználó igénybe veszi. A c_2 költséget egyedül a második felhasználó állja, a c_3-at a 3-as, 4-es, 5-ös felhasználó között kell egyenlő arányban felosztani, a c_4 egyedül a 4-es, a c_5 pedig egyedül az 5-ös felhasználó költségét képezi. Ezeket a részköltségeket kell összeadni az egyes felhasználókra vonatkozó szakaszoknak megfelelően.

A következőkben karakterizáljuk a költségelosztási sémákat, bevezetünk olyan axiómákat, melyek teljesülése a modellezés szempontjából jogosan elvárható.

Vektorok összehasonlítása alatt minden esetben koordinátánkénti összehasonlítást fogunk érteni, tehát $c \leq c'$, ha $\forall i \in N$-re $c_i \leq c'_i$.

2.1. Axióma. ξ költségmonoton, ha $\forall c \leq c'$ esetén $\xi(c) \leq \xi(c')$.

2.2. Axióma. ξ rang-tulajdonságú, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ és $\forall j$-re $\forall i \in I_j^- \cup \{j\}$ esetén $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.

Megjegyzés. Lánc esetén pedig $\forall i \leq j$-re $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.

2.3. Axióma. ξ szubvenciómentes, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ és $\forall\ I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq N$ halmaz esetén

$$\sum_{j \in J} \xi_j(c) \leq \sum_{j \in J} c_j,$$

ahol az egyszerűség kedvéért $J := I_{i_1}^- \cup \cdots \cup I_{i_k}^- \cup I$, ahol J részfa.

Megjegyzés. Láncra pedig a J halmaz mindig az I legnagyobb indexű i tagjához tartozó $I_i^- \cup \{i\}$ halmaz lesz, azaz $j \in J$ pontosan akkor teljesül, ha $j \leq i$. Ebben az esteben tehát elég azt írni, hogy $\forall i \in N$ és $c \in \mathbb{R}_+^N$ esetén

$$\sum_{j \leq i} \xi_j(c) \leq \sum_{j \leq i} c_j.$$

A három axióma értelmezése kézenfekvő. A költségmonotonitás felel azért, hogy növekvő költségek esetén egyetlen felhasználóra eső költség se csökkenhessen. Ez a kritérium biztosítja, hogy semelyik felhasználó se tegyen szert haszonra olyan esetleges ügyletek által, melyek az összköltséget növelnék.

A rang-tulajdonság biztosítja, hogy a költségelosztások rangsorolhatók aszerint, hogy az egyes felhasználók a csatorna mekkora hányadát használják. Vagyis, ha $i \in I_j^-$, akkor a j felhasználó definíció szerint több szegmensét használja a főcsatornának, mint i, azaz a j-re eső költség legalább akkora, mint az i-re eső.

A szubvenció-mentesség pedig megakadályozza, hogy a felhasználók bármely csoportjának többet kelljen fizetnie, mint a csoport kollektív költsége. (Megjegyezzük, hogy a szubvenció-mentesség axiómája a felhasználóknak csak olyan csoportjaira vonatkozik, amelyek részfát alkotnak.) Ha a szubvenció esete állna fenn, akkor a felhasználók néhány csoportjának fizetnie kellene az általuk használt csatornaszakaszokért, és további „támogatást" nyújtanának a csatorna mentén hátrébb elhelyezkedő felhasználóknak. Ez pedig sértené azt a célunkat, mely szerint a költségek „igazságos" elosztására törekszünk. (A megfelelően definiált kooperatív játékban a szubvenció-mentesség felel majd azért, hogy mag-elosztást kapjunk. [4]) Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy a soros költségelosztási elv kielégíti mindhárom axiómát, míg az átlag szerinti csak az első kettőt [1].

A továbbiakban megemlítünk két további lehetséges elosztási elvet és megvizsgáljuk, mely axiómákat elégítik ki. Ezen modellek alapját Solymosi [5] munkája adja. Vezessük be tehát az alábbi fogalmakat!

Jelölje $c(N)$ a csatorna fenntartásának összköltségét, azaz a $\sum_{i \in N} c_i$ értéket. Az $s_i = c(N) - c(N \setminus i)$ költséget a fogyasztó *szeparálható költségének* nevezzük, ahol $c(N \setminus i)$ jelöli a csatorna fenntartási költségét, amennyiben az i-t nem kell kiszolgálni. (Vegyük észre, hogy s_i a leveleken mindig c_i-vel egyezik meg, egyébként 0.) Olyan $\xi(c)$ költségallokációt keresünk, amelyik teljesíti a $\xi_i(c) \geq s_i$ egyenlőtlenséget minden $i \in N$ esetén. További kérdés még, hogy mennyit fedezzenek az egyes fogyasztók a fennmaradó, összesen

$$k(N) = c(N) - \sum_{i \in N} s_i = c(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i$$

közös költségből. A fogyasztók ugyanis nem egyforma mértékben használják a csatornát, csak különböző részeire van szükségük. Így azt sem szeretnénk, ha a fogyasztók többet fizetnének annál, mintha egyedül használnák a csatornát. Jelöljük $e(i)$-vel az $i \in N$ fogyasztónak az így értelmezett ún. *egyedi költségét*, vagyis

$$e(i) = \sum_{j \in I_i^- \cup \{i\}} c_j.$$

Az „igazságosság” értelmében tehát teljesülnie kell a $\xi_i(c) \leq e(i)$ egyenlőtlenségnek, minden $i \in N$-re. Természetesen a fentiekben említett két korlátozás csak akkor kielégíthető, ha

$$c(N) \leq c(N \setminus i) + e(i),$$

minden $i \in N$-re. Ez a mi esetünkben mindig teljesül. Átrendezve az egyenlőtlenséget ez annyit jelent, hogy

$$c(N) - c(N \setminus i) \leq e(i), \text{ azaz } \ s_i \leq e(i).$$

Ha i nem levél, akkor s_i értéke 0, $e(i)$ pedig triviálisan mindig nemnegatív, ha pedig i levél, akkor $s_i = c_i$, vagyis $c_i \leq e(i)$ kell, hogy teljesüljön, ami $e(i)$ definíciójából látszik.

Az egyéni költségekből a szeparálható költségeket kivonva kapjuk a $(k(i) = e(i) - s_i)_{i \in N}$ vektort, ami a közös rész egyéni használatakor felmerülő költségeket tartalmazza.

Ezek alapján tekintsük az alábbi költségelosztásokat:

– A közös költség *egyenlő* elosztása:

$$\xi_i^{egy}(c) = s_i + \frac{1}{|N|} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

– A közös költség *egyéni használatból eredő költségrészek arányában* történő elosztása:

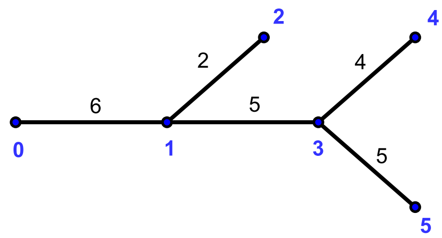
$$\xi_i^{eha}(c) = s_i + \frac{k_i}{\sum\limits_{j \in N} k_j} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

2.3. Példa. Gondoljunk vissza a korábbi, fákra vonatkozó példánkra (2. ábra). Ebben az esetében ez utóbbi két elosztásunk a következőképpen számolható: $c(N) = 22$, $\quad s = (0, 2, 0, 4, 5)$, $\quad k(N) = 11$, $\quad e = (6, 8, 11, 15, 16)$ valamint $k = (6, 6, 11, 11, 11)$. Ebből adódik, hogy $\xi^{egy}(c) = (2,2;\ 4,2;\ 2,2;\ 6,2;\ 7,2)$ illetve $\xi^{eha}(c) = (1,47;\ 3,47;\ 2,69;\ 6,69;\ 7,69)$.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy ezen költségelosztások mely axiómákat elégítik ki. Tekintsük először a közös rész egyenlő elosztásának esetét!

2.1. LEMMA. *A ξ^{egy} költségmonoton.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy tetszőleges $c \leq c'$ esetén $\xi^{egy}(c) \leq \xi^{egy}(c')$. Az $s(c)$ szeparálható költségekből álló vektor ebben az esetben olyan, hogy minden



2. ábra. Fa-struktúrával reprezentált csatornarendszer

$i \in \mathcal{L}$ esetén $s_i = c_i$, egyébként pedig 0. Ezért két esetet különböztetünk meg, először, amikor a költségnövekedés nem levélen realizálódik, másodszor pedig, amikor levél esetén nő. Az első esetben az s vektor nem változik, viszont $k(N)_c \le k(N)_{c'}$, mivel

$$k(N)_c = c(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i,$$

$$k(N)'_c = c'(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c'_i = c'(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i$$

és $c(N) \le c'(N)$, így tehát kész vagyunk.

A második esetben azonban éppen azt kapjuk, hogy $i \in \mathcal{L}$ esetén $s_i(c) \le s_i(c')$,

$$k(N)_c = \sum_{i \in N \setminus \mathcal{L}} c_i = \sum_{i \in N \setminus \mathcal{L}} c'_i = k(N)'_c,$$

vagyis $k(N)$ nem változik, tehát összességében a ξ_n^{egy} értéke nem csökkenhetett. Amennyiben a két eset együttesen áll fenn, úgy a növekedés az s vektorban és a $k(N)$ értékben is megmutatkozik, így az összegükre is igaz, hogy nem csökkenhet. □

2.2. Lemma. *A ξ^{egy} teljesíti a rang-tulajdonságot.*

Bizonyítás. Azt kell ellenőrizni, hogy tetszőleges i-re és j-re $i \in I_j^-$ esetén $\xi_i^{egy}(c) \le \xi_j^{egy}(c)$. Mivel azonban rögzített c-re $\xi_i^{egy}(c) = \xi_h^{egy}$ $\forall i, h \in I_j^-$ esetén, és $j \in \mathcal{L}$-re $\xi_i^{egy} < \xi_j^{egy}$ $\forall i \in I_j^-$-re, így az állítás teljesülése nyilvánvaló. □

2.3. Lemma. *A ξ^{egy} elosztás pontosan akkor nem szubvenciómentes, ha a problémát reprezentáló fában van legalább 3-hosszú lánc.*

Bizonyítás. Abban az esetben, ha a fa csupa 1-hosszú láncokból áll, a szubvenció-mentesség triviálisan teljesül, minden esetben $\xi_i = c_i$.

Ha a fában legfeljebb 2-hosszú láncok szerepelnek, szintén teljesül a szubvenció-mentesség. Egy konkrét 2-hosszú lánc esetén ugyanis a következőket tudjuk: $c(N) = c_1 + c_2$, $s = (0, c_2)$, $k(N) = c_1$. Ekkor $\xi_1(c) = 0 + \frac{c_1}{2}$, $\xi_2(c) = c_2 + \frac{c_1}{2}$, ami azt jelenti, hogy $\xi_1(c) \leq c_1$ és $\xi_1(c)+\xi_2(c) \leq c_1+c_2$, vagyis a szubvenció-mentesség mindig teljesül, ha $|N| = 2$.

Egy további esetet még meg kell említenünk: a fában legfeljebb 2-hosszú láncok szerepelnek, de ezek nem „függetlenek", hanem „elágazók". Azaz az első csúcsból külön-külön ágazik el egy-egy további pont (3 csúcsra ez egy „Y-alakot" jelent). A fenti számolással analóg módon meggondolható, hogy a szubvenció-mentesség az ilyen „elágazó" esetekben is teljesül, ugyanis a c_1 költség osztódik tovább annyi részre, ahány további csúcs kapcsolódik hozzá. Így tehát legfeljebb 2-hosszú láncokra a szubvenció-mentesség fennáll. Ha pedig egy legfeljebb 2-hosszú láncokból álló fában ez lánconként teljesül, akkor akárhogy választva csúcsokat, a szubvenció-mentesség teljesülni fog, ugyanis csak a megfelelő egyenlőtlenségeket kell összegezni, amikről külön-külön tudjuk, hogy igazak, és így az összegükre is igaz lesz.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a fában szerepel legalább 3-hosszú lánc. Mivel a tulajdonságnak minden költségstruktúrára fenn kell állnia, elég egyetlen példát adnunk, amikor a tulajdonság nem teljesül. Ekkor a legalább 3-hosszú láncra (ha több ilyen van, akkor egy tetszőlegesre) a következőket írhatjuk fel: $c(N) = c_1+c_2+\cdots+c_n$, $s = (0, 0, \cdots 0, c_n)$, $k(N) = c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}$. Ezek alapján $\xi_1(c) = 0 + \frac{c_1+\cdots+c_{n-1}}{n}$, ami azt jelenti, hogy c_1 minden esetben megválasztható úgy, hogy már a $\xi_1(c) \leq c_1$ feltétel se teljesüljön.

Tekintsünk egy egyszerű ellenpéldát pontosan 3-hosszú láncra! Ekkor speciálisan $\xi_1 = \frac{c_1+c_2}{3}$, tehát elég olyan c_1-et választani, ami ennél kisebb, vagyis, amire $c_2 > 2c_1$ teljesül. Legyen például a konkrét láncon $c = (3, 9, 1)$, ekkor $c(N) = 13$, $s = (0, 0, 1)$, $k(N) = 12$ és így $\xi^{egy}(c) = (0 + \frac{12}{3}, 0 + \frac{12}{3}, 1 + \frac{12}{3}) = (4, 4, 5)$. Azaz az első felhasználónak többet kell fizetnie, mint amennyi a belépésének a költsége, és a többletfizetéssel mintegy „támogatja" a tőle hátrébb elhelyezkedő többi felhasználót. Ebből tehát látszik, hogy a szubvenció-mentesség nem teljesül, amennyiben a fában található legalább 3-hosszú lánc. □

Vegyük most a közös költség egyéni használatból eredő költségrészek arányában történő elosztását!

2.4. Lemma. *A ξ^{eha} nem költségmonoton.*

Bizonyítás. Egyszerű ellenpéldával igazoljuk: vegyünk egy 4-hosszú láncot, legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $c = (1, 1, 3, 1)$, $c' = (1, 2, 3, 1)$. A költségnövekedés $i = 2$ esetén valósul meg. Ekkor a költség-monotonitás már a $\xi^{eha}(c)$ és $\xi^{eha}(c')$ első koordinátáira sem lesz igaz. Ugyanis $\xi_1^{eha}(c) = \dfrac{5}{13} = 0,384$, illetve $\xi_1^{eha}(c') = \dfrac{6}{16} = 0,375$, vagyis $\xi^{eha}(c) \geq \xi^{eha}(c')$ biztosan nem teljesül. □

2.5. Lemma. *A ξ^{eha} teljesíti a rang-tulajdonságot.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy $i \in I_j^-$ esetén $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.
Definíció alapján:

$$\xi_i(c) = s_i + \frac{k(i)}{\sum\limits_{l \in N} k(l)} \cdot k(N),$$

$$\xi_j(c) = s_j + \frac{k(j)}{\sum\limits_{l \in N} k(l)} \cdot k(N).$$

Minden $i \in I_j^-$-re tudjuk, hogy $s_i \leq s_j$, mivel $i \in N \setminus \mathcal{L}$, így $s_i = 0$, s_j pedig 0, ha $j \in N \setminus \mathcal{L}$ vagy c_j, ha $j \in \mathcal{L}$. Már csak a $k(i) = e(i) - s_i$ és $k(j) = e(j) - s_j$ viszonyát kell tisztázni. Azt kell belátni, hogy $k(i) \leq k(j)$, minden $i \in I_j^-$ esetben. Ekkor ugyanis $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.

1. $i \in I_j^-$, $j \notin \mathcal{L}$
   Ekkor $s_i = s_j = 0$ és $e(i) < e(j)$, mivel $e(i) = \sum\limits_{l \in I_i^- \cup \{i\}} c_l$ és $e(j) = \sum\limits_{l \in I_j^- \cup \{j\}} c_l$, illetve $I_i^- \cup \{i\} \subset I_j^- \cup \{j\}$, amennyiben $i \in I_j^-$. Vagyis $k(i) < k(j)$.
2. $i \in I_j^-$, $j \in \mathcal{L}$
   Ekkor $0 = s_i < s_j = c_j$.
   Ebben az esetben:

$$k(i) = e(i) - s_i = \sum_{l \in I_i^- \cup \{i\}} c_l - 0 = \sum_{l \in I_i^- \cup \{i\}} c_l,$$

$$k(j) = e(j) - s_j = \sum_{l \in I_j^- \cup \{j\}} c_l - c_j = \sum_{l \in I_j^-} c_l.$$

   – $i = j - 1$-re $k(i) = k(j)$,
   – $i \in I_{j-1}^-$-re $k(i) \leq k(j)$.

Vagyis minden esetben $k(i) \leq k(j)$, amivel az állítást igazoltuk. □

2.6. Lemma. *A ξ^{eha} nem minden $c \in \mathbb{R}^+$ esetén elégíti ki a szubvenció-mentességet.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő ellenpéldát: egy 5-hosszú láncra legyen $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $c = (10, 1, 1, 100, 1)$. Ekkor az elosztásra a következőt kapjuk: $\xi^{eha} = (4{,}35;\ 4{,}79;\ 5{,}23;\ 48{,}81;\ 49{,}81)$. A szubvenció-mentesség $i = 3$ esetén nem teljesül, ugyanis $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 14{,}37 > 12 = c_1 + c_2 + c_3$. □

3. A korlátozott átlag szerinti elosztás

Egy gazdálkodók között végzett felmérésben a megkérdezettek válaszai azt mutatták, hogy az eddigiekben leírt axiómák bármelyikének áthágása egyfajta „igazságtalanságot” eredményez [2]. Ugyanakkor azt érezhetjük, hogy a soros elosztás esetében a hátrébb elhelyezkedő falhasználóknak olykor már „túl sokat” kellene fizetniük, ami szintén sértheti az alapvető „igazságossági” szándékunkat. Ezeket a megállapításokat kell összhangba hozni egy látszólag átlag szerinti költségelosztás létezésének tényével. Ezért definiálunk egy módosított szabályt, amely a lehető „legközelebb” esik az átlag szerinti elosztási szabályhoz, és mindhárom axiómát kielégíti. Ebben a részben Aadland és Kolpin fogalmait és eredményeit általánosítjuk láncról fára [1].

3.1. Definíció. Egy korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály egy költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes elosztási elv, ahol az eltérés a szétosztott legmagasabb és legalacsonyabb költségek között a legkisebb, az összes lehetséges elosztási elvet tekintve.

Nyilvánvaló, hogy az átlag szerinti elosztás esetén a legmagasabb és legalacsonyabb költségek megegyeznek. A korlátozott átlag szerinti elosztás ezt a tényt próbálja realizálni, megőrizve a jogosan elvárt kritériumokat, azaz kielégítve az axiómákat. A fenti definíció azonban nem garantálja sem a létezést, sem az egyértelműséget. A létezés kérdését foglalja magába az a probléma, hogy a különböző költségprofilok különböző minimalizálási eljárásokhoz vezetnek-e, a szétosztott költségek közötti eltérésre nézve. Az egyértelműség kérdésének felmerülése pedig abból a tényből következik, mely szerint az említett minimalizáció nem ad direkt kikötéseket a „közbülső” költségekre. Az 3.1. tétel az egyetlen korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály létezését fogalmazza meg.
Ehhez vezessük be a következőket: Adottak $H \subset I$ részfák. Legyen

$$P(H, I) = \frac{\sum\limits_{j \in I \setminus H} c_j}{|I| - |H|}.$$

$P(H, I)$ reprezentálja az $I \setminus H$ csatorna részekhez tartozó felhasználónkénti költségeket, a megfelelő szegmensekhez tartozó felhasználók között felosztva.

3.1. Tétel. *Egyértelműen létezik egy ξ^r korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály, mely rekurzíven konstruálható a következő módon: legyen*

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = min\left\{P(0, J) \,|\, J \text{ részfa}\right\}, & J_1 = max\left\{J | P(0, J) = \mu_1\right\}, \\
\mu_2 = min\left\{P(J_1, J) \,|\, J_1 \subset J \text{ részfa}\right\}, & J_2 = max\left\{J | P(J_1, J) = \mu_2\right\}, \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
\mu_j = min\left\{P(J_{j-1}, J) \,|\, J_{j-1} \subset J \text{ részfa}\right\}, & J_j = max\left\{J | P(J_{j-1}, J) = \mu_j\right\}, \\
\quad\vdots & \quad\vdots
\end{array}$$

és $\xi_i^r(c) = \mu_j \ \forall j = 1, \ldots, n'$, $J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset J_{n'} = N$, *ahol* $i \in J_j \setminus J_{j-1}$.

A fenti formula látszólag bonyolult, valójában azonban könnyen kiszámolható. A μ_1 értéke egyszerűen a legalacsonyabb az egy főre eső költségek között, J_1 pedig a csatorna szegmensek legbővebb részfája, amin ez a legalacsonyabb költség érvényesül. A J_1-ből induló csatornaszakaszokhoz tartozó legkisebb egy főre jutó költség a μ_2, ez a $J_2 \setminus J_1$ részrendszeren realizálódik, és így tovább.

3.1. Példa. Ebben az esetben a minimális egy főre jutó költség 4, a legbővebb részfa, amin ez felvétetik, a $J_1 = \{1, 2\}$ részfa, tehát itt $\mu_1 = 4$. A fennmaradó részfában az egy főre eső minimális költség $4,5$, ami a $J_2 = \{3, 4\}$ részfán vétetik fel, vagyis $\mu_2 = \frac{(c_3+c_4)}{2} = 4,5$. A fennmaradó c_5 költség pedig a $J_3 = \{5\}$-ra vonatkozik, azaz $\mu_3 = 5$. Ezek alapján $\xi^r(c) = (4;\ 4;\ 4,5;\ 4,5;\ 5)$.

Most pedig tekintsük a 3.1. tétel bizonyítását!

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető a $P(H, I)$ definíciójából kiindulva, hogy a konstrukcióval megadott ξ^r teljesíti az alaptulajdonságokat. Majd tegyük fel, hogy van egy másik, ami legalább olyan jó a célfüggvényt tekintve, azaz ξ^r mellett ξ is rendelkezik az elvárt tulajdonságokkal. Tekintsünk egy olyan fát és c költségvektort, amire a ξ a ξ^r-től eltérő eredményt ad, n' értéke pedig legyen ξ^r konstrukciójában minimális. Ha $\xi(c) \neq \xi^r(c)$, akkor létezik i, amire $\xi_i(c) > \xi_i^r$, az ilyenek között is tekintsük a legkorábbit (a csúcsok rögzített sorrendjében a legkorábbi ilyen tulajdonságú csúcsot). Ez az $i \in J_k \setminus J_{k-1}$, azaz $\xi_i^r(c) = \mu_k$. Két esetet vizsgálunk:

1. $k < n'$:

ξ^r konstrukciója miatt $\sum\limits_{j \in J_k} \xi_j^r(c) = \sum\limits_{j \in J_k} c_j \geq \sum\limits_{j \in J_k} \xi_j(c)$, utóbbi egyenlőtlenség a szubvenció-mentességből következik. Az egyenlőtlenség fennállásából adódik, hogy létezik $h \in J_k$, amire $\xi_h^r(c) > \xi_h(c)$.

Emellett $c' < c$ legyen a következő: $j \in J_k$ esetén $c'_j = c_j$, $j \notin J_k$-ra pedig $\xi_j^r(c') = \mu_k$. Ez utóbbi csökkentés elvégezhető, mert c-ben a J_k-n kívüliekre a konstrukcióból következően $\xi_j^r(c)$ értéke μ_k értékénél nagyobb volt. A költségmonotitás miatt, valamint a h választásából és a c' konstrukciójából a következők adódnak:

$$\xi_h(c') \leq \xi_h(c) < \xi_h^r(c) = \xi_h^r(c') = \mu_k.$$

Tehát $\xi_h(c) < \xi_h^r(c)$, emellett c' esetén a konstrukció csak $k < n'$ lépésből áll, ami ellentmond n' minimalitásának. ($n' = 1$ esetén ξ^r épp az átlaggal egyenlő, tehát egyértelmű.)

2. $k = n'$:

Ekkor $\xi_i(c) > \xi_i^r(c) = \mu_{n'}$, ugyanakkor $\xi_1(c) \leq \xi_1^r(c)$ (mert $k = n'$ miatt nincs korábbi, ami nagyobb lenne). Vagyis ξ esetén a szétosztott legkisebb és legnagyobb költségek közti eltérés nagyobb, mint ξ^r esetén, ami ellentmond a minimalitási feltételnek. □

Definíció szerint tehát a korlátozott átlag szerinti költségelosztást a szétosztott legnagyobb és legkisebb költségek közti eltérés minimalizálásával nyertük, megtartva a költség-monotonitást, a rang-tulajdonságot és a szubvenció-mentességet.

A következő tételünk szerint ugyanezt az eredményt megkaphatjuk úgy is, ha egyszerűen a költségelosztás során kapott legnagyobb értéket minimalizáljuk. Ha a hasznosságot negatív költségekben mérjük, a probléma ekvivalens lesz a rawlsi jólét maximalizálásával (amit a társadalomban elfogadott legkisebb hasznosságban mérünk). A mi esetünkben ugyanis a rawlsi jólét maximalizálása egyenértékű az n-edik felhasználóra eső költségek minimalizálásával. Így tehát a korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály felfogható úgy, mint kollektív törekvés a társadalmi jólét maximalizálására, egyenlőségi alapon.

3.2. Tétel. *A korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes költség mechanizmus, ami maximális ralwsi jólétet biztosít.*

Bizonyítás. A bizonyítás a 3.1. tétel bizonyításával analóg módon történik. A bizonyítás utolsó lépésében kapott $\xi_i(c) > \xi_i^r(c) = \mu_{n'}$ összefüggés egyben azt is jelenti, hogy a rawls-i jólét a ξ elosztás esetén nem lehet maximális, amivel szintén ellentmondásra jutunk. □

A tétel összehasonlítható Dutta és Ray [3] cikkében megfogalmazott „egalitárius” elosztással, amely konvex játékok esetén a mag egy speciális eleme lesz.

A korlátozott átlag szerinti elosztásnak egy további, olyan tulajdonságát vizsgáljuk meg, ami költségelosztások esetén szintén hozzájárul ahhoz, hogy az „igazságosságot” árnyaltabban tudjuk kifejezni. Kimondunk tehát egy újabb axiómát, mely azt a célt szolgálja, hogy a felhasználók egy olyan csoportja, amely eddig „támogatásban” részesült, egy esetleges költségnövekedés esetén szintén köteles legyen részt vállalni az újonnan felmerülő költségekből. Ezen axióma és a 3.3. tétel Aadland és Kolpin [1] láncra megfogalmazott eredményei:

3.1. Axióma. ξ kielégíti a kölcsönösség axiómáját, ha $\forall i$-re
(a) $\sum\limits_{h \le i} \xi_h(c) \le \sum\limits_{h \le i} c_h$
(b) $c' \ge c$ és
(c) $\sum\limits_{h \le i} (c_h - \xi_h(c)) \ge \sum\limits_{j > i} (c'_j - c_j)$
teljesülése esetén nem igaz, hogy $\xi_h(c') - \xi_h(c) < \xi_j(c') - \xi_j(c) \quad \forall\ h \le i$ és $j > i$ esetén.

A kölcsönösségi axióma azt fejezi ki, hogy ha (a) az $\{1, ..., i\}$ felhasználók élveznek (akár alacsony) támogatást, (b) a költségek c-ről c'-re nőnek, és (c) amennyiben a plusz költségek kollektíve magasabbak az i utáni szegmensen, mint amekkora támogatást az $\{1, ..., i\}$ csoport élvez, méltánytalan lenne, ha a támogatott csoport tagjai kisebb költségnövekedésre számíthatnának, mint az őket támogató $\{i + 1, ..., n\}$ szegmens. Intuitíve tehát, amíg az $\{i + 1, ..., n\}$ felhasználók költségnövekedése nem haladja meg az $\{1, ..., i\}$ felhasználóknak nyújtott támogatást, a támogatottak legalább egy kevés tartozással bírnak a támogató csoporttal szemben. A kölcsönösség axiómája biztosítja, hogy a támogató csoportban legalább egy felhasználó esetén az adott felhasználóra eső költségnövekmény ne haladja meg a támogatott csoportban a legmagasabb költségnövekményű felhasználóra eső értéket.

3.3. TÉTEL. (Aadland és Kolpin, 1998) *A korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály láncok esetén költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes és kielégíti a kölcsönösség axiómáját.* [1]

4. A soros költségelosztás további tulajdonságai

Problémánk kapcsán a soros költségelosztási szabály szintén kiemelkedő jelentőségű. Ebben a részben tehát ezen elosztás további tulajdonságait mutatjuk be, az axiómák és tételek alapját Aadland és Kolpin [1] cikke adja.

4.1. Axióma. ξ szemi-marginális, ha $\forall\ i \in N \setminus \mathcal{L}$-re $\xi_{i+1}(c) \leq \xi_i(c) + c_{i+1}$, ahol $i+1$ jelöli az i egy közvetlen rákövetkezőjét I_i^+-ban.

4.2. Axióma. ξ növekvően szubvenciómentes, ha $\forall\ i \in N$ és $c \leq c'$ esetén

$$\sum_{h \in I_i^- \cup \{i\}} (\xi_h(c') - \xi_h(c)) \leq \sum_{h \in I_i^- \cup \{i\}} (c'_h - c_h).$$

A szemi-marginalitás azt jelenti, hogy ha $\xi_i(c)$ az $I_i^- \cup \{i\}$ csoportra nézve „igazságos" elosztás, akkor az $i+1$-edik felhasználónak semmiképpen ne kelljen többet fizetnie, mint $\xi_i(c) + c_{i+1}$. A növekvő szubvenció-mentesség a $\xi(c)$-ből kiindulva azért felel, hogy költségnövekedés esetén a felhasználók egyetlen csoportja se fizessen többet, mint a kollektív többletköltség.

4.1. TÉTEL. *A soros költségelosztási szabályt a költség-monotonitás, a rang-tulajdonság, a szemi-marginalitás és a növekvő szubvenció-mentesség karakterizálja.*

Bizonyítás. A soros elosztás konstrukciójából kiindulva könnyen meggondolható, hogy a soros költségelosztás eleget tesz a fenti tulajdonságoknak. Tegyük fel, hogy létezik egy ξ^s-től különböző ξ elosztás, ami szintén eleget tesz a feltételeknek. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor $\xi^s = \xi$. Legyen J egy részfa, és jelölje c^J a következő költségvektort: $c_j^J = c_j$, ha $j \in J$, különben legyen 0.

1. Először azt fogjuk megmutatni, hogy $\xi(c^0) = \xi^s(c^0)$, ahol *0* jelöli a csupán egyetlen gyökérből álló fát. Két egymást közvetlenül megelőző $i < j$ pontra $\xi_i(c^0) \leq \xi_j(c^0)$ a rangtulajdonság miatt, illetve $\xi_i(c^0) + c_j^0 \geq \xi_j(c^0)$ a szubvenció-mentesség miatt. Továbbá $c_j^0 = 0$. Ezek alapján $\xi(c^0)$ mindenütt egyenlő, azaz megegyezik $\xi^s(c^0)$-lal.
2. A következő lépésben belátjuk, hogy ha egy J részfára $\xi(c^J) = \xi^s(c^J)$, akkor a részfát egy olyan j-vel bővítve, amire $J \cup \{j\}$ is részfa, szintén

azt kapjuk, hogy $\xi(c^{J\cup\{j\}}) = \xi^s(c^{J\cup\{j\}})$. Így indukcióval eljuthatunk a $c^N = c$ esethez, vagyis megkapjuk, hogy $\xi(c) = \xi^s(c)$.

Azt kell tehát belátni, hogy $\xi(c^{J\cup\{j\}}) = \xi^s(c^{J\cup\{j\}})$. A monotonitás miatt mindenütt $\xi_h(c^J) \le \xi_h(c^{J\cup\{j\}})$. Most alkalmazzuk a növekvő szubvenció-mentességet a $H = N \setminus j \setminus I_j^+$ halmazra! Ekkor

$$\sum_{h\in H} (\xi_h(c^{J\cup\{j\}}) - \xi_h(c^J)) \le \sum_{h\in H} (c^{J\cup\{j\}} - c^J).$$

Mivel azonban a H halmazon $c^{J\cup\{j\}} = c^J$, ezért az egyenlőtlenség jobb oldala 0. A monotonitással összevetve azt kapjuk, hogy $\xi_h(c^J) = \xi_h(c^{J\cup\{j\}})$, $\forall h \in H$-ra. Ezen a halmazon viszont ξ^s sem változott, vagyis

$$\xi_h(c^{J\cup\{j\}}) = \xi_h^s(c^{J\cup\{j\}}).$$

A $\{j\} \cup I_j^+$ halmazra pedig az első pontban leírtakat alkalmazva a rang-tulajdonságból és a szemi-marginalitásból következik, hogy ezen a halmazon ξ mindenütt egyenlő, vagyis megegyezik az átlaggal. Így ezen a halmazon is megegyezik ξ^s-sel.

□

4.2. Tétel. *A soros költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú és növekvően szubvenciómentes mechanizmus, ami maximális ralwsi jólétet biztosít.*

Bizonyítás. Könnyen meggondolható, hogy a soros költségelosztás teljesíti a tételben elvárt tulajdonságokat. Most tegyük fel, hogy ξ^s-en felül ez egy tőle különböző ξ-re is igaz. Tekintsük most azt a c költséget, amire $\exists i$, hogy $\xi_i(c) > \xi_i^s$, emellett c az ilyen költségek között legyen olyan, ahol a $c_i \neq 0$ költségek száma minimális. Legyen i a fában olyan, amire $\xi_i(c) > \xi_i^s$.

A c költséget a következőképpen csökkentjük: keresünk egy olyan $c_j \neq 0$ költséget, amire $j \notin I_i^- \cup \{i\}$, vagyis j nem az i előtti láncból való.

1. Ha ilyen létezik, akkor c_j-t lecsökkentjük 0-ra, és az így kapott c'-t vizsgáljuk. A 4.1. tétel 2. pontjához hasonlóan a $H = I_i^- \cup \{i\}$ láncon a költségmonotonitás miatt $\xi_h(c') \le \xi_h(c)$. A növekvő szubvenció-mentesség miatt pedig a láncon nincs változás. Azaz $\xi_i(c') = \xi_i(c) > \xi_i^s(c) = \xi_i^s(c')$, vagyis c-ben a nem 0-ák száma nem volt minimális, ami ellentmond c választásának.
2. Eszerint a minimális nem 0-ás ellenpélda egy olyan költséghez tartozik, ahol az $I_i^- \cup \{i\}$ halmazon kívül minden $c_j = 0$. A rang-tulajdonság miatt $\forall j \in I_i^+$-ra $\xi_j(c) \ge \xi_i(c) > \xi_i^s(c) = \xi_j^s(c)$. Utóbbi egyenlőség a soros költségelosztás konstrukciójából következik, mivel I_i^+-on mindenütt $c_j = 0$. Egy olyan fában, ahol c_j csak i-ben és I_i^--ben lesz 0-tól különböző, a legnagyobb soros költségelosztás a $\xi_i^s(c)$ lesz. A rawlsi jólét maximalizálása

a legnagyobb szétosztott költség minimalizálásával egyezik meg, így a ξ szétosztás ezt a tulajdonságot nem teljesítheti, mert $\xi_i^s(c) < \xi_i(c)$.

□

A tétel szerint tehát a soros költségelosztás egy jólét-maximalizálás végeredményeként kapható meg.

4.3. TÉTEL. *A soros költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rangtulajdonságú, szemi-marginális mechanizmus, ami minimális ralwsi jólétet biztosít.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a soros költségelosztás kielégíti a tétel feltételeit. Tegyük fel most, hogy ez ugyanígy igaz a ξ^s-től különböző ξ-re is. Tekintsük továbbá azt a költséget, ahol $\exists i$, hogy $\xi_i(c) < \xi_i^s(c)$, emellett c olyan, hogy benne a $c_j \neq 0$ típusú költséges száma minimális.

A c költséget a következőképp csökkentjük: keresünk egy olyan $c_j \neq 0$ költséget, amire $j \notin I_i^- \cup \{i\}$, majd c_j-t 0-ra csökkentjük. Az így kapott c' költségre $\xi_i^s(c') = \xi_i^s(c) > \xi_i(c) \geq \xi_i(c')$, utóbbi egyenlőtlenség a költség-monotonitás miatt áll fenn. Így kapjuk, hogy $\xi_i^s(c') > \xi_i(c)$, ami ellentmond c választásának. Tehát ilyen c_j nem létezik, csak az $I_i^- \cup \{i\}$-beliekre lehetnek $c_j \neq 0$ értékek.

Ekkor a rang-tulajdonság miatt az $I_i^- \cup \{i\}$ láncban a legnagyobb ξ_j érték az i-hez tartozik. Mivel a láncon kívül $\forall c_j = 0$, ezért a rang-tulajdonság és a szemimarginalitás miatt (a 4.1. tétel 1. része alapján) a láncon kívül $\xi_j(c)$ mindenütt a j-t megelőző utolsó láncbeli h-ra vonatkozó $\xi_h(c)$-vel egyezik meg. A soros elosztás konstrukciója miatt c-re szintén $\xi_i^s(c)$ a legnagyobb. A ralws-i jótél minimalizálása a legnagyobb szétosztott költség maximalizálásával egyezik meg, így $\xi_i(c) < \xi_i^s(c)$ miatt a ξ nem lehet rawlsi minimum. □

Nyilvánvaló, hogy a korlátozott átlag szerinti költségelosztási elv szemi-marginális, a soros pedig szubvenciómentes. Összegzésül tehát mindkét mechanizmus költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes, szemi-marginális, és amíg a korlátozott átlag szerinti költségelosztási elv maximalizálja a rawlsi jólétet, addig a soros éppen hogy minimalizálja azt. Így tehát a korlátozott átlag szerinti elosztási elv a főcsatorna hátsó felén, míg a soros költség-elosztási elv a főcsatorna elején elhelyezkedő felhasználóknak kedvez.

5. Súlyozott költségelosztások

Ebben a szakaszban a korlátozott átlag szerinti és a soros elosztási elvek hektáronkénti és víz-részesedés szerinti súlyozott változatát vizsgáljuk meg. Ezek a verziók leírhatók a felhasználónként tárgyalt eset analogonjaként. Az itt szereplő definíciók és tételek alapját Aadland és Kolpin [1] cikke adja.

Jelöljünk ki minden felhasználóhoz egy $w_i > 0$ súlyt, ezen súly megfeleltethető az öntözött hektárnak, a felhasznált vízmennyiségnek (ez tekinthető a teljes vízkészlet azon hányadának, mely az adott felhasználóra esik), vagy akár egyéb mértékeknek. Tekintsük az alábbi definíciót!

5.1. Definíció. Az $\omega : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+^N$ egy w-súlyozott költségelosztási szabály, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$-re $\sum \omega_i(c) w_i = \sum_i c_i$.

(a) Az átlag szerinti w-súlyozott költségelosztási szabály szerint

$$\omega_i^a(c) = \frac{\sum_{j\in N} c_j}{\sum_{j\in N} w_j} \quad \forall j \in N\text{-re}.$$

(b) A soros w-súlyozott költségelosztási szabály szerint

$$\omega_i^s(c) = \sum_{j\in I_i^- \cup\{i\}} \frac{c_j}{\sum_{l\in I_j^+\cup\{j\}} w_l} .$$

Megjegyzés. Lánc esetén pedig

$$\omega_i^s(c) = \frac{c_1}{\sum_{j\geq 1} w_j} + \frac{c_2}{\sum_{j\geq 2} w_j} + \cdots + \frac{c_i}{\sum_{j\geq i} w_j} \quad \forall i \in N.$$

Az átlag szerinti w-súlyozott esetben az összköltség egyenlően oszlik meg minden egységnyi súlyon, míg a soros w-súlyozott elosztás szerint a költséget az egyes szegmensekre nézve osztjuk el egyenlő módon (egységnyi súlyok szerint) azok között a felhasználók között, akik az adott szegmenst igénybe veszik. Tekintsük a korábban már vizsgált példánkat láncra, ahol $N = \{1,2,3\}$ és $c = \{6,1,5\}$. Feltehető továbbá, hogy $w = \{1,2,3\}$. Ezek alapján kiszámolható, hogy $\omega^a(c) = (2,2,2)$, míg $\omega^s(c) = (1;\ 1,2;\ 2,86)$, a költségek pedig $c^a = (2,4,6)$ és $c^s = (1;\ 2,4;\ 11,44)$.

Mint azt a korábbi (felhasználónkénti) esetben tapasztaltuk, az átlag szerinti w-súlyozott elosztás nem fogja kielégíteni az összes szükséges axiómát, mégpedig a szubvenció-mentesség súlyozott megfelelőjét. Ismét egy korlátozott átlag szerinti elosztáshoz folyamodunk, melynek definiálása a korábbi esettel analóg módon történik, a megfelelő „súlyozott" axiómák bevezetése után.

5.1. Axióma. Az ω w-súlyozott költségelosztási szabály

- költségmonoton, ha $\omega(c) \leq \omega(c')$ $\forall c \leq c'$-re,
- rang-tulajdonságú, ha $\omega_i(c) \leq \omega_j(c)$ $\forall c \in (R)_+^N$ és $\forall i \in I_j^- \cup \{j\}$,
- szubvenciómentes, ha $c \in \mathbb{R}_+^N$ és $\forall I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq N$ esetén (ahol az egyszerűség kedvéért $J := I_{i_1}^- \cup \cdots \cup I_{i_k}^- \cup I$)

$$\sum_{j\in J} \omega_j(c) w_j \leq \sum_{j\in J} c_j.$$

Megjegyzés. Lánc esetén pedig $j \in J$ pontosan akkor teljesül, ha $j \leq i$, ekkor tehát elég annyit írni, hogy $\forall i \in N$ esetén

$$\sum_{j \leq i} \omega_j(c) w_j \leq \sum_{j \leq i} c_j.$$

A következő axiómákat a korábbi alfejezethez hasonlósan ismét csak lánc esetére mondjuk ki.

5.2. Axióma. Az ω w-súlyozott költségelosztási szabály

– kielégíti a kölcsönösségi axiómát, ha $c \leq c'$-re

$$\sum_{h \leq i} \omega_h(c) w_h \leq \sum_{h \leq i} c_h \quad \text{és}$$

$$\sum_{h \leq i} (c_h - \omega_h(c) w_h) \geq \sum_{j > i} (c'_j - c_j)$$

esetén nem igaz, hogy $\omega_h(c') - \omega_h(c) < \omega_j(c') - \omega_j(c)$ $\forall\ h \leq i$ és $j > i$-re,

– szemi-marginális, ha $\omega_{i+1}(c) \leq \omega_i(c) + \frac{c_{i+1}}{w_{i+1}}$, $\forall\ i = 1, \ldots, n-1$ -re,

– növekvően szubvenciómentes, ha $\forall\ i \in N$-re és $c \leq c'$ esetén

$$\sum_{j \leq i} (\omega_j(c') - \omega_j(c)) w_j \leq \sum_{j \leq i} (c'_j - c_j).$$

5.2. Definíció. Egy korlátozott átlag szerint w-súlyozott költségelosztási szabály olyan költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes w-súlyozott mechanizmus, ahol az eltérés a legmagasabb és a legalacsonyabb súlyozottan szétosztott költségek között a lehető legkisebb, az összes elosztási elvet tekintve.

Korábbi eredményeink a láncokra átfogalmazhatók a w-súlyozott esetre is, adott súlyozás esetén minden egyes súly formálisan megfeleltethető a felhasználónkénti költségekkel. Ezért korábbi tételeink egyszerűen így foglalhatók össze:

5.1. TÉTEL. (Aadland és Kolpin, 1998) *Az 3.1., 3.3., 3.2., 4.1., 4.2., 4.3. tételek láncokra vonatkozóan érvényben maradnak a w-súlyozott költségelosztási szabályok esetében is.* [1]

Hivatkozások

[1] D. Aadland and V. Kolpin: *Shared irrigation cost: An empirical and axiomatical analysis.* Mathematical Social Sciences, 849:203–218, 1998.

[2] D. Aadland and V. Kolpin: *Environmental determinants of cost sharing.* Journal of Economic Behavior & Organization, 53:495–511, 2004.

[3] B. Dutta and D. Ray: *A concept of egalitarianism under participation constraints.* Econometrica, 57(3):615–635, 1989.

[4] A. Radványi: *Költségelosztási modellek. (diplomamunka).* http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat/2010/radvanyi_anna_rahel.pdf, 2010.

[5] T. Solymosi: *Kooperatív játékok. (elektronikus jegyzet).* http://web.uni-corvinus.hu/opkut/files/koopjatek.pdf, 2007.

[6] Philip D. Straffin and James P. Heaney: *Game Theory and the Tennessee Valley Authority.* Inernational Journal of Game Theory, 10(1):35–43, 1981.

(Beérkezett: 2011. március 25.)

RADVÁNYI ANNA
Budapesti Corvinus Egyetem
Matematika Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 13-15.
e-mail: anna.radvanyi@uni-corvinus.hu

KOVÁCS GERGELY
Edutus Főiskola
Közgazdasági és Módszertani Alapozó Tanszék
2800 Tatabánya, Stúdium tér 1.
e-mail: kovacs.gergely@edutus.hu

COST-SHARING MODELS

Gergely Kovács and Anna Radványi

In this paper we consider cost-sharing models for which the basis is a real-world economic problem regarding irrigation. There is given an irrigation ditch joined to the stream by a head-gate and a group of users who use this ditch to irrigate their own farms. The functional and maintenance costs of the ditch are given too, and they have to be payed for by the users. One of the main questions is how to share the costs among the users. A cost-sharing rule defines how much each user has to pay to allocate the total cost. This allocation must be regarded "fair" by all users.

We explore the concept of cost-sharing, consider its expected properties and modelling opportunities, and evaluate the different solutions. In this paper we generalize Aadland and Kolpin's (Mathematical Social Sciences, 1988) results on chains to ditch-systems represented by rooted trees. We complete our study with other models also stemming from the Tennessee Valley Authority's (TVA) water farming problems. TVA was formed in 1933 to develop the economic expansion of Tennessee Valley. The results and methods based upon TVA's separated and non-separated cost models were first introduced by Straffin and Heaney (International Journal of Game Theory, 1981).