Alkalmazott Matematikai Lapok **28** (2011), 1-16.

POINCARÉ-EGYENLŐTLENSÉG KIZÁRÁSOS FOLYAMATOKRA

MÁNFAY MÁTÉ

Markov-folyamatok vizsgálatakor kulcsfontosságú szerepet tölt be az úgynevezett Poincaré-egyenlőtlenség, segítségével részecskerendszerek hidrodinamikai viselkedésével kapcsolatban vonhatunk le fontos következtetéseket. Korábban T. Funaki, K. Uchiyama és H.T. Yau bizonyította az egyenlőtlenséget a kétállapotú egyszerű kizárásos folyamatra, ebben az esetben az egyenlőtlenségben szereplő konstans a rendszer méretének négyzetével arányos. Cikkünk a háromállapotú kizárásos modellel foglalkozik, ahol interakció is megengedett az állapotok közt. Fő eredményünk a Poincaré-egyenlőtlenség bizonyítása erre a folyamatra, melyben a konstans nagyságrendje megegyezik a kétállapotú modellnél látottal.

1. Bevezetés

A róla elnevezett egyenlőtlenséget Henri Poincaré francia matematikus a Laplace-egyenlet Dirichlet-feladatához kapcsolódóan igazolta: felső becslést adott a Laplace-operátor legnagyobb sajátértékére, ami persze negatív. Klasszikus alkalmazási területe az elliptikus és parabolikus egyenletek elmélete, de az utóbbi évtizedekben tágabb értelmezést nyert, diszkrét jellegű problémák tárgyalásakor is fontos szerepet játszik, többek közt a valószínűségszámítás modern elméletében, Markov-folyamatok ergodikus viselkedésének vizsgálatánál [6]. Véges Ω állapottérben haladó folytonos idejű Markov folyamatokat vizsgálunk, általában $\Omega \subset \mathbb{X}^n$, ahol $\mathbb{X}$ véges halmaz. A folyamat generátora

$$L\varphi(\omega) = \sum_{\sigma\in\Omega} r(\omega,\sigma)(\varphi(\sigma) - \varphi(\omega)),$$

ahol $r(\omega,\sigma)$ jelöli a nemnegatív ugrási rátát ω-ból σ-ba. λ mérték stacionárius, ha minden φ függvényre $\sum_{\omega\in\Omega} L\varphi(\omega)\lambda(\omega) = 0$. Kölcsönható részecskerendszerek vizsgálatakor a kérdéses folyamat generátorának megszokott felírási módja a következő:

$$L\varphi(\omega) = \sum_{A\in\mathbb{A}} C_A(\omega)\left(\varphi\left(\omega^A\right) - \varphi(\omega)\right),$$

ahol $\mathbb{A}$ olyan $A : \Omega \to \Omega$ transzformációk gyűjteménye, melyek ω néhány koordinátáját változtatják. $C_A(\omega) \geq 0$ egy A-tól, illetve ω-tól függő konstans, és

ω^A jelöli azt a konfigurációt, melyet ω-ból kapunk az A-val jelölt transzformáción keresztül. Tipikusan $\left(\omega^A\right)^A = \omega$, illetve esetünkben $\lambda(\omega) = \lambda\left(\omega^A\right)$ is teljesülni fog. Jelölje $\mathbb{E}_\lambda$ a λ szerinti várható érték operátorát: $\mathbb{E}_\lambda\varphi = \sum_{\omega\in\Omega}\varphi(\omega)\lambda(\omega)$, Var_λ a λ szerint számolt szórásnégyzet értéke. Poincaré egyenlőtlensége szerint van olyan $c > 0$ szám, hogy ha $\varphi \in L^2(\lambda)$ és $\mathbb{E}_\lambda\varphi = 0$, akkor

$$\sum_{\omega\in\Omega}\lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq -c\sum_{\omega\in\Omega}\lambda(\omega)\varphi(\omega)L\varphi(\omega). \tag{1}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán a

$$\mathcal{D}(\varphi) = -\sum_{\omega}\lambda(\omega)\varphi(\omega)L\varphi(\omega)$$

Dirichlet-forma áll, vagyis $\mathbb{E}_\lambda\varphi^2 \leq c\mathcal{D}(\varphi)$, tehát $Var_\lambda\varphi \leq c\mathcal{D}(\varphi)$ ha $\mathbb{E}_\lambda\varphi \neq 0$.

A kölcsönható folyamatok elméletében gyakran feltételezett $\lambda(\omega) = \lambda(\omega^A)$ azonosság miatt λ eleve stacionárius mérték, vagyis $\mathbb{E}_\lambda L\varphi^2 = 0$, tehát

$$\mathcal{D}(\varphi) = \sum_{\omega\in\Omega, A\in\mathbb{A}} C_A(\omega)\left(\varphi\left(\omega^A\right) - \varphi(\omega)\right)^2\lambda(\omega).$$

Valóban,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\varphi) &= \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\left(L\varphi^2 - 2\varphi L\varphi\right)\lambda(\omega) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega, A\in\mathbb{A}} C_A(\omega)\left(\varphi^2\left(\omega^A\right) - \varphi^2(\omega) - 2\varphi(\omega)\left(\varphi\left(\omega^A\right) - \varphi(\omega)\right)\right) = \\ &= \sum_{\omega\in\Omega, A\in\mathbb{A}} C_A(\omega)\left(\varphi\left(\omega^A\right) - \varphi(\omega)\right)^2\lambda(\omega).\end{aligned}$$

Poincaré egyenlőtlensége tulajdonképpen az L generátor szimmetrikus részéről szól, ami $S := (L + L^*)/2$, ahol L^* jelöli az L adjungáltját az $L^2(\lambda)$ téren:

$$L^*\varphi(\omega) = \sum_{A\in\mathbb{A}} C_A(\omega^A)\left(\varphi\left(\omega^A\right) - \varphi(\omega)\right),$$

hacsak $\lambda\left(\omega^A\right) = \lambda(\omega)$. Az $S < 0$ operátor legnagyobb negatív sajátértékére adott becslés a stacionárius eloszláshoz való konvergencia sebességéről is információt szolgáltat. A vizsgált problémák többségénél $n = +\infty$, de persze elsőként a tér véges részét vizsgálják, majd ezt terjesztik ki a végtelen rendszerre.

2. A Poincaré-egyenlőtlenség egyszerű alkalmazásai

Először azt mutatjuk meg, hogy valószínűségi mértékek

$$|\mu - \lambda| := \sum_{\omega\in\Omega}|\mu(\omega) - \lambda(\omega)|$$

variációs távolsága becsülhető a Dirichlet-forma segítségével.

2.1. Állítás. *Ha egy véges Ω állapotterű, λ stacionárius eloszlású sztochasztikus folyamatra teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség c konstanssal, akkor*

$$|\mu - \lambda|^2 \leq 4c\,\mathcal{D}\left(\sqrt{f}\right),$$

ahol μ valószínűségi mérték, és $f(\omega) := \mu(\omega)/\lambda(\omega)$.

Bizonyítás. A $\sum_{\omega\in\Omega} |f(\omega) - 1|\lambda(\omega)$ tagot alakítva:

$$\sum_{\omega\in\Omega} |f(\omega) - 1|\lambda(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} |\sqrt{f(\omega)} - 1||\sqrt{f(\omega)} + 1|\lambda(\omega) \leq$$
$$\leq \sqrt{\sum_{\omega\in\Omega} \left(\sqrt{f(\omega)} - 1\right)^2 \lambda(\omega)}\sqrt{\sum_{\omega\in\Omega} \left(\sqrt{f(\omega)} + 1\right)^2 \lambda(\omega)}.$$

Mivel

$$\sum_{\omega\in\Omega} \left(\sqrt{f(\omega)} - 1\right)^2 \lambda(\omega) = 2 - 2\sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{f(\omega)}\lambda(\omega),$$

illetve

$$\sum_{\omega\in\Omega} \left(\sqrt{f(\omega)} + 1\right)^2 \lambda(\omega) = 2 + 2\sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{f(\omega)}\lambda(\omega),$$

tehát

$$\sqrt{2 - 2\sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{f(\omega)}\lambda(\omega)}\sqrt{2 + 2\sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{f(\omega)}\lambda(\omega)} =$$
$$= 2\sqrt{1 - \left(\sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{f(\omega)}\lambda(\omega)\right)^2} = 2\left(\mathrm{Var}_\lambda \sqrt{f}\right)^{1/2},$$

amiből Poincaré egyenlőtlenségével adódik az állítás. □

Az aktuális μ és a stacionárius λ mérték eltéré sére az

$$S(\mu|\lambda) = \sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega) \log \frac{\mu(\omega)}{\lambda(\omega)}$$

relatív entrópia csökkenésének sebessége ad becslést.

2.2. Állítás. *Egy véges Ω állapotterű, λ stacionárius mértékű, μ_0 eloszlásból indított Markov-folyamat t idő utáni eloszlása μ_t, ekkor*

$$S(\mu_t|\lambda) + \int_0^t \mathcal{D}\left(\sqrt{f_u}\right) du \leq S(\mu_0|\lambda),$$

ahol $f_t(\omega) = \mu_t(\omega)/\lambda(\omega)$.

Bizonyítás. A Kolmogorov-egyenlet alapján:

$$\partial_t S(\mu_t|\lambda) = \partial_t \sum_{\omega\in\Omega} \mu_t(\omega) \log f_t(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mu_t(\omega)(\partial_t + L) \log f_t(\omega),$$

ahol $\partial_t f_t / f_t$ járuléka eltűnik, mert λ stacionárius, tehát

$$\partial_t S(\mu_t|\lambda) = \sum_{\omega\in\Omega} \sum_{\sigma\in\Omega} \lambda(\omega) r(\omega,\sigma) f_t(\omega) \log \frac{f_t(\sigma)}{f_t(\omega)}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} f_t(\omega) \log \frac{f_t(\sigma)}{f_t(\omega)} &= 2 f_t(\omega) \log \sqrt{\frac{f_t(\sigma)}{f_t(\omega)}} \leq 2 \left(\sqrt{f_t(\omega) f_t(\sigma)} - f_t(\omega) \right) \\ &= f_t(\sigma) - f_t(\omega) - \left(\sqrt{f_t(\sigma)} - \sqrt{f_t(\omega)} \right)^2 , \end{aligned}$$

adódik, hogy

$$\partial_t S(\mu_t|\lambda) \leq - \sum_{\omega\in\Omega} \sum_{\sigma\in\Omega} \lambda(\omega) r(\omega,\sigma) \left(\sqrt{f_t(\omega)} - \sqrt{f_t(\sigma)} \right)^2 = -\mathcal{D}\left(\sqrt{f_t} \right)$$

□

A két eredményből következik, hogy ha teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség egy adott folyamatra, akkor annak stacionárius mértéke egyértelmű. Ha ugyanis λ mellett μ is stacionárius mérték volna, akkor $\mu_t = \mu$, vagyis $\partial_t S(\mu_t|\lambda) = 0$, tehát $|\mu - \lambda| = 0$.

3. Poincaré-egyenlőtlenség szimmetrikus kizárásos folyamatokra

3.1. A kétállapotú modell

A legegyszerűbb vizsgált folyamat az egyszerű szimmetrikus kizárásos folyamat, ennek konfigurációi n periódusú $0\!-\!1$ sorozatok: $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ és $\omega_{k+n} = \omega_k$. Ha $\omega_k = 1$, akkor azt mondjuk, hogy a k helyen részecske van, $\omega_k = 0$ üres pozíciót jelez. A konfigurációs tér az $\Omega_p^n = \{\omega \mid \sum \omega_k = p\}$ halmaz, $\mathbb{A}$ az $\{1, ..., n\}$ halmaz kételemű részhalmazaiból áll, és

$$C_A(\omega) = C_b(\omega) = \frac{1}{2} \left(\omega_k + \omega_l - 2\omega_k \omega_l \right),$$

ha $b = (k, l)$, továbbá ω^b azt a konfigurációt jelöli, amit ω-ból kapunk, ha $b = (k, l)$ élen lévő ω_k és ω_l koordinátákat felcseréljük, vagyis $(\omega^{(k,l)})_k = \omega_l$ és $(\omega^{(k,l)})_l = \omega_k$.

Könnyen látható, hogy a folyamat stacionárius mértéke: $\lambda(\omega) = \frac{p!(n-p)!}{n!}$. T. Funaki, K. Uchiyama és H.T. Yau [1] erre a folyamatra bizonyította a Poincaré-egyenlőtlenséget. Cikkük egyik eredménye a szimmetrizált, illetve távoli ugrásokat megengedő folyamatra vonatkozik:

3.1. Tétel. *[1] Minden $\varphi : \Omega_p^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén, melyre $\mathbb{E}_\lambda \varphi = 0$, teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség:*

$$\sum_{\omega\in\Omega_p^n} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega)\ leq \frac{1}{4n} \sum_{\omega\in\Omega_p^n, b\in B} \left(\varphi\left(\omega^b\right) - \varphi(\omega)\right)^2 \lambda(\omega),$$

ahol $B = \{(k,l) | 1 \le k, l \le n\}$ a cserék halmaza.

A későbbiekben utalni fogunk arra, hogy az általunk vizsgált probléma megoldásakor mennyire voltak alkalmazhatóak a Funaki-féle cikkben látott módszerek.

3.2. A háromállapotú modell

A következőkben vizsgált modell fizikai indíttatású. A modellt Tóth Bálint és Valkó Benedek vezette be [5], majd Fritz József és Tóth Bálint, illetve Fritz József és Nagy Katalin vizsgálja 2004-ben, valamint 2006-ban megjelent cikkükben [4], [2]. A konfigurációk 3 fajta elemet, részecskét tartalmaznak: $-1, 0, 1$, és mindegyikből adott, a folyamat során állandó számú szerepel, így a konfigurációs tér:

$$\Omega_{p,m}^n = \{\omega \mid \sum \omega_k = p - m, \sum \omega_k^2 = p + m\}.$$

Gondolhatunk itt pozitív, negatív részecskékre és üres helyekre. A részecskéink továbbra is egy dimenzióban mozognak, egy periodikus szakaszon, így a konfigurációkat egy n-hosszú vektorral reprezentáljuk: $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ és $\omega_{k+n} = \omega_k$. Továbbá egy erőtér hatására a pozitív töltésű részecskék jobbra, a negatív töltésűek balra mozognak 1-1 rátával, és egy -1-es és $+1$-es részecske helycseréje 2-es rátával történik. Ez bonyolultabb T. Funaki, K. Uchiyama és H.T. Yau által vizsgált kétállapotú modellnél, viszont a cikkükben [1] látott módszerek közül néhányat mi is alkalmazni fogunk.

A stacionárius λ valószínűségi mérték most is az egyenletes eloszlás az $\Omega_{p,m}^n$ altéren: $\lambda(\omega) = \frac{p!m!z!}{n!}$, ahol $z = n - m - p$ jelöli a nullák számát. Vagyis λ egy megmaradási feltételekkel vett egyenletes eloszlás a konfigurációs téren. Legyen φ a konfigurációs tér elemein ható függvény: $\varphi : \Omega_{p,m}^n \to \mathbb{R}$, feltehető, hogy $\mathbb{E}_\lambda \varphi = 0$.

A folyamat generátora a következőképpen hat:

$$L\varphi(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2 + \omega_k - \omega_{k+1}\right)\left(\varphi\left(\omega^{(k,k+1)}\right) - \varphi(\omega)\right).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy λ stacionárius mérték.

Térjünk át a Poincaré-egyenlőtlenség vizsgálatára. Az $(L + L^*)/2$ generátorral rendelkező folyamatot vizsgáljuk, $- < \varphi, L\varphi > = - < \varphi, L^*\varphi >$ és így

$$- < \varphi, L\varphi > = -\frac{1}{2} < \varphi, (L + L^*)\varphi > .$$

Vagyis ezáltal a Dirichlet-forma értéke nem változik, viszont egy reverzibilis folyamatot vizsgálhatunk, ami kényelmesebbé teszi a tárgyalást. L^* képlete alapján:

$$\left(\frac{L+L^*}{2}\right)\varphi(\omega) =$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\Big(\left(\omega_k^2+\omega_{k+1}^2+\omega_k-\omega_{k+1}\right)+$$
$$+\left(\omega_{k+1}^2+\omega_k^2+\omega_{k+1}-\omega_k\right)\Big)\left(\varphi\left(\omega^{(k,k+1)}\right)-\varphi(\omega)\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\omega_k^2+\omega_{k+1}^2\right)\left(\varphi\left(\omega^{(k,k+1)}\right)-\varphi(\omega)\right).$$

Tehát
$$\mathcal{D}(\varphi) = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{2}\left(\omega_k^2+\omega_{k+1}^2\right)\left(\varphi\left(\omega^{(k,k+1)}\right)-\varphi(\omega)\right)^2.$$

A következő tétel a cikk fő eredménye. Itt jegyezzük meg, hogy a következőkben még távoli cseréket is megengedünk (gondolhatunk erre úgy is, hogy a folyamat egy n pontú teljes gráfon zajlik), majd ezt az eredményt felhasználva vizsgáljuk a valódi folyamatot. Ezt az utat követték a Funaki-féle cikkben is.

3.2. TÉTEL. *Minden $\varphi : \Omega_{p,m}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén, melyre $\mathbb{E}_\lambda\varphi = 0$, teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség:*

$$\sum_{\omega\in\Omega_{p,m}^n}\lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \le \frac{2}{n}\sum_{\omega\in\Omega_{p,m}^n,b\in B}\left(\varphi\left(\omega^b\right)-\varphi(\omega)\right)^2\lambda(\omega),$$

ahol $B = \{(k,l)|1\le k,l\le n\}$ a cserék halmaza.

4. A Poincaré-egyenlőtlenség bizonyítása a háromállapotú kizárásos folyamatra

Ebben a fejezetben a 3.2. tételt bizonyítjuk.

4.1. A Poincaré-egyenlőtlenség bal oldalának átalakítá sa

A [1] cikk mintájára, mivel $\mathbb{E}_\lambda\varphi = 0$:

$$\sum_{\omega\in\Omega_{p,m}^n}\lambda(\omega)\varphi^2(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Omega_{p,m}^n}\sum_{\beta\in\Omega_{p,m}^n}\lambda(\alpha)\lambda(\beta)(\varphi(\alpha)-\varphi(\beta))^2,$$

továbbá az
$$\alpha = \omega^0 \to \omega^1 \to \dots \to \omega^k = \beta$$

úton haladva α-ból β konfigurációba a következő átalakítást hajthatjuk végre:

$$(\varphi(\alpha)-\varphi(\beta))^2=\sum_{l=0}^{k-1}\left(\varphi\left(\omega^{l+1}\right)-\varphi\left(\omega^{l}\right)\right)^2=\left(\sum_{l=0}^{k-1}\left(\varphi\left(\omega^{l+1}\right)-\varphi\left(\omega^{l}\right)\right)^2\right)+$$
$$+2\sum_{r=0}^{k-1}\left(\varphi\left(\omega^{r}\right)-\varphi\left(\omega^{r+1}\right)\right)\left(\varphi\left(\omega^{r+1}\right)-\varphi\left(\beta\right)\right):=N_{\alpha,\beta}+K_{\alpha,\beta}.$$

E szerint a felbontás szerint fogjuk becsülni a tagokat, a kétszeres szorzókról belátjuk, hogy az összes konfigurációra összegezve negatívot adnak, míg a négyzetes tagok alkotta összeget pedig felülről fogjuk becsülni.

A három állapotot a könnyebb kezelhetőség kedvéért értelemszerűen a $+,0,-$ szimbólumokkal jelöljük.

A bizonyítás szerkezete hasonlít a 0,1 részecskékből álló konfigurációs térnél látottra [1]. Viszont vegyük észre, hogy most az, hogy két konfiguráció hány helyen különbözik, nem határozza meg a két konfiguráció közt vezető út hosszát:

$$\alpha=(-,-,0,0,+,+),$$
$$\beta=(+,+,-,-,0,0),$$
$$\gamma=(+,0,+,-,0,-).$$

Könnyen látható, hogy mind β, mind γ is 6 helyen különbözik α-tól, viszont $\alpha\to\beta$ út 4 hosszú és $\alpha\to\gamma$ út 3 hosszú, így a tagok összeszámolása nem ígérkezik egyszerűnek. Az olyan 3 elemű részkonfigurációkat, melyek rendezéséhez legalább 2 csere szükséges, *ciklus*nak fogjuk nevezni.

Vegyük észre, hogy a permutációktól eltekintve két fajta ciklus van:

$$|+,0,-|\to|0,-,+|,$$

illetve

$$|+,0,-|\to|-,+,0|.$$

Az első ciklust *negatív ciklus*nak, a másodikat *pozitív ciklus*nak nevezzük a továbbiakban. Az elnevezés abból ered, hogy a 0 elem helyére $-$, vagy $+$ állapotnak kell kerülnie.

4.2. Az utak szerkezete:

Először vizsgáljuk meg adott α és β konfiguráció pár közti különbségek szerkezetét, azt, hogy milyen cserékkel lehet egyikből a másikba eljutni:

$$N_{x,y}:=\{k|\ \alpha_k=x,\beta_k=y\},$$

és legyenek ezek elemszámai:

$$n_{x,y}:=|N_{x,y}|.$$

Most vezessünk be néhány transzformációt, melyek a konfigurációkon hatnak. $T^b_{(k,l)}$ legyen az a transzformáció, ami ω konfiguráció k. és l. koordinátáján lévő állapotot felcseréli. Vagyis $\left(T^b_{(k,l)}(\omega)\right)_k = \omega_l$ és $\left(T^b_{(k,l)}(\omega)\right)_l = \omega_k$ és a többi koordináta nem változik.

$T^{c+}_{(k,l,m)}$ már három elemet változtat, és akkor értelmes, ha k, l, m állapotok közül egy-egy $+, 0, -$ állapot, és a transzformáció a 0 állapotból $+$, a $+$ állapotból $-$ és a $-$ állapotból 0-át csinál az adott k, l, m koordináta hármason, a többi koordinátát nem változtatja. Például: $T^{c+}_{(2,3,5)}(0+--0+) = 0-0-++$.

$T^{c-}_{(k,l,m)}$ is olyan konfigurációkon értelmezett, ahol k, l, m állapotok közül egy-egy $+, 0, -$ állapot, és a transzformáció a 0 állapotból $-$, a $-$ állapotból $+$ és a $+$ állapotból 0-át csinál az adott k, l, m koordináta hármason, a többi koordinátát nem változtatja. Például $T^{c-}_{(2,3,5)}(0+--0+) = 00+--+$.

Vegyük észre, hogy T^{c+} és T^{c-} transzformációk a ciklusokat hivatottak rendezni, és mindkettő felírható két megfelelő T^b transzformáció szorzataként. A következőkben utakat fogunk a konfiguráció párok közt definiálni. Adott α és β konfiguráció pár esetén α konfiguráción hajtsuk végre T^b, T^{c+}, T^{c-} transzformációk egy sorozatát, hogy β konfigurációt kapjuk. Méghozzá tegyük ezt úgy, hogy minden egyes koordinátán legfeljebb egyszer hajtunk végre transzformációt. Egy út legyen azon konfigurációk egymásutánja, amiket egy ilyen transzformáció sorozat során kapunk. $S_{\alpha,\beta}$ legyen adott α, β párra az így megengedett utak halmaza. A könnyebb érthetőség kedvéért hozunk egy példát a transzformációk sorozatára:

$$\begin{aligned}\left(T^b_{(1,2)} \circ T^{c+}_{(3,4,6)} \circ T^{c-}_{(5,7,10)} \circ T^b_{(8,11)}\right)(+0+00-+0+--) &= \\ &= (0+-+-00-++0),\end{aligned}$$

és az ehhez tartozó út:

$$\begin{aligned}\alpha = (+0+00-+0+--) &\to (+0+00-+-+-0) \to \\ \to (+0+0--0-++0) &\to (+0-+-00-++0) \to \\ &\to (0+-+-00-++0) = \beta.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy mivel a transzformációk egymástól diszjunkt koordinátákat változtatnak meg, a transzformációk felcserélhetőek.

4.3. A kétszeres szorzatok

Kezdjük a kétszeres szorzatok negatívitásával. Adott α,β konfiguráció pár közt készítsük el az összes $S_{\alpha,\beta}$-beli utat, ekkor a

$$\sum_{(\alpha,\beta)} \sum_{s \in S_{\alpha,\beta}} \frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|} \sum_{r=0}^{|s|-1} \left(\varphi\left(\omega^r\right) - \varphi\left(\omega^{r+1}\right)\right)\left(\varphi\left(\omega^{r+1}\right) - \varphi(\beta)\right) \tag{2}$$

összeg negatívitását fogjuk igazolni, ahol $|s|$ az s út hosszát jelöli.

Fixáljunk egy

$$\left(\varphi\left(\omega^{r}\right)-\varphi\left(\omega^{r+1}\right)\right)\left(\varphi\left(\omega^{r+1}\right)-\varphi(\beta)\right) \tag{3}$$

tagot, és az $\omega^{r+1}=T\omega^{r}$-et adó T transzformációt és ω^{r}-t is és magát r-t is, vagyis azt, hogy hányadik helyen hajtjuk végre a T transzformációt. Az áttekinthetőség kedvéért $\omega^{r}\equiv\omega$ jelölést használjuk. Négyesével fogjuk csoportosítani a tagokat. Ha $T=T^{b}_{(k,l)}$ valamely k,l párra, akkor a Funaki-féle [1] cikkben látottak továbbra is érvényesek:

Ugyebár van egy s-sel jelölt utunk:

$$\alpha\to\ldots\to\omega\to\omega^{b}\to\ldots\to\beta.$$

Az $\alpha\to\beta$ út, ezt három részre bontjuk: s_1 legyen $\alpha\to\omega$, és legyen s_2 $\omega^{b}\to\beta$. Induljunk ki β konfigurációból, és haladjunk a $b\circ s_1$ úton (ahol $\circ$ az utak egymás után fűzését jelenti), így jussunk el γ-ba:

$$\alpha\ \xrightarrow{s_1}\ \omega\ \xrightarrow{b}\ \omega^{b}\ \xrightarrow{s_2}\ \beta\ \xrightarrow{b}\ \beta^{b}\ \xrightarrow{s_1}\ \gamma.$$

Így van egy $\gamma\to\omega^{b}$ utunk: $s_1^{-1}\circ b\circ s_2^{-1}$ és ezen út mentén találjuk

$$\left(\varphi\left(\beta^{b}\right)-\varphi(\beta)\right)\left(\varphi(\beta)-\varphi\left(\omega^{b}\right)\right)$$

tagot, továbbá ha az egész úton végrehajtjuk a b cserét, akkor ugyebár $\gamma^{b}\to\omega$ utat kapjuk és $\left(\varphi(\beta)-\varphi\left(\beta^{b}\right)\right)\left(\varphi\left(\beta^{b}\right)-\varphi(\omega)\right)$ tagot. Tehát a szummában szereplő tagok négyesével (mint $\alpha\to\beta,\ \ \alpha^{b}\to\beta^{b},\ \ \gamma^{b}\to\omega,\ \ \gamma\to\omega^{b}$) csoportosíthatóak, hiszen bármelyik tagból indulva a fenti három átalakítást elvégezve a másik három tagot kapjuk. Továbbá minden négyes csoportból minden egyes tag szorzója a szummában azonos, hiszen mindegyik tagban a b csere azonos helyen történik, és ugyanazokat az elemeket cseréljük fel csak esetleg fordított sorrendben. Egy csoporton belüli tagok összege:

$$\begin{aligned}
&\big(\varphi(\omega)-\varphi(\omega^{b})\big)\big(\varphi(\omega^{b})-\varphi(\beta)\big)+\big(\varphi(\omega^{b})-\varphi(\omega)\big)\big(\varphi(\omega)-\varphi(\beta^{b})\big)+\\
&+\big(\varphi(\beta^{b})-\varphi(\beta)\big)\big(\varphi(\beta)-\varphi(\omega^{b})\big)+\big(\varphi(\beta)-\varphi(\beta^{b})\big)\big(\varphi(\beta^{b})-\varphi(\omega)\big)=\\
&=\big(\varphi(\omega)-\varphi(\omega^{b})\big)\big(\varphi(\omega^{b})-\varphi(\beta)+\varphi(\beta^{b})-\varphi(\omega)\big)+\\
&+\big(\varphi(\beta)-\varphi(\beta^{b})\big)\big(\varphi(\omega^{b})-\varphi(\beta)+\varphi(\beta^{b})-\varphi(\omega)\big)=\\
&-\big(\varphi(\omega^{b})-\varphi(\beta)+\varphi(\beta^{b})-\varphi(\omega)\big)^{2}\le 0.
\end{aligned}$$

Ha T transzformáció T^{c+} vagy T^{c-} típusú, akkor egy apró változtatásra van szükség: Van egy s-sel jelölt utunk:

$$\alpha\to\ldots\to\omega\to T\omega\to\ldots\to\beta.$$

Ekkor létezik egy T_{s_1} transzformáció, ami a fent definiált elemi transzformációk szorzata, hogy $T_{s_1}\alpha=\omega$ tovább egy T_{s_2} transzformáció, szintén elemi transzformációk szorzata, hogy $(T_{s_2}\circ T)\omega=\beta$. Persze ekkor $(T_{s_2}\circ T\circ T_{s_1})\alpha=\beta$ is teljesül.

Így az utunkat így is felírhatjuk:

$$\alpha \xrightarrow{T_{s_1}} \omega \xrightarrow{T} T\omega \xrightarrow{T_{s_2}} \beta,$$

ahol a nyilak indexébe az kerül, hogy a konfiguráción milyen transzfromációt hajtunk végre.

Most induljunk ki $T\alpha$ konfigurációból, és haladjunk $T_{s_2} \circ T^{-1} \circ T_{s_1}$ transzformáció sorozat által definiált úton. Ekkor a következő konfigurációkon halad keresztül az út:

$$T\alpha \xrightarrow{T_{s_1}} T\omega \xrightarrow{T} \omega \xrightarrow{T_{s_2}} T^{-1}\beta.$$

Ha $T\alpha$ és $T^{-1}\beta$ közt ezen a fenti úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatoknál megjelenik a

$$\left(\varphi(T\omega) - \varphi(\omega)\right)\left(\varphi\left(\omega\right) - \varphi(T^{-1}\beta)\right) \tag{4}$$

tag.

Ezek után induljunk ki $(T_{s_2} \circ T)\alpha$ konfigurációból, és haladjunk $T_{s_2}^{-1} \circ T^{-1} \circ T_{s_1}$ transzformáció által definiált úton. Ebben az esetben a következő konfigurációkat érinti az út:

$$(T_{s_2} \circ T)\alpha \xrightarrow{T_{s_1}} \beta \xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}\beta \xrightarrow{T_{s_2}^{-1}} \omega.$$

Ekkor ha $(T_{s_2} \circ T)\alpha$ és ω közt ezen az úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatoknál a következő tag is szerepelni fog:

$$\left(\varphi(\beta) - \varphi\left(T^{-1}\beta\right)\right)\left(\varphi\left(T^{-1}\beta\right) - \varphi(\omega)\right). \tag{5}$$

Végül ha $T_{s_2}\alpha$ konfigurációból indulunk ki, és $T_{s_2}^{-1} \circ T \circ T_{s_1}$ transzformáció által definiált úton haladunk, akkor a következő konfigurációkon keresztül halad az út:

$$T_{s_2}\alpha \xrightarrow{T_{s_1}} T^{-1}\beta \xrightarrow{T} \beta \xrightarrow{T_{s_2}^{-1}} T\omega.$$

Vagyis ebben az esetben ha $T_{s_2}\alpha$ és $T\omega$ közt a most definiált úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatok közt a következő tag is szerepel:

$$\left(\varphi\left(T^{-1}\beta\right) - \varphi(\beta)\right)\left(\varphi(\beta) - \varphi(T\omega)\right). \tag{6}$$

Könnyen látható, hogy akármelyik most definiált 4 út egyikéből indultunk volna ki, és elvégeztük volna a fenti 3 manipulációt, szintén ugyanezeket az utakat és tagokat kaptuk volna. Továbbá nyilván minden egyes tag szorzója azonos. Ekkor a $(3), (4), (5), (6)$ tagok összege:

$$\begin{gathered}
\big(\varphi(\omega) - \varphi(T\omega)\big)\big(\varphi(T\omega) - \varphi(\beta)\big) + \big(\varphi(T\omega) - \varphi(\omega)\big)\left(\varphi(\omega) - \varphi\left(T^{-1}\beta\right)\right) + \\
+\big(\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\beta)\big)\big(\varphi(\beta) - \varphi(T\omega)\big) + \big(\varphi(\beta) - \varphi(T^{-1}\beta)\big)\big(\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)\big) = \\
= \big(\varphi(\omega) - \varphi(T\omega)\big)\big(\varphi(T\omega) - \varphi(\beta) + \varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)\big) + \\
+\big(\varphi(\beta) - \varphi(T^{-1}\beta)\big)\big(\varphi(T\omega) - \varphi(\beta) + \varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)\big) = \\
-\big(\varphi(T\omega) - \varphi(\beta) + \varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)\big)^2 \leq 0.
\end{gathered}$$

Így $\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta} \leq 0$, amit igazolni akartunk, most már áttérhetünk az összeg első tagjának vizsgálatára.

Itt jegyezzük meg, hogy az [1] cikkben látott bizonyítás önmagában nem volt megismételhető, lévén, hogy vannak olyan cserék, melyek sorrendje nem felcserélhető, ezt küszöböltük ki T^{c+} és T^{c-} transzformációk bevezetésével.

4.4. A négyzetes tagok

Második lépés

$$Q = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|} \sum_{s \in S_{\alpha,\beta}} \left(\sum_{l=0}^{|s|-1} \left(\varphi\left(\omega^{l+1}\right) - \varphi\left(\omega^{l}\right)\right)^2 \right) \tag{7}$$

összeg vizsgálata. Elsőként T^{c+} és T^{c-} transzformációkat felbontjuk az összes lehetséges módon két-két T transzformáció szorzatára, ezt ugyebár egy-egy transzformációnál 6 féleképpen tehetjük meg. Képletben:

$$\begin{aligned}
&\big(\varphi(T^{c+}\omega) - \varphi(\omega)\big)^2 = \\
&\quad = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \big(\varphi((T_{i,2} \circ T_{i,1})\omega) - \varphi(T_{i,1}\omega) + T_{i,1}\varphi(T_{i,1}\omega) - \varphi(\omega)\big)^2 \leq \\
&\quad\ \frac{2}{6}\sum_{i=1}^{6} \big(\varphi((T_{i,2} \circ T_{i,1})\omega) - \varphi(T_{i,1}\omega)\big)^2 + \big(\varphi(T_{i,1}\omega) - \varphi(\omega)\big)^2 \leq \\
&\quad\ \sum_{i=1}^{6} \big(\varphi((T_{i,2} \circ T_{i,1})\omega) - \varphi(T_{i,1}\omega)\big)^2 + \big(\varphi(T_{i,1}\omega) - \varphi(\omega)\big)^2,
\end{aligned}$$

ahol $T_{i,2}$ és $T_{i,2}$ megfelelő cseréket jelölik, az átalakítások során a Cauchy-egyenlőtlenséget használtuk. Ezzel a lépéssel tulajdonképpen azt értük el, hogy csak sima párcserékkel kell foglalkoznunk.

Így a (7) becslése a következő alakot ölti:

$$Q \leq \sum_{\omega,b} c(\omega, b) \left(\varphi\left(\omega^{b}\right) - \varphi(\omega)\right)^2,$$

ahol $c(\omega, b)$ csak ω-tól és b-től függő állandó. Vegyük észre, hogy

$$c(\omega_1, b_1) = c(\omega_2, b_2),$$

ha b_1 és b_2 azonos állapotokat cserélnek fel. Hiszen ha veszünk két tagot:

$$\big(\varphi(\omega_1^{b_1}) - \varphi(\omega_1)\big)^2 \text{ és } \big(\varphi(\omega_2^{b_2}) - \varphi(\omega_2)\big)^2.$$

Ekkor létezik olyan π permutáció, mely ω_1 konfigurációt ω_2-be viszi, és b_1 csere is b_2 cserébe megy át. Így ez a permutáció az utak közt, melyek a két kérdéses tagot tartalmazzák, egy bijekciót ad meg, vagyis a két tag szorzója valóban azonos lesz a fenti összegben.

Felső becslést fogunk adni arra, hogy egy adott $\left(\varphi(\omega^b)-\varphi(\omega)\right)^2$ tag milyen együtthatóval szerepelhet (7)-ban, ehhez elég megbecsülni, hogy hány olyan tag van, amelyben a csere b-vel azonos állapotokat cserél. Legyen b csere olyan ami $+$ és 0 állapotokat cserél (ezt innentől $(+0)$ cserének hívjuk), más cserékre ugyanez az okoskodás elmondható.

Ehhez elsőként vizsgáljuk meg azt, hogy adott α és β közt vezető úton legfeljebb hány $(+0)$ csere van. Minden egyes úthoz tartozik egy koordináta partíció, aszerint, hogy melyik elemeken hajtottunk végre T, T^{c+}, T^{c-} transzformációt. Példa a partíciókra:

$$\begin{aligned}\alpha &:= |-,0|0|+,0|+,0|-,0,+|-,+|+|+|0,-,+|+,0,-|,\\ \beta &:= |0,-|0|0,+|0,+|+,-,0|+,-|+|+|-,+,0|-,+,0|.\end{aligned}$$

Ekkor akármilyen utat is tekintünk, a $(+0)$ cserék száma nem lehet több, mint a

$$\begin{array}{ccc} |+,0| & |-,0,+| & |+,0,-| \\ |0,+| & |+,-,0| & |-,+,0| \end{array}$$

típusú partíciók száma összesen, hiszen az első esetben egy darab $(+0)$ csere történik, a három elemű partícióknál pedig partíciónként legfeljebb egy. Tehát a $(+0)$ cserék száma nem több, mint $n_{+,0}+n_{0,+}$, és fontos, hogy ez minden egyes α és β közti útra egy magától az úttól független becslés.

Tehát az olyan tagok száma, melyekben a $b=(+0)$ az

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|}\sum_{s\in S_{\alpha,\beta}}\left(\sum_{l=0}^{|s|-1}\left(\varphi\left(\omega^{l+1}\right)-\varphi\left(\omega^{l}\right)\right)^2\right)=\\ &=\frac{1}{2}\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|}\sum_{s\in S_{\alpha,\beta}}R(T,s,\omega)\end{aligned}$$

összegben, ahol

$$R(T,s,\omega)=\left(\sum_{l=0}^{|s|-1}\sum_{i=1}^{6}\left(\varphi\left(\left(T^l_{i,2}\circ T^l_{i,1}\right)\omega\right)-\varphi\left(T^l_{i,1}\omega\right)\right)^2+\left(\varphi\left(T^l_{i,1}\omega\right)-\varphi(\omega)\right)^2\right)$$

legfeljebb $2W$, ahol:

$$W=\sum_k k|\{(\alpha,\beta)|\alpha \text{ és } \beta \text{ párra } k=n_{+0}+n_{0+}\}| \tag{8}$$

Ez a következők miatt igaz. Minden egyes $s \in S_{\alpha,\beta}$ útra az s úthoz tartozó

$$\sum_{l=0}^{|s|-1} \sum_{i=1}^{6} \left(\varphi\left(\left(T_{i,2}^l \circ T_{i,1}^l\right)\omega\right) - \varphi\left(T_{i,1}^l \omega\right)\right)^2 + \left(\varphi\left(T_{i,1}^l \omega\right) - \varphi(\omega)\right)^2$$

tagban a fentiek szerint a b cserét tartalmazó tagok száma legfeljebb $n_{+,0} + n_{0,+}$. Így a tagok száma legfeljebb:

$$\sum_{\alpha,\beta} \left(n_{+,0}^{\alpha,\beta} + n_{0,+}^{\alpha,\beta}\right) = \sum_k k|\{(\alpha,\beta)|\alpha \text{ és } \beta \text{ párra } k = n_{+0} + n_{0+}\}|,$$

ahol α, β felső indexek azt jelzik, hogy az adott n mely konfiguráció párok közti különbségeket jelöli.

A (8)-es kifejezés tovább alakítva, most már hozzávéve a $\frac{1}{2}\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$ szorzót is:

$$\lambda(\alpha)\lambda(\beta)W = \mathbb{E}(X),$$

ahol X valószínűségi változó két egyenletes eloszlással kiválasztott konfigurációra az olyan koordináták számát jelöli, ahol az egyik konfigurációban $+$ áll, a másikban 0 vagy fordítva. Legyenek $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók, melyekre $X_i = 1$, ha az egyik konfiguráció az i. koordinátáján $+$ állapot áll, a másik konfiguráció i. koordinátáján pedig 0 állapot áll. Legyen $X_i = 0$ minden más esetben. Persze ekkor $X = X_1 + ...X_n$ teljesül. Így a várható érték linearitása miatt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1) = n\left(\frac{2pz}{n^2}\right) = \frac{2pz}{n}.$$

Vagyis egy adott $\left(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega)\right)^2$ tag, ahol $b = (+0)$, szorzója legfeljebb:

$$c(\omega, b) \leq \frac{\frac{2pz}{n}}{\frac{n!}{p!z!m!}pz} = \frac{2}{n}\lambda(\omega)$$

hiszen, $\frac{n!}{p!z!m!}$ féleképp tudjuk ω konfigurációt megválasztani és pz féleképp a b cserét.

Míg a Poincaré-egyenlőtlenség jobb oldalán ennek a tagnak a szorzója pont $\frac{2}{n}\lambda(\omega)$, hiszen ω és b rögzített, így a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalán lévő szummában a $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$ tag egyszer fordul elő.

Ugyanez a gondolatmenet működik a $(+-)$ és $(0-)$ cserékre is, a három kapott eredményt összevetve adódik, hogy

$$\sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} \left(\varphi\left(\omega^b\right) - \varphi(\omega)\right)^2 \lambda(\omega),$$

amit igazolni akartunk. $\square$

Az előző bizonyításban B-vel, az összes lehetséges cserék halmazával dolgoztunk. Viszont a modell leírásánál a folyamat motivációjaként azt írtuk, hogy elektromos erőtér hatására a pozitív töltésű részecskék szomszédos helyekre ugrálva jobbra haladnak, míg a negatív töltésű részecskék balra. Így B^* jelölje a szomszédos helyeken létrejöhető cserék halmazát, vagyis

$$B^* = \{(k, k+1) | 1 \leq k \leq n,\ \omega_k - \omega_{k+1} = 1 \text{ vagy } \omega_k - \omega_{k+1} = 2\}$$

Ekkor igaz a következő Poincaré-egyenlőtlenség:

4.1. TÉTEL. *Minden $\varphi : \Omega^n_{p,m} \to \mathbb{R}$ függvény esetén, melyre $\mathbb{E}\varphi = 0$, teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség:*

$$\sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq n^2 \sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B^*} \left(\varphi\left(\omega^b\right) - \varphi(\omega)\right)^2 \lambda(\omega),$$

ahol B^* a fent definiált.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása azonos a [1] cikkben látottakkal. Az előző tétel eredményét fogjuk kihasználni. Elsőként $\left(\varphi\left(\omega^b\right) - \varphi(\omega)\right)^2$ tagot alakítjuk át: jussunk el ω^b-ből ω-ba (vagy fordítva, amelyik lehetséges) egy úton, hogy közben csak B^*-beli cseréket végzünk, vagyis egy részecske szomszédos helyekre lépkedve "vándorol":

$$\omega^b := \alpha^k \to \ldots \to \alpha^0 =: \omega$$

a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\begin{aligned}\left(\varphi\left(\omega^b\right) - \varphi(\omega)\right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\varphi\left(\alpha^{i+1}\right) - \varphi\left(\alpha^i\right)\right)\right)^2 \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{k-1} 1^2\right)\left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\varphi\left(\alpha^{i+1}\right) - \varphi\left(\alpha^i\right)\right)^2\right) \leq \\ &\leq n\left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\varphi\left(\alpha^{i+1}\right) - \varphi\left(\alpha^i\right)\right)^2\right).\end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned}\sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B} \left(\varphi\left(\omega^b\right) - \varphi(\omega)\right)^2 &\leq \sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B} n\left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\varphi\left(\alpha^{i+1}\right) - \varphi\left(\alpha^i\right)\right)^2\right) \leq \\ &\leq n^3 \sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B^*} \left(\varphi\left(\omega^b\right) - \varphi(\omega)\right)^2,\end{aligned}$$

hiszen egy adott $\left(\varphi\left(\alpha^{i+1}\right) - \varphi\left(\alpha^i\right)\right)^2$ tag nem szerepelhet többször a fenti szummában, mint n^2, hiszen a "vándorló" részecske (legyen az 1-es vagy -1-es) kevesebb, mint n helyről indulhatott, és kevesebb mint n helyre érkezhet. Felhasználva előző tételünk eredményét:

$$\sum_{\omega\in\Omega_{p,m}^n}\lambda(\omega)\varphi^2(\omega)\le\frac{2}{n}\sum_{\omega\in\Omega_{p,m}^n,b\in B}\left(\varphi\left(\omega^b\right)-\varphi(\omega)\right)^2\lambda(\omega)\le$$
$$\le 2n^2\sum_{\omega\in\Omega_{p,m}^n,b\in B^*}\left(\varphi\left(\omega^b\right)-\varphi(\omega)\right)^2\lambda(\omega)$$

adódik, ezzel a bizonyítást befejeztük. □

Hivatkozások

[1] T. Funaki, K. Uchiyama, H.T. Yau: *Hydrodynamic limit for lattice gas reversible under Bernoulli measures*, in: Nonlinear Stochastic PDEs. Ed: T. Funaki and W.A. Woyczinski (Springer, New York, 1996) 1–40.

[2] József Fritz, Katalin Nagy : *On uniqueness of the Euler limit of one-component lattice gas models.*, ALEA Latin American Journal of Probability and Math. Stat., (2006) 367–392.

[3] Laurent Saloff-Coste: *Lectures on finite Markov chains*, in: Lectures on Probability Theory and Statistics, Springer (1997)

[4] József Fritz and Bálint Tóth: *Derivation of the Leroux system as the hydrodynamic limit of a two-component latice gas.* Communications in Mathematical Physics **249**, (2004) 1–27.

[5] Bálint Tóth, Benedek Valkó: *Onsager relations and Eulerian hydrodynamic limit for systems with several conservation laws.* Journal of Statistical Physics **112**, (2003) 497–521.

[6] S. Ethier, T. Kurtz: *Markov Processes: Characterization and Convergence.* Wiley, New York (1986)

(Beérkezett: 2010. január 20.)

MÁNTFAY MÁTÉ
Central European University
1051 Budapest, Nádor utca 9.
MTA SZTAKI
1111 Budapest, Kende u. 13-17.
e-mail: manfay@sztaki.hu

POINCARÉ INEQUALITY FOR INTERACTIVE PARTICLE SYSTEMS

Máté Mánfay

The Poincaré inequality is an important tool in the theory of continuous Markov processes. It can be used to analyze the hydrodynamic behavior of the process. Previously T. Funaki, K. Uchiyama and H.T. Yau proved the inequality for the simple symmetric exclusion process. In this case, the constant has an order of n^2, where n denotes the size of the system. In this paper we deal with the simple symmetric exclusion process with positive and negative charges. The main result of the paper is the proof of the Poincaré inequality for this model with a constant that has the same order as in the previous model.