Alkalmazott Matematikai Lapok **28** (2011), 77-93.

LIE-SZIMMETRIÁK EGY KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSA[1]

MÓCZÁR JÓZSEF ÉS MÁRKUS FERENC

1. Bevezetés

Egy fizikai rendszer időbeli fejlődése bizonyos esetekben nagyon elegánsan megfogalmazható a legkisebb hatás elvével. A matematikai leírás középpontjában a koordináták és sebességek speciális függvénye, az ún. Lagrange-függvény áll. Ez a fizika tudományában oly hatásos módszer alkalmazható lehet akár az analóg közgazdasági dinamikai rendszerekre is. Ekkor a rendszer egy extremális pályát követ a fázistérben úgy, hogy a Lagrange-függvény integrálja stacionárius. Látni fogjuk, hogy a Lagrange-függvény tetszőleges Lie-szimmetriái megfelelnek egy-egy állandó mennyiségnek, a megmaradási elvet pedig egy variációs szimmetria magyarázza, amely egy dinamikai vagy geometriai szimmetriához kapcsolható.

Ebben a tanulmányban ismertetjük a Nöther-tétel lényegi vonatkozásait, és kitérünk a Lie-szimmetriák értelmezésére abból a célból, hogy közgazdasági folyamatokra is alkalmazzuk a Lagrange-formalizmuson nyugvó elméletet. A Lie-szimmetriák dinamikai rendszerekre történő feltárása és viselkedésük jellemzése a legújabb kutatások eredményei e területen. Például Sen és Tabor (1990), Edward Lorenz (1963), a komplex kaotikus dinamika vizsgálatában jelentős szerepet betöltő 3D modelljét, Baumann és Freyberger (1992) a két-dimenziós Lotka-Volterra dinamikai rendszert, és végül Almeida és Moreira (1992) a három-hullám interakciós problémáját vizsgálták a megfelelő Lie-szimmetriák segítségével. Mi most empirikus elemzésre egy közgazdasági dinamikai rendszert választottunk, nevezetesen Goodwin (1967) ciklusmodelljét. Ennek vizsgálatát tűztük ki célul a leírandó rendszer Lie-szimmetriáinak meghatározásán keresztül.

Ismert, hogy a Lotka-Volterra ökológiai rendszer (Lotka (1925), Volterra (1931)) és Goodwin (1967) vele analóg növekedési ciklusmodelljének megoldásgörbéi, a zárt elliptikus pályák, közvetlenül megadhatók egy speciális Ljapunov-függvény segítségével (Hirsch-Smale, 1974). Viszont maga Goodwin az első integrál fogalmát használta fel közgazdasági modelljének megoldásgörbéi meghatározásában, de kellő magyarázat hiányában, a közgazdászok előtt mindvégig homály fedte az első integrál fizikai kötődését, a Lagrange-struktúrából történő származtatását. Sem az 1967-es tanulmányában, sem a későbbi írásokban sem Goodwin, sem más ez idáig

[1]A szerzők köszönetüket fejezik ki az anonim lektornak a dolgozat elkészítése során nyújtott értékes megjegyzéseiért és javaslataiért

nem mutatta meg, hogy dinamikai rendszere rendelkezik Lagrange-struktúrával, és a megfelelő Lie-szimmetriával áll elő a kérdéses első integrál, vagy másképpen nevezve, a Hamilton-függvény, azaz a dinamikai folyamat egy megmaradó mennyisége. Szigorúan didaktikai szempontok miatt, kihasználva az egyszerűbb Lotka–Volterra-modell és a bonyolultabb Goodwin-modell ekvivalenciáját, párhuzamos[2] levezetésekkel jutunk el a megfelelő Lie-szimmetriákhoz.

Az a célkitűzésünk, hogy az elméleti vizsgálatainkat követő empirikus elemzéseinkben megmutassuk, hogy Goodwin 2D dinamikai rendszerének is van Lagrange struktúrája, következésképpen a Nöther-tétel itt is alkalmazható, és a megfelelő dinamika kvalitatív értelemben egyértelmű. Ebben felhasználjuk Fernández-Núñez (1998) eredményeit is. A Lie-szimmetriákat és a Lotka–Volterra-modellre kapott első integrálokat vagy másképp Hamilton-függvényeket, azonban tőle eltérően származtatjuk le. Az általa alkalmazott módszerben a Lagrange-függvény előállításához a modell paramétereiben erős matematikai megszorításokat kívánt meg. Ez azonban lehetetlenné teszi az ún. skálázott Lotka–Volterra-modelljének ökológiai magyarázatát, csak úgy, mint a Goodwin-modell közgazdasági értelmezését. Mindazonáltal e megközelítés, a Nöther-tételen keresztül, nemcsak relevanciát, hanem eleganciát is mutat, mivel szabadon használhatjuk mind a klasszikus (nem relativisztikus) mechanika, mind a matematikai irányításelmélet nyelvezetét, illetve fogalmi rendszerét.

Tanulmányunkat a következőképpen rendeztük. A 2. szakaszban a Lagrange-elméletet mutatjuk be. A 3. szakaszban elemezzük Nöther tételét és a vele kapcsolatos megmaradási törvényeket, majd ezt követően a 4. szakaszban definiáljuk az alapvető Lotka–Volterra-rendszer Lagrange-függvényét. Az első integrál a Nöther-tételben feltételezi a mozgási egyenletek Lie-szimmetriáit, amelyeket az 5. szakaszban írunk le. A 6. szakaszban felvázoljuk a Goodwin-modellt. A következőkben, 7., 8. és 9. szakaszokban, megmutatjuk az ekvivalenciát a Goodwin-modell és a Lotka–Volterra-rendszer között, megadjuk a modell Lagrange- és Hamilton-függvényeit, Lie-szimmetriáit, és végül a kapott eredmények közgazdasági értelmezését a megfelelő következtetésekkel együtt.

2. A Lagrange-elmélet

A dinamikai szimmetriák és a megmaradási elvek közötti kapcsolatra elsőként Nöther (1918) állított fel egy általános érvényességű tételt. Ennek szellemében általában is igaz, hogy a Lagrange-függvény bármely szimmetriája megfelel egy megmaradó mennyiségnek, és vice versa. Ezt egy nagyon egyszerű példával szemléltethetjük. Vegyük az m tömegű szabad részecske klasszikus Lagrange-függvényét, ami egyszerűen $L = (1/2)m\dot{x}^2$. Látható, hogy az L csak az $\dot{x}$ sebességtől függ, és függet-

[2]Ezt megkönnyíti Goodwin (1967) tanulmánya is, mivel modelljének kifejtésében szorosan követte a Lotka-Volterra modell logikáját. Harvie (2000) tanulmányából tudjuk, hogy a genetikus J. B. S. Haldane hívta fel Goodwin figyelmét a híres ökológiai modellre.

len az x helytől, azaz a térbeli eltolással szemben invariáns. Így a $dL/dx = 0$, azaz, az L szimmetrikus az x-en keresztül. Ebből következik, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet[3] alapján $p = \partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ konstans, vagyis a p impulzus megmaradó mennyiség.

A Lagrange-függvény határozza meg a dinamikai rendszer mozgáspályáit. A kapcsolódó Lie-szimmetriák olyanok, hogy az integrál-funkcionál függő és független változóinak infinitezimális transzformációi mellett változatlanul hagyják a teljes struktúrát. Ezt az invarianciát az irodalomban időnként variációs szimmetriának is nevezik. Vizsgálatainkban különös figyelmet fordítunk az ún. dinamikai szimmetriára, amely nem a koordináta transzformációkkal kapcsolatos geometriai szimmetria, és amely ugyancsak fontos lesz a Nöther-tétel megértésében.

Meg kell említenünk azt az ismert tényt [Wigner (1954)], hogy nem mindegyik dinamikai rendszerhez adható meg Lagrange-függvény, s ennek következtében a Nöther-tétel nem alkalmazható. Továbbá, egy adott Lagrange-függvény esetén a Nöther-féle variációs szimmetria adott megmaradási elvekre vezet. Ugyanakkor egy dinamikai rendszerhez többféle (és nem csak egy időderivált tagban különböző) olyan Lagrange-függvény is megadható, amelyek Euler–Lagrange-egyenletei a kérdéses dinamikai rendszert eredményezik, de integrál-funkcionáljukat infinitezimálisan transzformálva nem feltétlenül viselkednek ekvivalensen.

Tekintsük például a két-dimenziós harmonikus oszcillátor esetét, amelyre Morandi et al. (1990, 203. o.) két különböző Lagrange-függvényt is meghatároznak:

$$L_1 = \frac{1}{2}\left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega^2\left(q_1^2 + q_2^2\right)\right] \tag{1}$$

és a kevésbé ismert lehetséges választás

$$L_2 = \dot{q}_1\dot{q}_2 - \omega^2 q_1 q_2. \tag{2}$$

Mindenesetre a q_1 és q_2 változókra[4] vonatkozó Euler–Lagrange-egyenletek (mozgásegyenletek) ugyanazok mindkét Lagrange-függvény esetében:

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = 0, \tag{3a}$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0. \tag{3b}$$

Felvetődik ugyanakkor a jogos kérdés, hogy a két lehetséges megfogalmazás ekvivalens-e, és ha nem, akkor melyik biztosítja a ténylegesen alkalmas leírást? Látható, hogy a mozgásegyenletek származtatása alapján nincs egyértelmű válasz. A fizikai problémák vizsgálata során segítségül hívhatók az impulzusra, impulzusmomentumra, energiára, de akár elektromos töltésre, lepton-számra, barion-számra stb. vonatkozó megmaradási tételek.

Jelen eseteket megvizsgálva látható, hogy a véges θ szögű

$$q_1' = q_1 \cos\theta - q_2 \sin\theta \tag{4a}$$

$$q_2' = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta \tag{4b}$$

[3] Lásd később a (8) egyenletet.

[4] Általában érvényes, hogy az extremalizálandó függvényekre: $q(t) \in C^2$.

$O(2)$ forgatásokkal szemben az (1) egyenlettel megadott Lagrange-függvény invariáns[5]. Másrészt az is igaz, hogy ezzel a transzformációval szemben a (2) Lagrange-függvény nem marad változatlan[6]. Ha viszont a θ-ra kikötjük, hogy infinitezimális mennyiség lehet, azaz $\theta << 1$, akkor a $\cos\theta \sim 1$ és $\sin\theta \sim 0$ közelítéssel élve a (2) Lagrange-függvény is invariáns marad[7]. Mivel az infinitezimális forgatások az impulzusmomentum megmaradásával vannak szoros kapcsolatban (lásd később a 3. szakaszt), ezért megállapíthatjuk, hogy e fontos megmaradási tétel mindkét Lagrange-függvényben jelen van.

Érdekes észrevenni, hogy a

$$q_1' = e^{\eta} q_1, \tag{5a}$$

$$q_2' = e^{-\eta} q_2 \tag{5b}$$

egyfajta összenyomást kifejező az η véges paraméterű transzformációval szemben a (2) Lagrange-függvény invariáns, míg az (1) Lagrange-függvény nem, és ez az $\eta \to 0$ határesettel sem érhető el[8]. Ezért, ha ez a transzformáció az egyik esetben hordoz is valamiféle értelmet, és levonható esetleg egy megmaradási tétel léte, a másik esetben biztosan nem jelent semmit.

Végül meg kell jegyezzük, hogy az L_1 Lagrange-függvény egy-dimenziós esetekre is azonnal alkalmas mozgásegyenletet szolgáltat a $q_2 = 0$ választással, míg a másik esetben ez a lépés egyszerűen azonosan zérussá teszi az L_2-t. Ott a két szabadsági fok együttes megléte a leírásban alapvető követelmény.

Legelső feladatunk az, hogy megmutassuk, hogy ha egy dinamikai rendszernek van Lagrange struktúrája és első integrálja, akkor ez utóbbi valóban egy olyan Hamilton-függvény vagy megmaradó mennyiség, ami megfelel a kérdéses Lagrange-függvény Lie szimmetriájának. Ehhez szükségünk lesz Nöther tételére is, amit most vázlatosan levezetünk.

3. A Nöther-tétel és a megmaradási törvények

Már fizikai tanulmányainkból is tudjuk, hogy Nöther tétele bármely más tudományterületen hasznos lehet, ha ott a kérdéses probléma variációs elvvel megfogalmazható. A tétel összekapcsolja az

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q\left(t\right), \dot{q}(t)\right) dt \tag{6}$$

integrál-funkcionál (hatás) invariáns tulajdonságait a megmaradási törvényekkel, azaz a megfelelő Euler–Lagrange- vagy Hamilton-differenciálegyenletek integrál-

[5]Ennek belátása azon alapszik, hogy fennáll: $q_1'^2 + q_2'^2 = q_1^2 + q_1^2$.
[6]Belátható, ha tekintjük: $q_1' q_2' = q_1 q_2 \cos^2\theta - q_1^2 \sin\theta\cos\theta + q_2^2 \sin\theta\cos\theta - q_1 q_2 \sin^2\theta$.
[7]Az infinitezimális θ szögű forgatások esetén: $q_1' q_2' = q_1 q_2$.
[8]Az $\eta = 0$ eset az identitás transzformációnak felel meg.

jaival. Így az impulzus (mozgásmennyiség) és az impulzusmomentum megmaradása a mechanikában rendre megfelel a fenti integrál-funkcionál térbeli eltolási és forgási invarianciájának, míg az időbeli eltolási invarianciája az energiamegmaradáshoz kapcsolódik. Az idő- és térváltozók szerinti eltolási és forgási invarianciákat geometriai invarianciáknak is nevezik. Ezekbe újabb és mélyebb betekintést nyerhetünk, ha feltárjuk a Lagrange-függvény és a belőle nyerhető mozgásegyenletek belső szimmetriáit. Minden egyes független szimmetria a folyamat további megmaradási törvényét adja. Fontos hangsúlyozni, hogy egy bizonyos jelenség leírása a matematika nyelvén történik, ezért nem korlátozhatjuk a Lagrange-függvény megfogalmazását csak fizikai jelenségekre, azaz, sikeresen alkalmazható kémiai, biológiai és közgazdasági folyamatokra is.

A mechanika extremális elvei alapvető fontosságúak mind a fizikában, mind az optimális irányításelméletben. A kezdeti t_1 és a végső t_2 időpontokban felvett q_1 és q_2 állapotok közötti mozgást vizsgálják. Általában az extremális pálya kiszámítása a kitűzött feladat. Matematikailag, ha a hatásfüggvény extremális az optimális (reál) pályára, akkor az integrál-funkcionál a (6) egyenletben nem veheti fel extrémumát egyik variált (perturbált) $q(t) + \delta q(t)$ pályára sem, legyen az bármilyen közel is az extremálishoz. Ezt úgy mondjuk, hogy variáljuk a hatásfüggvényt, azaz, az első variációját vesszük az integrál-funkcionálnak:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L\left(t, q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t)\right) - L\left(t, q(t), \dot{q}(t)\right)\right] dt \tag{7}$$

Mindez azt a célt szolgálja, hogy megtaláljuk az extrémum szükséges feltételét, amely mellett $\delta S = 0$ teljesül. Ez a legkisebb hatás elvét fejezi ki. Alkalmazva a variációszámítás lépéseit (lásd Budó (1964) vagy Móczár (2008)), megkapjuk az Euler–Lagrange-differenciálegyenletet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \tag{8}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása adja az extremális (optimális, valós) $q(t)$ mozgási pályát[9].

A Nöther-tétel kifejtése irányába továbblépve, feltesszük, hogy a hatás legyen invariáns mind a $q(t)$ általános koordináta (pálya-változó), mind a t időváltozó határon történő együttes infinitezimális eltolásával szemben. Az egyszerűség kedvéért csak a felső határ koordinátáját változtatjuk meg, amit úgy jelölünk, hogy a t_2 helyett $t + \delta t$-t írunk. A megváltozott felső határhoz vezető függvényt pedig q'-vel jelöljük:

$$q'(\tau) = q(\tau) + \zeta(\tau). \tag{9}$$

[9]Megjegyezzük, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet a következő explicit formában is megadható:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q}\dot{q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial t} = 0,$$

így a standard Euler–Lagrange-egyenlet mindig egy másodrendű ODE.

A $\zeta(\tau)$-ról feltesszük, hogy infinitezimálisan kis függvény, és teljesíti a $\zeta(t_1) = 0$ feltevést. Az integrál-funkcionál megváltozása most:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t+\delta t} L\left(\tau, q', \dot{q'}\right) d\tau - \int_{t_1}^{t} L\left(\tau, q, \dot{q}\right) d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t} L\left(\tau, q+\zeta, \dot{q}+\dot{\zeta}\right) d\tau + \\ &+ \int_{t}^{t+\delta t} L\left(\tau, q+\zeta, \dot{q}+\dot{\zeta}\right) d\tau - \int_{t_1}^{t} L\left(\tau, q, \dot{q}\right) d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

A középső integrál úgy is írható, mint

$$\int_{t}^{t+\delta t} L\left(\tau, q+\zeta, \dot{q}+\dot{\zeta}\right) d\tau = L(t)\,\delta t, \tag{11}$$

mivel az integrációs tartománya infinitezimálisan kicsi. Az $L\left(\tau, q+\zeta, \dot{q}+\dot{\zeta}\right)$ függvény lineáris közelítését véve a Taylor-sorából, kapjuk:

$$L\left(\tau, q+\zeta, \dot{q}+\dot{\zeta}\right) = L\left(\tau, q, \dot{q}\right) + \frac{\partial L}{\partial q}\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\zeta}. \tag{12}$$

A (11)-et és (12)-t behelyettesítve (10)-be:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\zeta}\right] d\tau + L(t)\,\delta t. \tag{13}$$

Az integrál második tagját parciálisan integrálva, kapjuk:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] \zeta d\tau + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\zeta\right]_{t_1}^{t} + L(t)\,\delta t. \tag{14}$$

Az integrál az Euler–Lagrange-egyenlet miatt eltűnik, a kiintegrált rész pedig az alsó határon zérus. Ezért a következő egyenletet kapjuk:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\zeta(t) + L(t)\,\delta t. \tag{15}$$

A $\zeta(t)$ a felső határ koordinátájának δq megváltozásával írható mint:

$$\delta q = q'(t+\delta t) - q(t) = q(t+\delta t) + \zeta(t+\delta t) - q(t), \tag{16}$$

ahonnan

$$\zeta(t+\delta t) = \delta q - \left[q(t+\delta t) - q(t)\right]. \tag{17}$$

A szögletes zárójelben levő mennyiség a differenciálszámítás középérték-tétele alapján $\dot{q}\delta t$-vel közelíthető, a $\zeta(t+\delta t)$ helyett közelítésül írhatunk $\zeta(t)$-t a δt és ζ kicsiny volta miatt. Azaz,

$$\zeta(t) = \delta q - \dot{q}\delta t. \tag{18}$$

Ezt beírva (14)-be, kapjuk:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right] \delta t. \tag{19}$$

Bevezetve a

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{20}$$

jelölést, a szögletes zárójelbeli kifejezés

$$p\dot{q} - L = H\left(q, p\right), \tag{21}$$

ami a rendszer Hamilton-függvénye. Az integrál-funkcionál megváltozása végül is:

$$\delta S = p\delta q - H\delta t. \tag{22}$$

Az integrálási tartomány határán történő variálás okán ezt az összefüggést a variációszámítás határképletének is szokás nevezni[10]. Ha a hatás-függvény érzéketlen a határokon tetszőlegesen változtatott δt-re és δq-ra[11], akkor az azt jelenti, hogy a H és p mennyiségek konstansok a mozgás ideje alatt. A kalkulusban az idő szerinti integráljaikat gyakran első integráloknak nevezik. A H Hamilton-függvény konstans a mozgás alatt, ha a Lagrange-függvény explicite nem függ az időtől, azaz $L = L(q, \dot{q})$. Ez a következőképpen látható be, felhasználva az Euler–Lagrange-egyenletet:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right). \tag{23}$$

Az első és az utolsó mennyiség közötti egyenlőségből kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) = 0, \tag{24}$$

amelyből

$$\dot{q} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q}) = const \tag{25}$$

a mozgásegyenlet első integrálja. A fizikában a H Hamilton-függvényt a rendszer E energiájával azonosítják, és ez az időeltolással kapcsolatos. A (20)-beli mennyiség a téreltolással kapcsolatos p impulzus.

Egy harmadik megmaradó mennyiség nyerhető a

$$\frac{\partial L\left(t, q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}} \delta q \tag{26}$$

[10] A határképlet definiálja a q koordinátához és a t időhöz kanonikusan konjugált mennyiségeket, nevezetesen a (20) képlettel adott általános vagy kanonikus impulzust, illetve a (21) Hamilton-függvény (-1)-szeresét. Bővebben lásd Nagy (1981).

[11] Megjegyezzük, hogy a (19) $\delta S = 0$ mellett az optimális irányításelméletben az ún. általános transzverzalitási feltételt adja (lásd Móczár (2008) 108. oldal).

alakból, ha vesszük a $\delta q = \overset{\wedge}{\epsilon} q$ infinitezimális forgatást a 3D térben, ahol $\overset{\wedge}{\epsilon}$ a forgatás antiszimmetrikus mátrixa. Ekkor az impulzusmomentum megmaradásához jutunk[12].

E három transzformáció tartozik az elmélet geometriai szimmetriáihoz. Rendkívüli nagy kihívás azonban, hogy megtaláljuk azokat a nem geometriai szimmetriákat, amelyek teljessé teszik e feltevést általában. Ezek a mozgás dinamikai szimmetriái. A matematikai kidolgozás a legtöbb esetben nem egy triviális számolás. Ha a q változó olyan transzformációját adjuk meg, ami szerint a hatás-függvény variációja zérus marad, akkor az elmélet egy belső szimmetriáját kapjuk meg, ami a megmaradó mozgásmennyiséget eredményezi. A független transzformációk mindegyik ága egy-egy megmaradási törvényt ad. Ez a Nöther-tétel jelentése.

4. Lotka-Volterra 2D dinamikai rendszerének Lagrange-struktúrája

Először a Lotka-Volterra 2D dinamikai rendszerére[13] fókuszálunk:

$$\dot{x} = ax - dyx, \tag{27a}$$

$$\dot{y} = -by + cxy. \tag{27b}$$

Könnyen felismerhetjük, hogy a rendszer Lagrange-függvényét sokkal egyszerűbben megkaphatjuk, ha mindkét egyenletet elosztjuk az xy szorzattal. Ekkor a következő

[12] Jelölje $q = (q_x, q_y, q_z)$ a helyvektort, míg a (20) egyenletből $p = (p_x, p_y, p_z)$ az impulzust. Az infinitezimális forgatást leíró mátrix

$$\overset{\wedge}{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix},$$

amellyel a $\delta q'$ komponensei rendre

$$\begin{aligned} \delta q'_x &= -\varepsilon_z q_y + \varepsilon_y q_z \\ \delta q'_y &= \varepsilon_z q_x - \varepsilon_x q_z \\ \delta q'_z &= -\varepsilon_y q_x + \varepsilon_x q_y. \end{aligned}$$

Ha most képezzük a (26) összefüggésbeli szorzatot, és kiemeljük az ε_x, ε_y és ε_z együtthatókat, akkor ennek értékére kapjuk:

$$\varepsilon_x(-p_y q_z + p_z q_y) + \varepsilon_y(p_x q_z - p_z q_x) + \varepsilon_z(-p_x q_y + p_y q_x).$$

Ismeretes, hogy itt rendre az impulzusmomentum vektor x, y, z komponensei álltak elő.

[13] Megjegyezzük, hogy itt az eredeti Lotka–Volterra-modellt vesszük, az $a, b, c, d > 0$ kikötésekkel, ami biztosítja az ökológiai értelmezést.

egyenleteket kapjuk:

$$\frac{\dot{x}}{xy} = \frac{a}{y} - d, \tag{28a}$$

$$\frac{\dot{y}}{xy} = -\frac{b}{x} + c. \tag{28b}$$

A (27a) és (27b) mozgásegyenletek Lagrange-függvénye a következő:

$$L\left(x, \dot{x}, y, \dot{y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\ln y}{x}\dot{x} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{y}\dot{y} - (a\ln y + b\ln x - cx - dy). \tag{29}$$

Ez könnyen ellenőrizhető, ha vesszük az L egyes változói, azaz x és y szerinti Euler–Lagrange-egyenleteit, amelyek pontosan megegyeznek a Lotka–Volterra-rendszer (27a) és (27b) egyenleteivel.

Végül a Hamilton-függvényt fejezzük ki, amely a következő:

$$H = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = a\ln y + b\ln x - cx - dy. \tag{30}$$

Mivel a Lagrange-függvény explicite nem függ az időváltozótól, ezért a Hamilton-függvény a megmaradó mennyiség (első integrál), ami a mechanikában az E energiának felel meg. Kis átalakítás után egy kompakt formulát kapunk a megmaradó mennyiségre:

$$I\left(= e^E\right) = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}}. \tag{31}$$

5. A mozgásegyenletek Lie-szimmetriái

Ebben a pontban megvizsgáljuk a (27a) és (27b) mozgásegyenletekkel leírt Lotka–Volterra-rendszer Lie-szimmetriáit. Tekintsük most a következő infinitezimális transzformációkat:

$$x' = x + \eta_1(x, y), \tag{32}$$

$$y' = y + \eta_2(x, y), \tag{33}$$

$$t' = t, \tag{34}$$

ahol nem tételezzük fel az $\eta_1(x, y)$ és $\eta_2(x, y)$ függvények időfüggését, azaz az idő szerinti parciális deriváltjaik zérussal egyenlőek: $\partial\eta_1/\partial t = \partial\eta_2/\partial t = 0$. Behelyettesítve a (32), (33) és (34) egyenleteket a (27a) és (27b) egyenletekbe, az egyszerűsítés után az alábbi PDE rendszert kapjuk:

$$(ax - dyx)\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + (cxy - by)\frac{\partial\eta_1}{\partial y} + (dy - a)\,\eta_1 + dx\eta_2 = 0, \tag{35}$$

$$(ax - dyx)\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + (cxy - by)\frac{\partial\eta_2}{\partial y} - cy\eta_1 + (b - cx)\,\eta_2 = 0. \tag{36}$$

E két csatolt parciális differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását mutatják az alábbi egyenletek:

$$\eta_1 = ax - dxy, \tag{37}$$

$$\eta_2 = cxy - by, \tag{38}$$

amelyek felhasználásával azonnal megfogalmazhatjuk a releváns generátort (a szimmetria vektort)[14]:

$$X_1 = (ax - dyx)\frac{\partial}{\partial x} + (cxy - by)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{39}$$

A (35) és (36) egyenletek egy másik megoldása következőképpen írható:

$$\eta_1 = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} x\,(a - dy)\,, \tag{40}$$

$$\eta_2 = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} y\,(cx - b)\,. \tag{41}$$

Most az infinitezimális generátor a következő:

$$X_2 = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}}\,(ax - dyx)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}}\,(cxy - by)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{42}$$

Összehasonlítva a (39) és (42) egyenletekben szereplő generátorokat, könnyen belátható, hogy

$$X_2 = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} X_1, \tag{43}$$

azaz a generátorok csak egy tényezőben különböznek. Mivel a generátorok struktúrája ugyanaz, a kérdéses

$$I = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} \tag{44}$$

tényezőnek a mozgás állandóságát kell mutatnia. Ez az eredmény összhangban van a (31) egyenletben szereplő, a Lagrange-függvény alapján kapott megmaradó mennyiséggel, ami a Lotka-Volterra rendszer dinamikai szimmetriájára vonatkozik. Hangsúlyozzuk, hogy ezeket az eredményeket anélkül kaptuk, hogy levezetéseinkben bármiféle kikötést is tettünk volna az a, b, c, d paraméterekre, szemben Fernández-Núñezzel (1998).

6. Goodwin növekedési ciklusa

Goodwin (1967) 'növekedési ciklusa' a foglalkoztatás és a kibocsátás (teljes termelés) elosztási arányainak egyszerű dinamikus modellje. A foglalkoztatási ráta

[14] Részletekért lásd Hydon (2000).

és a munkások teljes jövedelemből történő részesedése mozgáspályáit az alábbi nem lineáris dinamikai rendszer alapján vizsgálta:

$$\dot{v} = [(1/\sigma) - (\alpha + \beta) - (1/\sigma)\, u]\, v, \tag{45}$$
$$\dot{u} = [-(\alpha + \gamma) + \rho v]\, u, \tag{46}$$

ahol v a foglalkoztatási ráta, u a munkások teljes jövedelemből történő részesedése, $\dot{v}$ és $\dot{u}$ az idő szerinti deriváltjaik, σ a rögzített tőke-kibocsátás arány, α a munkatermelékenység növekedési üteme, ami állandó meg nem testesült technikai haladást feltételezve konstans. β a munkaerő-kínálat állandó növekedési üteme, valamint $\dot{w}/w = -\gamma + \rho v$, ahol w a bérráta, γ és ρ konstansok nagy pozitív értékekkel. Megjegyezzük, hogy a (45) és (46) egyenletek egy elsőrendű nem lineáris autonóm homogén 2D differenciálegyenlet-rendszert alkotnak.

Ha nincs u a (45) egyenletben, akkor a foglalkoztatás konstans ütemben nő, azaz $\dot{v}/v = (1/\sigma) - (\alpha + \beta)$, ahol $(1/\sigma) > (\alpha + \beta)$, ami azt jelenti, hogy a tőke hatékonysága nagyobb, mint a munkatermelékenység növekedési ütemének és a munkaerő-kínálat növekedési ütemének összege. Másképpen, a foglalkoztatási ráta nő, ha a tőke hatékonysága nagyobb, mint a növekedés intenzív és extenzív tényezőinek összege. Hasonlóan, ha nincs v a (46) egyenletben, akkor a munkások teljes jövedelemből történő részesedése konstans ütemmel csökken, azaz $\dot{u}/u = -(\alpha+\gamma)$. Vagyis a munkások teljes jövedelemből történő részesedésének üteme pontosan annyival csökken, mint a munkatermelékenység növekedési ütemének és a bérráta autonóm növekedési ütemének az összege. Mindkét esetben a mozgási pálya exponenciális függvény, az előbbi esetben növekvő, az utóbbiban csökkenő. Ha viszont figyelembe vesszük a másik változót is, akkor (45)-ben a tőke hatékonysága az u-n keresztül csökkenti a foglalkoztatási ráta ütemét, a (46)-ban pedig az egységnyi foglalkoztatási rátára eső bérráta növekedési üteme a v-n keresztül csökkenti a munkások teljes jövedelemből történő részesedésének csökkenési ütemét.

Ezt követően Goodwin eliminálja az időváltozást a (45) és (46) egyenletekből. Ebben ugyanazt az egyszerű technikát alkalmazta, mint amit Andronov et al. (1966, 143–145. o.) alkalmaztak a Lotka-Volterra dinamikai rendszerre. Az így kapott időinvariancia, csakúgy mint a klasszikus mechanikában, az első integrált adja:

$$[(1/\sigma) - (\alpha + \beta)] \ln u + (\gamma + \alpha) \ln v - (1/\sigma)\, u - \rho v = const. \tag{47}$$

Míg Goodwin semmi többet nem mondott erről az egyenletről, most megmutatjuk, hogy az a (45) és (46) dinamikai rendszer Hamilton-függvénye, vagy másként, a megmaradó mennyiség.

7. A Goodwin-modell Lagrange- és Hamilton-függvénye

Könnyen belátható, hogy a (45) és (46) egyenletekkel leírt Goodwin-modell az önszabályozó foglalkoztatás-bér rendszer időbeni evolúciója a Lotka–Volterra-rendszer egy-egy leképezése, ekvivalenciája. A v foglalkoztatási ráta az x áldozatszámnak, a munkások teljes jövedelemből történő u részesedése pedig az y ragadozószámnak felel meg. Az ekvivalenciához a két modell megfelelő együtthatóinak is meg kell egyeznie, azaz a (45) és (46) valamint a (27a) és (27b) egyenletek megfelelő összahasonlításából kapjuk:

$$\begin{aligned}(1/\sigma)-(\alpha+\beta)&=a\\ 1/\sigma&=d\\ \alpha+\gamma&=b\\ \rho&=c.\end{aligned}$$

Ha most L' jelöli a Goodwin-modellhez tartozó Lagrange-függvényt, akkor ezt a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned}L'\left(v,\dot v,u,\dot u\right)&=\frac{1}{2}\frac{\ln u}{v}\dot v+\frac{1}{2}\frac{\ln v}{u}\dot u-\\ &-\left(\left((1/\sigma)-(\alpha+\beta)\right)\ln u+(\alpha+\gamma)\ln v-(1/\sigma)\,u-\rho v\right).\end{aligned}\tag{48}$$

Ha vesszük az L' Lagrange-függvény v és u szerinti Euler–Lagrange-egyenleteit, akkor a Goodwin-modell (45) és (46) egyenleteihez jutunk. Ezzel megmutattuk, hogy a Goodwin-modell is rendelkezik Lagrange-struktúrával.

A fentieket alkalmazva egyszerű számolással megyőződhetünk arról is, hogy a Goodwin-modell Hamilton-függvénye az alábbi:

$$H'=\dot v\frac{\partial L'}{\partial\dot v}+\dot u\frac{\partial L'}{\dot u}-L'=\left((1/\sigma)-(\alpha+\beta)\right)\ln u+(\alpha+\gamma)\ln v-(1/\sigma)\,u-\rho v\tag{49}$$

ami a megmaradó mennyiség, azaz az első integrál, ami megegyezik a (47) egyenlettel. Ha itt is vesszük az E' energiával történő mechanikai megfeleltetést, akkor az első integrált most a következő alakban is felírhatjuk:

$$I'\left(=e^{E'}\right)=\frac{v^{\alpha+\gamma}u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v+(1/\sigma)u}}.\tag{50}$$

8. A Goodwin-modell Lie-szimmetriái

Vegyük a modell állapotváltozóinak alábbi infinitezimális transzformációit:

$$v'=v+\zeta_1\left(v,u\right)\tag{51}$$

$$u'=u+\zeta_2\left(v,u\right)\tag{52}$$

$$t'=t,\tag{53}$$

ahol $\zeta_1\left(v,u\right)$ és $\zeta_2\left(v,u\right)$ függvények explicite nem függnek az időtől, azaz $\partial\zeta_1/\partial t=\partial\zeta_2/\partial t=0$. Most helyettesítsük be az (51) , (52) és (53) egyenleteket a

(45) és (46) egyenletekbe; átalakítások után a következő parciális differenciálegyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}(((1/\sigma)-(\alpha+\beta))\,v\;-(1/\sigma)\,uv)\,\frac{\partial\zeta_1}{\partial v}+(\rho vu-(\alpha+\gamma)\,u)\,\frac{\partial\zeta_1}{\partial u}+\\ +((1/\sigma)\,u-(1/\sigma)+(\alpha+\beta))\,\zeta_1+(1/\sigma)\,v\zeta_2=0,\end{aligned}\tag{54}$$

$$\begin{aligned}(((1/\sigma)-(\alpha+\beta))\,v-(1/\sigma)\,uv)\,\frac{\partial\zeta_2}{\partial v}+(\rho vu-(\alpha+\gamma)\,u)\,\frac{\partial\zeta_2}{\partial u}-\\ -\rho u\zeta_1+(\alpha+\gamma-\rho v)\,\zeta_2=0.\end{aligned}\tag{55}$$

Természetesen ismét két csatolt parciális differenciálegyenletet kaptunk, amelyek egy lehetséges partikuláris megoldása

$$\zeta_1=((1/\sigma)-(\alpha+\beta))\,v-(1/\sigma)\,uv,\tag{56}$$

$$\zeta_2=\rho vu-(\alpha+\gamma)\,u.\tag{57}$$

Ezeket felhasználva, a releváns generátort, vagyis a Lie-szimmetriavektort is felírhatjuk:

$$X_1'=(((1/\sigma)-(\alpha+\beta))\,v-(1/\sigma)\,uv)\,\frac{\partial}{\partial v}+(\rho vu-(\alpha+\gamma)\,u)\,\frac{\partial}{\partial u}\tag{58}$$

Az (54) és (55) egyenletek egy másik megoldását adják az alábbi egyenletek:

$$\zeta_1=\frac{v^{\alpha+\gamma}u^{1/\sigma-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v+1/\sigma}}\,((1/\sigma)-(\alpha+\beta)-(1/\sigma)\,u)\,v,\tag{59}$$

$$\zeta_2=\frac{v^{\alpha+\gamma}u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v+(1/\sigma)u}}\,(\rho v-(\alpha+\gamma))\,u.\tag{60}$$

Az infinitezimális generátor most a következőképpen adható meg:

$$\begin{aligned}X_2'=&\frac{v^{\alpha+\gamma}u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v+(1/\sigma)u}}\,((1/\sigma)\,v-(\alpha+\beta)-(1/\sigma)\,uv)\,\frac{\partial}{\partial v}\\ &+\frac{v^{\alpha+\gamma}u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v+(1/\sigma)u}}\,(\rho vu-(\alpha+\gamma)\,u)\,\frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned}\tag{61}$$

Ha egybevetjük az (58) és (61) egyenletekkel meghatározott generátorokat, akkor könnyen észrevehetjük, hogy

$$X_2'=\frac{v^{\alpha+\gamma}u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v+(1/\sigma)u}}X_1',\tag{62}$$

azaz a generátorok csak egy tényezőben különböznek. Minthogy a generátorok struktúrája most is megegyezik, a kérdéses

$$I'=\frac{v^{\alpha+\gamma}u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v+(1/\sigma)u}}\tag{63}$$

tényezőnek az állandó mozgásmennyiségnek kell lennie. Pontosan megegyezik a Lagrange-függvényből kapott megmaradó mennyiséggel, az (50) egyenletbeli összefüggéssel, ami a Goodwin-modell dinamikus szimmetriájára vonatkozik.

9. Következtetések

A Goodwin-modell a tőkefelhalmozás és a jövedelemelosztás közötti kölcsönös függőséget vizsgálja. Megoldásgörbéi választ adnak arra a kérdésre is, hogy a felhalmozás (növekedés) hogyan változik ciklikusan,

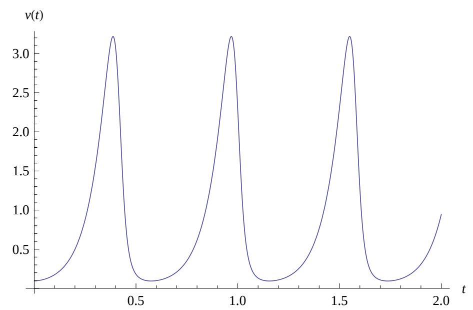
$$T = 2\pi / \left[(\alpha + \gamma)\left((1/\sigma) - (\alpha + \beta)\right)\right]^{1/2}$$

periódussal, az egyensúlyi pont[15] körül, amely a következő koordinátákat veszi fel:

$$\begin{aligned} u^* &= 1 - (\alpha + \beta)\,\sigma, \\ v^* &= (\alpha + \gamma)\,/\rho. \end{aligned}$$

A modellben szereplő paraméterek becsülhetők a megfelelő idősorokból ökonometriai eljárásokkal. E számítások egyúttal a modell valós adatokkal történő tesztelését is jelentik, amiről érdekes következtetések olvashatók Harvie (2000) tanulmányában[16].

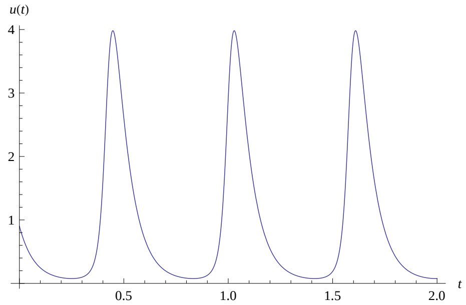
Az alábbi grafikonok a paraméterek következő megválasztásával készültek: $\alpha = 0.056$, $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.08$, $\gamma = 15$ és $\rho = 17$. A kezdeti értékek: $v(0) = 0.095$ és $u(0) = 0.9$.



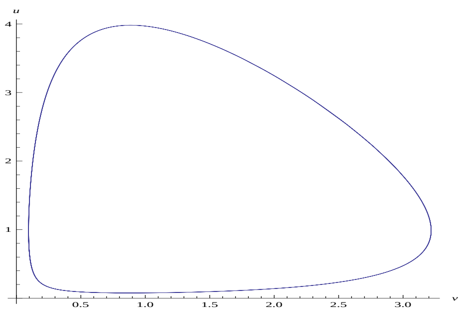
1. ábra. A v(t) időbeli periodikussága.

[15]Ez az ún. nem triviális egyensúlyi pont. A triviális egyensúlyi pont az origo, amely instabil nyeregpont, és ami most kívül esik vizsgálatainkon.

[16]Érdemes megjegyezni, hogy Bródy András és Farkas Miklós (1987) a magyar gazdaságra végeztek teszteléseket a Goodwin-modellel.



2. ábra. Az u(t) időbeli periodikussága.



3. ábra. Az u-v fázisportré.

A Goodwin-modell ciklikus pályái - amint bebizonyítottuk -, olyan extremális pályák a fázistérben, amelyek mentén a modell Lagrange-függvényének integrálja stacionárius, vagyis optimális a legkisebb hatás elve alapján. Ez az eredményünk jelentősen pontosítja az elsőrendű nem lineáris közönséges differenciálegyenletekkel (ODE) leírt rendszerek mozgáspályáinak eddigi jellemzését, amit általánosítva, kimondhatjuk: minden olyan dinamikai rendszer mozgáspályája optimális, aminek van Lagrange-függvénye.

Vizsgálatainkkal tehát kimutattuk, hogy ezt a ciklikus mozgást a modell Lie-szimmetriái, pontosabban a dinamikai szimmetriája generálja. A modell Lagrange-függvénye alapján kapott állandó mozgásmennyiség, az ún. első integrál eredményezi a belső szimmetriáját. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a Nöther-tétel a Goodwin-modell mechanikájában is szerepet kap.

Hivatkozások

[1] Almeida, M. A. and Moreira, I. C.: *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** 4567 (1992)

[2] Andronov, A. A., Vitt, A. A. and Khaikin, S. E.: *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, Oxford (1966)

[3] Baumann, G. and Freyberger, M.: *Generalized symmetries and conserved quantities of the Lotka-Volterra model*, Physics Letters A, Vol. **156**, No. **9**, (1991) 488–490. o.

[4] Bródy András és Farkas Miklós: *Forms of Economic Motion*, Acta Oeconomica **38**, (1987) 361–370. o.

[5] Budó Ágoston: *Mechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest (1965)

[6] Fernandez-Nuñez, J.: *Lagrangian Structure of the Two-Dimensional Lotka-Volterra System*, International Journal of Theoretical Physics, Vol. **37**, No. **9**, (1998) 2457–2462. o.

[7] Goodwin, H. R.: *A growth cycle*, in Feinstein, C. H. (ed.): Socialism, Capitalism and Economic Growth, Cambridge University Press, Cambridge (1967)

[8] Harvie, D.: *Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries*, Cambridge Journal of Economics, Vol. **24**, (2000) 349–376. o.

[9] Hydon, P. E.: *Symmetry Methods for Differential Eqations: A Beginner's Guide*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2000)

[10] Lotka, A. J.: *Elements of Mathematical (Physical) Biology*, New York, Dover Publication (1925)

[11] Lorenz, E.: *Deterministic non-period flows*, Journal of Atmospheric Sciences **20**, (1963) 130–141. o.

[12] Morandi, G., Ferrario, C., Lo Vecchio, G., and Rubano, C.: *Phys. Rep.* **188**, (1990) 147–284. o.

[13] Móczár József: *Fejezetek a modern közgazdaság-tudományból, Sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek, természettudományos közelítések*, Akadémiai Kiadó, Budapest (2008)

[14] Móczár József: *A fizikai matematika legújabb eredményei mint a közgazdaság-tudomány lehetséges vizsgálati eszközei*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **27**, No. **1**, (2010) 41–77. o.

[15] Nagy Károly: *Kvantummechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest. (1981)

[16] Nöther, E.: *Invariante Varitionsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, (1918) 235–257. o.

[17] Nutku, Y.: *Hamiltonian Structure of the Lotka-Volterra Equations*, Physics Letters A, Vol. **145**, No. **1**, (1990) 27–28. o.

[18] Sen, T. and M. Tabor: *Lie Symmetries of the Lorenz modell*, Physics D **44**, (1990) 313–339. o.

[19] Senthil Velan, M. and M. Laksmanan: *Lie symmetries and infinite dimensional Lie algebras of certain nonlinear dissipative systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, (1995) 1929–1942. o.

[20] VOLTERRA, V.: *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*, Gaithier-Villars, Paris (1931)

[21] WIGNER, E. P.: *Prog. Theor. Phys.* **11**, (1954) 437–440. o.

(Beérkezett: 2011. július 19.)

MÓCZÁR JÓZSEF
Budapesti Corvinus Egyetem
Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 8.
e-mail: jozsef.moczar@uni-corvinus.hu

MÁRKUS FERENC
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Fizika Tanszék
1521 Budapest, Budafoki út 8.
homepage: markusferi.tvn.hu

AN ECONOMIC APPLICATION OF THE LIE SYMMETRIES

JÓZSEF MÓCZÁR AND FERENC MÁRKUS

The dynamic behavior of a physical system can be frequently described very concisely by the least action principle. In the centre of its mathematical presentation is a specific function of coordinates and velocities, i.e., the Lagrangian. If the integral of the Lagrangian is stationary, then the system is moving along an extremal path through the phase space, and vice versa. It can be seen, that each Lie symmetry of a Lagrangian in general corresponds to a conserved quantity, and the conservation principle is explained by a variational symmetry related to a dynamic or geometrical symmetry. Briefly, that is the meaning of Noether's theorem.

This paper scrutinizes the substantial characteristics of Noether's theorem, interprets the Lie symmetries by PDE system and calculates the generators (symmetry vectors) on R. H. Goodwin's cyclical economic growth model. At first it will be shown that the Goodwin model also has a Lagrangian structure, therefore Noether's theorem can also be applied here. Then it is proved that the cyclical moving in his model derives from its Lie symmetries, i.e., its dynamic symmetry. All these proofs are based on the investigations of the less complicated Lotka – Volterra model and those are extended to Goodwin model, since both models are one-to-one maps of each other.

The main achievement of this paper is the following: Noether's theorem is also playing a crucial role in the mechanics of Goodwin model. It also means, that its cyclical moving is optimal. Generalizing this result, we can assert, that all dynamic systems' solutions described by first order nonlinear ODE system are optimal by the least action principle, if they have a Lagrangian.