Alkalmazott Matematikai Lapok **24** (2007), 13-35.

ÚJABB STATISZTIKAI VIZSGÁLATOK AZ ORNSTEIN-UHLENBECK FOLYAMATRÓL II. SZIMULÁCIÓ

FEGYVERNEKI SÁNDOR

A dolgozatban a stacionárius Gauss-Markov(Ornstein-Uhlenbeck) folyamat paramétereinek együttes vizsgálatával foglalkozom. Ezen folyamat esetén számos probléma adódik a maximum-likelihood becslések eloszlásának vizsgálatával és a paraméterekre adandó konfidenciaintervallumok meghatározásával, ha a csillapítási tényező tart nullához. A cikk célja annak bemutatása, hogy a „közel nemstacionárius" esetben a csillapítási tényezőre adott konfidencia-intervallum baloldali végpontja pozitív valószínűséggel a nulla.

1. Bevezetés

A dolgozatban a

$$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)dt + \sigma_w dw(t), \quad (E(\xi(t)) = E(w(t)) = 0)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet szimulációs vizsgálatával foglakozom, ahol $\lambda > 0$ és $\sigma_w > 0$. Továbbá a $\xi(t_0)$ normális eloszlású és független a $w(t)$ standard Wiener-folyamattól, ha $t > t_0$. Ezek a vizsgálatok a [7] cikkben leírt háttérre támaszkodnak, azt fejlesztem tovább. Ezenkívül az eredményeket szimuláció alkalmazásával is szemléletessé teszem.

Ezen dolgozat a [7] (I. rész) közvetlen folytatása és felépítése a következő: A szimuláció leírása. A maximum-likelihood becslések meghatározására megadott numerikus módszerek összehasonlítása. A közelítő modell esetén alkalmazott robusztus technika rövid leírása. A szimulációs eredmények összefoglalása, a tapasztalatok leírása, és annak bemutatása, hogy a „közel nemstacionárius" esetben a csillapítási tényezőre adott konfidencia-intervallum baloldali végpontja pozitív valószínűséggel a nulla.

A szimulációkban keletkezett adatokból, becslési eredményekből összesítő táblázatokat és grafikonokat készítettem, amelyek segítségével jobban látható a „közel nemstacionárius" eset, illetve az összes paraméter együttes becslésének különlegessége. Először felhívom a figyelmet néhány egyszerű tényre a $\kappa \to 0$ esetben. Ezenkívül leírom azokat a jelöléseket, amelyek előfordulnak a táblázatokban és ábrákban. Bemutatom a lényeges különbséget az ismert és ismeretlen várható érték (az m paraméter) eset között. Jól látható, hogy miért ad jó közelítést a λ_{01} becslés $\lambda \to 0$ esetén, ha m ismert, és milyen problémák adódnak, ha m ismeretlen.

2. A szimuláció

A

$$t = t'T, \qquad \xi = \xi' \sigma_w \sqrt{T}$$

leképezéssel az általános feladatot a $T = 1$ és $\sigma_w = 1$ esetre vezethetjük vissza, amikor is $\lambda' = \lambda T = \kappa$, azaz az időegység megválasztásától függetlenül ismert m esetén a folyamat realizációi egyetlen paraméterrel, a κ-val vannak jellemezve.

Ez a transzformáció a vizsgálatainkat lényegesen nem befolyásolja, hiszen a maximum-likelihood becslés meghatározásakor ([7]-ben (14)) a λ meghatározása esetén az m is adódik ([7]-ben (13)). Így vizsgálatainkat szimuláció során a λ becsléseinek meghatározására összpontosítjuk. Mivel a [7]-beli (14) egyenletben csak az m paramétertől független statisztikák fordulnak elő, ezért az egyszerűség kedvéért legyen $m = 0$ a szimuláció során. A vizsgálatok során az m értékét ismeretlennek tekintjük.

Legyen n a $[0, 1]$ intervallum beosztásainak a száma, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\xi\left(\frac{i}{n}\right) = \xi_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

$$\rho = e^{-\frac{\lambda}{n}}, \quad \sigma^2 = \frac{1-\rho^2}{2\lambda}.$$

Ekkor a szimuláció algoritmusa:

$$u = \Phi^{-1}(random), \quad \xi_0 = \frac{u}{\sqrt{2\lambda}},$$

$$\xi_{i+1} = \rho\xi_i + \sigma\Phi^{-1}(random), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

ahol a Φ^{-1} a standard normális eloszlásfüggvény inverzét jelöli, és a *random* függvény egy pszeudovéletlen számokat előállító generátor a $[0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásra.

A maximum-likelihood egyenletekben megjelenő statisztikák szimulációs megfelelői a következők:

$$m_1 = \frac{\xi_0 + \xi_n}{2},$$

$$m_2 = \frac{\sum_{k=0}^{n} \xi_k}{n+1},$$

$$s_1^2 = \frac{(\xi_n - \xi_0)^2}{4},$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{k=0}^{n} (\xi_k - m_2)^2}{n+1},$$

$$s_{01}^2 = \frac{\xi_0^2 + \xi_n^2}{2}.$$

A szakirodalomban a maximum-likelihood becsléseken kívül a következő becsléseket szokás vizsgálni:

$$\lambda_1 = \frac{0,5}{s_1^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{0,5}{s_2^2},$$

$$\lambda_{01} = \frac{0,5}{s_{01}^2}.$$

Megjegyzés. Ha egy jelölésben megjelenik a 0, akkor feltételezzük, hogy az m paraméter ismert, egyébként ismeretlen.

3. A numerikus megoldási módszerek összehasonlítása

A [7] cikkben a (11-12) egyenletrendszer megoldására javasoltuk a Newton-módszert, illetve az ún. „gyökös” módszert. A következő három táblázatban összefoglaltuk a két módszert jellemző – az iterációk számára és a végrehajtás idejére vonatkozó – adatokat. A táblázatokban 100 darab gyökmeghatározás átlagos adatai szerepelnek. Az iterációk leállítása 10^{-3}, 10^{-6}, illetve 10^{-9} hibakorlátnál történt. Az idő meghatározásához az algoritmusokat 10^5 alkalommal hajtottuk végre, így az idő mértékegysége 10^{-5} mp. Rövidítések: Gy.it.szám – a gyökös módszer átlagos iteráció száma, Gy.idő – a gyökös módszer átlagos ideje, N.it.szám – a Newton-módszer átlagos iteráció száma, N.idő – a Newton-módszer átlagos ideje.

A 3.4. táblázat azt mutatja, hogy $\lambda = 1$ esetén hogyan változnak az előbbi táblázatok mutatói, ha a minta nagysága változik. Jól látható, hogy nem lenne érdemes a vizsgálatainkat nagy mintaelemszámra elvégezni, hiszen az átlagos mutatók nagyságrendje nem változik.

Megjegyzés. A két módszer által adott gyökök eltérése mindig kisebb volt a hibakorlát felénél, így erre vonatkozóan nincs adat a táblázatokban. Miután a szimulációs eredmények azt mutatják, hogy a számítógépes implementációm esetén az ún. „gyökös" módszer gyorsabb, így a vizsgálatokban ezt használtam.

3.1. táblázat. A hibakorlát 10^{-3}.

λ	Gy.it.szám	Gy.idő	N.it.szám	N.idő
$0,000000001$	$3,40$	$0,405$	$9,04$	$1,335$
$0,000010000$	$3,64$	$0,435$	$6,85$	$1,162$
$0,010000000$	$3,38$	$0,406$	$8,21$	$1,271$
$0,100000000$	$3,36$	$0,404$	$8,41$	$1,284$
$0,500000000$	$3,35$	$0,407$	$8,50$	$1,287$
$1,000000000$	$3,26$	$0,401$	$8,60$	$1,293$
$2,000000000$	$3,42$	$0,416$	$9,04$	$1,328$
$5,000000000$	$3,15$	$0,385$	$10,81$	$1,459$
$10,000000000$	$2,84$	$0,346$	$12,10$	$1,559$
$50,000000000$	$2,23$	$0,280$	$13,00$	$1,625$
$100,000000000$	$2,01$	$0,257$	$13,00$	$1,626$
500.000000000	$2,00$	$0,258$	$13,00$	$1,626$
$1000,000000000$	$2,00$	$0,260$	$13,00$	$1,625$

3.2. táblázat. A hibakorlát 10^{-6}.

λ	Gy.it.szám	Gy.idő	N.it.szám	N.idő
$0,000000001$	$4,55$	$0,525$	$10,74$	$1,461$
$0,000010000$	$5,64$	$0,648$	$7,64$	$1,219$
$0,010000000$	$4,95$	$0,575$	$9,13$	$1,337$
$0,100000000$	$5,05$	$0,588$	$9,39$	$1,355$
$0,500000000$	$5,05$	$0,588$	$9,16$	$1,337$
$1,000000000$	$4,78$	$0,558$	$9,55$	$1,370$
$2,000000000$	$5,16$	$0,603$	$9,90$	$1,396$
$5,000000000$	$4,80$	$0,563$	$11,66$	$1,525$
$10,000000000$	$4,01$	$0,479$	$13,06$	$1,627$
$50,000000000$	$3,26$	$0,396$	$13,59$	$1,672$
$100,000000000$	$2,97$	$0,363$	$14,00$	$1,699$
$500,000000000$	$2,85$	$0,350$	$14,00$	$1,700$
$1000,000000000$	$2,65$	$0,324$	$14,00$	$1,700$

3.3. táblázat. A hibakorlát 10^{-9}.

λ	Gy.it.szám	Gy.idő	N.it.szám	N.idő
$0,000000001$	$5,86$	$0,670$	$11,37$	$1,511$
$0,000010000$	$7,69$	$0,872$	$8,15$	$1,261$
$0,010000000$	$6,83$	$0,778$	$9,50$	$1,363$
$0,100000000$	$6,47$	$0,742$	$10,16$	$1,410$
$0,500000000$	$6,84$	$0,786$	$9,93$	$1,396$
$1,000000000$	$6,57$	$0,752$	$10,62$	$1,448$
$2,000000000$	$7,12$	$0,815$	$10,64$	$1,447$
$5,000000000$	$6,21$	$0,719$	$12,28$	$1,571$
$10,000000000$	$5,34$	$0,624$	$13,69$	$1,676$
$50,000000000$	$4,02$	$0,478$	$14,00$	$1,699$
$100,000000000$	$3,61$	$0,434$	$14,00$	$1,701$
$500,000000000$	$3,12$	$0,380$	$14,00$	$1,699$
$1000,000000000$	$3,00$	$0,367$	$14,00$	$1,698$

3.4. táblázat.

Mintaszám	Gy.it.szám	Gy.idő	N.it.szám	N.idő
10	$6,60$	$0,754$	$9,30$	$1,350$
50	$6,48$	$0,742$	$9,78$	$1,382$
100	$6,57$	$0,752$	$10,62$	$1,448$
500	$6,69$	$0,765$	$9,83$	$1,390$
1000	$6,75$	$0,774$	$10,07$	$1,406$
5000	$6,90$	$0,789$	$10,02$	$1,403$

4. A modelleloszlás szerinti robusztus becslések

Ebben a szakaszban a témában elért eredményeimet foglaltam össze (l.[6]). Megadom az általam modelleloszlás szerinti robusztus becslésnek nevezett módszert és annak tulajdonságait.

Legyen adott egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ véletlen minta, amelynek elemei függetlenek, azonos eloszlásúak F eloszlásfüggvénnyel. Ezenkívül tudjuk, hogy a mintaelemek eloszlása az F_0 eloszlásfüggvénnyel reprezentált eloszlástípusba tartozik.

A feladat az, hogy a mintából megbecsüljük a μ, σ értékeket úgy, hogy az

$$F_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F(x)$$

egyenlőség teljesüljön.

Legyen a hely- és a skálaparaméterre felírt egyenletrendszer a következő:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F_0\left(\frac{\xi_i-\mu}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\right)=0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(F_0\left(\frac{\xi_i-\mu}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{12}\right)=0. \tag{2}$$

Tehát $\psi(x) = F_0(x) - 0,5$, és $\chi(x) = \psi^2(x) - \dfrac{1}{12}$. A jelölés a robusztus statisztikában szokásos (l. [9], [10], [12]).

4.1. Definíció. A (4.1-2) egyenletrendszer létező megoldását (jelölje azt T_n és s_n) a hely-, illetve skálaparaméter modelleloszlás szerinti becslésének (röviden (PT)-becslés) nevezzük.

4.1. Állítás. *Ha az F_0 eloszlásfüggvény differenciálható, szigorúan monoton növekvő és $F_0(0) = 0,5$, akkor a (4.1-2) egyenletrendszer megoldása egyértelműen létezik úgy, hogy $s_n > 0$. Továbbá, a (PT)-becslés B-, V- és kvalitatív robusztus, amelyre a katasztrófapontok*

$$\varepsilon^*(T_n) = \frac{\delta}{1+\delta} = 0,5, \quad \text{ahol} \quad \delta = \min\left\{-\frac{\psi(-\infty)}{\psi(+\infty)}, -\frac{\psi(+\infty)}{\psi(-\infty)}\right\}$$

és

$$\varepsilon^*(s_n) = \frac{-\chi(0)}{\chi(-\infty)-\chi(0)} = \frac{1}{3}.$$

Ezenkívül (T_n, s_n) együttes eloszlása aszimptotikusan normális, azaz

$$\sqrt{n}((T_n, s_n) - (\mu, \sigma)) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma),$$

ahol a kovariancia mátrix $\Sigma = C^{-1}S[C^{-1}]^T$.

$$C = \begin{pmatrix} E\left(\dfrac{\partial}{\partial\mu}\psi\left(\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\right)\right) & E\left(\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\psi\left(\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\right)\right) \\ E\left(\dfrac{\partial}{\partial\mu}\chi\left(\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\right)\right) & E\left(\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\chi\left(\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} E\left(\psi^2(\eta)\right) & E\left(\psi(\eta)\chi(\eta)\right) \\ E\left(\psi(\eta)\chi(\eta)\right) & E\left(\chi^2(\eta)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{12} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{180} \end{pmatrix}$$

ahol az η F_0 eloszlásfüggvényű.

Az állítás bizonyítását Huber [10] alapján készítettem.

A robusztus becslések többségét a szimmetrikus esetekre (a feltételezett sűrűségfüggvény szimmetrikus a helyparaméterre), illetve a normális eloszlás közelségére dolgozták ki. Az általam megadott módszer minden olyan esetben jól alkalmazható egy eloszlástípus hely- és skálaparaméterének meghatározására, amikor az eloszlástípus reprezentálható szigorúan monoton eloszlásfüggvénnyel, illetve jól megközelíthető ilyennel. A [6] cikkben számos alkalmazás mellett az egyenletrendszer megoldásához szükséges algoritmust is megadtam. Ezt használtam a szimulációk során a (PT)-becslések, illetve a nemcentrális χ_1^2-eloszlás paramétereinek maximum-likelihood becslésének a meghatározására is.

5. Aszimptotika, jelölések, táblázatok, konfidencia-intervallum

A szimuláció segítségével a következő kérdésköröket próbáljuk megvizsgálni.

1. Ismert m várható érték esetén a λ maximum-likelihood becslése, mely paramétertartományban lesz közel χ_1^2-, illetve normális eloszlású; és mikor kell használnunk az ún. egzakt eloszlásfüggvény táblázatokat (l. Arató, Benczúr [2], [3], Arató, Kuki, Szabó [4])? Továbbá, a maximum-likelihood becslés helyett mikor használható egyszerűbben meghatározható becslés?
2. Ha mind az m, mind a λ paraméter ismeretlen, akkor mit tudunk mondani az elégséges statisztikák, a maximum-likelihood becslések és a hozzájuk kötődő néhány – a szakirodalomban előforduló – egyszerű becslésről, különös tekintettel arra az esetre, amikor $\lambda \to 0$.
3. Az előző kérdéskörhöz kapcsolódik az a probléma, hogy mit tudunk mondani a paraméterekre felírt konfidencia-intervallumokról. Hogyan lehet érzékeltetni a $\lambda \to 0$ eset különlegességét, ha mind a három paraméter ismeretlen?

Az eddigi elméleti eredmények és szimulációs vizsgálatok alapján ismert, hogy még egyparaméteres esetben is vagy az aszimptotikus eloszlást ismerjük, vagy megfelelő számítógépes hátérrel megtudjuk adni az egzakt eloszlás közelítését. Továbbá néhány esetben az átlag, illetve a tapasztalati szórásnégyzet nem használható, mert nem létezik a várható érték. Ez indokolja, hogy a klasszikus módszerek (átlag, szórásnégyzet, maximum-likelihood becslés, kvantilis becslések) mellett más módszereket is alkalmazzunk, amelyek kevésbé érzékenyek az ún. kiugró értékekre, illetve arra, hogy a feltételezett modell csak közelíti a ténylegest. Ezért felhasználjuk a 4. szakaszban ismertetett (PT)-becsléseket. Előnye, hogy robusztus, a vizsgált esetekben egyértelműen léteznek a becslések, s a megadott algoritmussal rögtön meg is határozhatók. Jól kezeli a nemcentrális χ_1^2-eloszlás paramétereinek a meghatározását. Sőt a maximum-likelihood becslés is könnyen meghatározható a (PT)-becslésekhez megadott numerikus algoritmussal. A módszer stabilitásán kívül az is fontos volt, hogy a számolási és kerekítési hibákra kevésbé érzékeny. Ez különösen fontos az aszimptotikus esetben.

A szimuláció során tapasztaltak leírásához, illetve az elkészített táblázatok megértéséhez szükség van a következő jelölések, illetve jelölési alapelvek ismertetésére.

$\overline{\vartheta}$ – a ϑ statisztika átlaga.

$\sigma^{\star}_{\vartheta}$ – a ϑ statisztika korrigált tapasztalati szórása.

$\hat{\mu}_{\vartheta}(F)$ – a ϑ statisztikára vonatkozó helyparaméter maximum-likelihood becslése, ha a feltételezett eloszlástípus F.

$\hat{\sigma}_{\vartheta}(F)$ – a ϑ statisztikára vonatkozó skálaparaméter maximum-likelihood becslése, ha a feltételezett eloszlástípus F.

$T_{\vartheta}(F)$ – a ϑ statisztikára vonatkozó helyparaméter (PT)-becslése, ha a feltételezett eloszlástípus F.

$s_{\vartheta}(F)$ – a ϑ statisztikára vonatkozó skálaparaméter (PT)-becslése, ha a feltételezett eloszlástípus F.

Φ – a standard normális eloszlásfüggvény.

χ_1 – a χ_1^2 eloszlásfüggvény.

χ_1' – a nemcentrális χ_1^2 eloszlásfüggvény.

A táblázatokban lévő eredmények csak egy kis szeletét mutatják meg az összes szimulációnak, és csak néhány szempont szerinti kigyűjtést jelenítettem meg.

A táblázatok rövid leírása:

Az 5.1–4. táblázatok a λ maximum-likelihood becslésének, a λ_1, a λ_2 és a λ_{01} statisztikák eloszlásának a kvantilisbecsléseit tartalmazzák különböző λ paraméter értékeket feltételezve. A táblázatokban

$$P(\vartheta < z_{\lambda,p}) = p$$

értékek becslése található. A szimuláció során a $[0,1]$ intervallum beosztásainak száma $n = 100$. Ezután 1000 elemű rendezett minta készül a kvantilisek becslésére, majd mindez 100-szor megismétlődik, s ezek átlaga adja a táblázatokban szereplő számokat. A hibakorlát pedig $\varepsilon = 10^{-10}$.

Megjegyzés. Ha a beosztások számát és az egyes kvantilisekre vonatkozó mintaelemszámot növeltem, akkor a tendenciák nem változtak, viszont gyorsan nőtt a futási idő.

Az 5.6–12. táblázatok az m, m_1, m_2, λ, λ_1, λ_2 és λ_{01} paraméterek becsléseinek, illetve statisztikák eloszlásának megfelelő paraméterek becslésének összegzését tartalmazzák a fenti jelöléseket követve. Ezen táblázatok készítésekor a beosztások száma $n = 1000$, a mintaelemek száma szintén 1000 és a hibakorlát 10^{-10}.

A statisztikák eloszlásának leírását, illetve a megfelelő paraméterbecslések jellemzését kezdjük az egyszerűbb esetekkel.

Az 5.7. táblázat alapján is ugyanaz látható, mint amit az elméletből tudtunk, hogy kis λ esetén az m paraméter becsléseinek szórásnégyzete tart $+\infty$-hez. Viszont a ([7], 55. oldal) sorfejtésből jól látható, hogy

$$\lim_{\lambda\to 0} E((m_1 - m_2)^2) = \frac{1}{12},$$

azaz véges és a határeloszlása megadható ([7]-ben 3.1. Állítás) alapján.

Ha csak a csillapítási tényező ismeretlen, akkor ismert, hogy $\lambda \to 0$ esetén az elégséges statisztikák leírásához szükséges a χ_1^2-eloszlás. Hiszen a karakterisztikus függvényből az is látható, hogy $\lambda \to 0$ esetén s_{01}^2 és s_{02}^2 aszimptotikusan ekvivalensek, és $2\lambda s_{02}^2$ aszimptotikusan χ_1^2, ha $\lambda \to 0$. Már Striebel [15] alapján ismert volt, hogy „kis" λ esetén λ_{01} megfelelő becslés a λ paraméterre. A λ_{01}-re vonatkozó szimulációs eredmények (l. 5.4., 5.6. és 5.12. táblázatok) alátámasztják, hogy az eloszlás aszimptotikusan reciprok χ_1^2-eloszlás. A ([7], 3.1. Állítás) felbontás és a ([7], 52. oldal) alapján pedig látható, hogy az átlag és a korrigált tapasztalati szórás nem adhat jó eredményt. Ez azt mutatja, hogy az ezekből adódó konfidencia-intervallum rosszabb, mint a reciprok χ_1^2-eloszlás feltételezéséből kapott.

Megjegyzés. A [7]-beli 3.1. Állításban szereplő mennyiségek reciprokának közelítő táblázata és a sorfejtések –

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{és} \quad \rho = e^{-\lambda}$$

– megtalálhatóak az 5.5. táblázatban, illetve ([7], 55. oldal) formulákban.

Vizsgáljuk meg mennyiben különbözik ettől az az eset, amikor az m és a λ is ismeretlen. Alkalmazzuk a [7] 3. szakaszában leírtakat a szimuláció során vizsgált esetekben, azaz

$$\sigma_w = 1, \quad T = 1, \quad \xi_1 = \xi(0), \quad \xi_2 = \xi(T), \quad \sigma^2 = \frac{1}{2\lambda}, \quad \text{és} \quad \rho = e^{-\lambda}.$$

Hasonlítsuk össze ilyen értékek mellett a $\varphi(t_1, t_2)$ karakterisztikus függvényt az elégséges statisztikák $\psi(t_1, t_2, t_3, t_4)$ karakterisztikus függvényéből (l. [1], 185. oldal) adódó függvénnyel, amikor $t_3 = t_4 = 0$. Ekkor

$$\Lambda = \lambda \quad \text{és} \quad \psi(t_2, 0) = e^{\lambda}(2\lambda)^2 \left[\left(1 - it_2 \frac{1}{2\lambda}\right)^2 - i^2 t_2^2 \frac{1}{(2\lambda)^2} e^{-2\lambda} \right].$$

Ezeket felhasználva

$$\psi(t_1,t_2,0,0)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-it_2\frac{1}{2\lambda}\right)^2+t_2^2\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2e^{-2\lambda}}}\exp\left\{-\frac{t_1^2\frac{1}{2\lambda}(1+e^{\lambda})}{4e^{\lambda}\left(1-it_2\frac{1}{2\lambda}\right)(1+e^{-\lambda})}\right\},$$

ami pontosan megegyezik a $\varphi(t_1,t_2)$-ből adódó formulával.

Tehát a szimulációnál az s_1^2 statisztika χ_1^2-eloszlású. Továbbá a várható érték

$$\frac{\sigma^2(1-\rho)}{2}=\frac{1-e^{-\lambda}}{4\lambda}$$

és

$$\lim_{\lambda\to 0}E(s_1^2)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-e^{-\lambda}}{4\lambda}=\frac{1}{4}.$$

Tehát λ_1 reciprok χ_1^2-eloszlású, amelynek nem létezik a várható értéke (és így a szórása sem). Ez jól látható az 5.8-9. táblázatok alapján is.

Ezenkívül

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{2\lambda}{1-e^{-\lambda}}=2.$$

Az 5.1. és az 5.2. táblázatok segítségével összehasonlíthatjuk a kvantiliseket. A reciprok χ_1^2 kvantilisei, ha a skálaparaméter 2, azaz a ([7], 52. oldal) formula alapján $\sigma=2$ esetén.

(5.1)

p	0,01	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,99
$F^{-1}(p)$	0,3014	0,5206	0,739	4,396	126,6	508,6	12731,7

A λ_1 statisztikáról összegzésül elmondhatjuk, hogy reciprok χ_1^2-eloszlású, és a $\lambda<0,1$ esetek között a táblázatok alapján nem lehet különbséget tenni.

Az Arató [1], Arató, Benczúr [2], [3] munkák részletesen foglalkoznak a konfidencia-intervallum készítésével az m, illetve λ paraméterre. A következő részben azt mutatjuk be, hogy adott p valószínűség mellett mikor nem tudunk megadni olyan intervallumot, amelynek alsó határa különbözik a nullától, és benne van a λ valódi paraméter.

Ha mindkét paraméter ismeretlen, akkor jól látható a kvantilis becslések alapján, hogy kis λ paraméter esetén – a p valószínűség értékétől függően – nem tudunk a szimuláció segítségével nullától különböző alsó határú konfidencia-intervallumot adni (l. 5.1–3. táblázat). Például rögtön látható, hogy ha a szimulációnál $\lambda<0,1$, akkor

$$\lambda<z_{\lambda,\,0{,}01},$$

azaz a kvantilis becslések alapján kapott konfidencia-intervallumban nincs benne a paraméter.

Megvizsgáljuk, hogy ez mennyire adódhat az elméleti viselkedésből, illetve a számolási hibákból és a szimuláció „tökéletlenségéből".

Mivel $\hat{\lambda}$ és λ_2 becslések eloszlását nem tudtuk pontosan meghatározni, ezért kezdjük a λ_1 esettel. Az eloszlásfüggvény (l. [7], 52. oldal)

$$F(x)=2-2\Phi\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right),\quad \text{ha } x>0,$$

ahol
$$a = \frac{2\lambda}{1 - e^{-\lambda}}.$$
Mivel
$$\lim_{\lambda \to 0} a = 2,$$
így λ_1 kvantiliseit megadhatjuk $\lambda \to 0$ esetén (l. (5.1)). Látható, hogy a kvantilis becslések két értékes jegyre közelítik a kvantiliseket.

Ezután pontosan meghatározzuk, hogy rögzített p valószínűség esetén mely λ értékekre nincs benne az eloszlás kvantilisei alapján adott konfidencia-intervallumban.

Ha η reciprok χ_1^2-eloszlású, akkor legyen x_p olyan, hogy
$$P(\eta < x_p) = p.$$
Tehát a
$$p = 2 - 2\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{x_p}}\right),$$
azaz
$$x_p = \frac{1}{\left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right]^2}.$$
A λ_1 kvantiliseire használjuk a $z_{\lambda_1,p}$ jelölést, azaz
$$P(\lambda_1 < z_{\lambda_1,p}) = p.$$
Kérdés, mikor teljesül, hogy
$$\lambda < z_{\lambda_1,p},$$
azaz
$$\lambda < \frac{2\lambda}{1 - e^{-\lambda}} x_p = \frac{2\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \frac{1}{\left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right]^2}.$$
Jelölje u_p azt a λ értéket, amikor az előző egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül, azaz
$$u_p = -\ln\left(1 - \frac{1}{\left[\Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right]^2}\right).$$
Az egyenlet megoldása közben adódik, hogy csak
$$x_p < 0,5$$
esetén van ilyen λ, azaz ha
$$p < 0,157299.$$

A következő táblázat néhány ilyen értéket tartalmaz.

p	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,15$	$0,157299$	$0,16$	$0,20$
x_p	$0,1507$	$0,2603$	$0,3696$	$0,4825$	$0,4999995$	$0,5065$	$0,6088$
u_p	$0,3587$	$0,7353$	$1,344$	$3,356$	$13,8155$	–	–

A λ_1 statisztika eloszlása alapján elkészített u_p értékeket szemléletesen jól láthatjuk az 1. ábrán. Továbbá a 2–4. ábrák (az 5.1–3. táblázat) pedig a megfelelő kvantilis becslések alapján készültek. Az ábrák mindegyike tartalmazza a $p = 0,01,\ 0,05,\ 0,1,\ 0,5$ eseteket kiegészítve az $f(\lambda) = \lambda$ egyenessel, s így a metszéspontok megadják, hogy mely p érték esetén milyen λ-ra nincs a konfidencia-intervallumnak nullától különböző pozitív alsó határa. A 1–4. ábrák és az (5.2)-ben szereplő közelítő értékek azt mutatják, hogy az alsó határ a λ_1 alapján becsülhető a legtovább, azaz adott p valószínűségre ekkor a legkisebb az u_p értéke.

(5.2)

p	$0,01$	$0,05$	$0,1$
$u_{p,\hat{\lambda}}$	$0,4483$	$1,0941$	$2,0571$
u_{p,λ_1}	$0,3527$	$0,7325$	$1,3521$
u_{p,λ_2}	$0,9013$	$1,8399$	$3,0750$

Figyeljük meg, hogy a becsült u_{p,λ_1} értékek milyen jól közelítik a megfelelő elméleti értéket.

Megjegyzés. Az 1. ábra ezenkívül tartalmazza a $p = 0,15,\ 0,16,\ 0,2$ eseteket. Fontos feladat lehet a közelítő táblázatok megadása a kvantilisekre, hiszen még nagy λ esetén is erősen különböznek a becsült kvantilisek az ismert m esetben kiszámított értékektől (l. [4]).

Néhány további tapasztalat röviden.

1. A $\hat{\lambda}$ és λ_2 statisztikákról az 5.11. táblázat alapján: a táblázat a nemcentrális χ_1^2-eloszlás alapján adódó (PT)-becsléseket és a maximum-likelihood becsléseket adja meg. Látható, hogy nincs lényeges különbség a kétféle becslés között. Továbbá a helyparaméter négyzete jól közelíti a $z_{\lambda,\,0,5}$ értékét (5.1–2. táblázat), illetve megfigyelhető, hogy a skálaparaméter értéke gyakorlatilag a $(0,7, 0,9)$ intervallumban mozog. Gondoljuk végig, mit is jelent itt a skálaparaméter, és hogyan kaphatunk belőle konfidencia-intervallumot!
2. A táblázatok értékei – $\lambda \geq 100$ esetekben – jól mutatják, hogy az [1] könyvben leírt és jellemzett aszimptotikus normalitás teljesül, így a normális eloszlás (t-eloszlás) jól használható konfidencia-intervallumok készítésére.
3. A becslések szimulálásakor kiderült, hogy $\lambda \geq 100$ esetén az $n = 1000$ beosztás a $[0, 1]$ intervallumon kevés – a [7]-beli (5) formulával leírt módon – a σ_w^2 jó becsléséhez.
4. Az 5.6. és 5.12. táblázat magyarázatot adhat arra, hogy miért lehet jó becslés kis λ esetén λ_{01}.

5.1. táblázat. Kvantilisek λ maximum-likelihood becslésére.

$\lambda\backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,99
10^{-9}	0,350	0,644	0,938	3,542	10,233	13,013	19,528
10^{-7}	0,351	0,643	0,944	3,566	10,198	12,948	19,459
10^{-5}	0,349	0,641	0,936	3,556	10,190	12,947	19,198
10^{-3}	0,350	0,644	0,940	3,562	10,178	12,955	19,141
10^{-2}	0,352	0,654	0,947	3,570	10,142	12,910	19,167
0,1	0,37	0,68	0,99	3,64	10,30	13,10	19,52
0,5	0,46	0,83	1,17	3,90	10,30	12,93	18,73
1	0,58	1,05	1,46	4,42	11,28	14,05	20,51
2	0,89	1,52	2,02	5,29	12,27	15,11	21,67
5	2,15	3,21	3,97	8,16	15,86	18,91	25,59
10	4,87	6,55	7,64	13,14	22,06	25,32	32,56
20	11,34	13,90	15,53	23,03	34,06	37,97	46,19
50	32,99	37,98	40,89	53,08	69,04	74,44	85,58
100	71,63	79,56	84,12	103,17	127,51	135,69	151,97
1000	743,96	813,33	853,55	1016,82	1227,21	1298,12	1441,28

5.2. táblázat. Kvantilisek a λ_1 becslésre.

$\lambda\backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,99
10^{-9}	0,301	0,527	0,752	4,394	129,78	518,94	14806,46
10^{-7}	0,300	0,523	0,744	4,371	126,96	499,62	13539,76
10^{-5}	0,299	0,522	0,745	4,400	129,80	523,85	13952,99
10^{-3}	0,302	0,524	0,747	4,422	128,61	526,45	12872,36
10^{-2}	0,302	0,526	0,740	4,425	127,80	523,79	14880,24
0,1	0,311	0,544	0,773	4,641	134,62	535,21	14219,93
0,5	0,377	0,661	0,940	5,509	164,25	653,05	16243,21
1	0,473	0,815	1,163	6,879	197,90	827,69	21351,75
2	0,69	1,19	1,70	10,19	292,61	1189,92	32694,29
5	1,49	2,60	3,70	22,25	640,67	2674,51	70891,59
10	2,98	5,22	7,44	43,92	1230,69	4995,15	131177,72
20	6,02	10,50	14,86	87,93	2551,38	10004,34	260795,59

5.3. táblázat. Kvantilisek a λ_2 becslésre.

$\lambda\backslash p$	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,5$	$0,9$	$0,95$	$0,99$
10^{-9}	$0,661$	$1,067$	$1,429$	$4,146$	$10,802$	$13,599$	$20,114$
10^{-7}	$0,665$	$1,063$	$1,424$	$4,174$	$10,747$	$13,546$	$20,024$
10^{-5}	$0,656$	$1,068$	$1,422$	$4,160$	$10,755$	$13,520$	$19,795$
10^{-3}	$0,662$	$1,070$	$1,426$	$4,174$	$10,739$	$13,547$	$19,661$
10^{-2}	$0,670$	$1,084$	$1,434$	$4,182$	$10,720$	$13,499$	$19,659$
$0,1$	$0,689$	$1,112$	$1,479$	$4,251$	$10,871$	$13,691$	$20,058$
$0,5$	$0,797$	$1,262$	$1,657$	$4,528$	$11,223$	$13,920$	$20,484$
1	$0,927$	$1,472$	$1,918$	$4,965$	$11,783$	$14,553$	$20,963$
2	$1,25$	$1,91$	$2,43$	$5,74$	$12,76$	$15,61$	$22,18$
5	$2,46$	$3,48$	$4,23$	$8,47$	$16,24$	$19,24$	$25,98$
10	$5,04$	$6,73$	$7,81$	$13,30$	$22,26$	$25,55$	$32,86$
20	$11,40$	$13,96$	$15,62$	$23,14$	$34,18$	$38,07$	$46,33$
50	$33,04$	$38,06$	$40,91$	$53,13$	$69,09$	$74,46$	$85,65$
100	$71,69$	$79,57$	$84,18$	$103,17$	$127,51$	$135,66$	$151,94$
1000	743.58	$812,87$	$852,98$	$1017,18$	$1226,11$	$1295,18$	$1435,87$

5.4. táblázat. Kvantilisek a λ_{01} becslésre.

$\lambda\backslash p$	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,5$	$0,9$	$0,95$	$0,99$
10^{-7}	$1,5\ 10^{-8}$	$2,6\ 10^{-8}$	$3,7\ 10^{-8}$	$2,2\ 10^{-7}$	$6.3\ 10^{-6}$	$2,510^{-5}$	$6,610^{-4}$
10^{-5}	$1,5\ 10^{-6}$	$2,6\ 10^{-6}$	$3,7\ 10^{-6}$	$2,2\ 10^{-5}$	$6,3\ 10^{-4}$	$0,0025$	$0,069$
10^{-3}	$1,5\ 10^{-4}$	$0,000257$	$0,000368$	$0,00218$	$0,062$	$0,230$	$2,027$
10^{-2}	$0,0015$	$0,0026$	$0,0037$	$0,0218$	$0,475$	$1,175$	$7,067$
$0,1$	$0,015$	$0,026$	$0,038$	$0,207$	$2,05$	$4,40$	$24,06$
$0,5$	$0,089$	$0,149$	$0,206$	$0,83$	$5,9$	$12,2$	$61,1$
1	$0,197$	$0,319$	$0,426$	$1,50$	$9,9$	$20,2$	$102,1$
2	$0,421$	$0,657$	$0,861$	$2,90$	$19,2$	$39,4$	$202,4$
5	$1,07$	$1,65$	$2,16$	$7,20$	$48,1$	$99,1$	$506,4$
10	$2,14$	$3,33$	$4,36$	$14,42$	$93,6$	$189,8$	$1005,6$
20	$4,37$	$6,72$	$8,72$	$28,95$	$191,0$	$391,9$	$1997,5$

5.5. táblázat.

λ	$\dfrac{2\lambda}{1+e^{-\lambda}}$	$\dfrac{2\lambda}{1-e^{-\lambda}}$
10^{-9}	$1,000000050\ 10^{-9}$	$2,000000000$
10^{-7}	$1,000000050\ 10^{-7}$	$2,000000000$
10^{-5}	$1,000000050\ 10^{-5}$	$2,000000000$
10^{-3}	$1,000000050\ 10^{-3}$	$2,001000100$
10^{-2}	$0,0100499996$	$2,010016656$
$0,1$	$0,1049958375$	$2,101666388$
$0,5$	$0,6224593310$	$2,541494082$
1	$1,462117157$	$3,163953414$
2	$3,523188313$	$4,626070572$
5	$9,933071491$	$10,06783655$
10	$19,99909204$	$20,00090804$
20	$39,99999992$	$40,00000008$
50	$100,0000000$	$100,0000000$

5.6. táblázat.

λ	$\hat{\sigma}_\lambda(\chi_1)$	$\hat{\sigma}_{\lambda_1}(\chi_1)$	$\hat{\sigma}_{\lambda_2}(\chi_1)$	$\hat{\sigma}_{\lambda_{01}}(\chi_1)$
10^{-9}	$2,135$	$2,043$	$2,959$	$0,0000000010$
10^{-7}	$2,097$	$1,943$	$3,016$	$0,0000000943$
10^{-5}	$2,164$	$2,030$	$3,056$	$0,0000101994$
10^{-3}	$2,103$	$1,974$	$2,954$	$0,0009849837$
10^{-2}	$2,186$	$2,049$	$3,113$	$0,0097313111$
$0,1$	$2,193$	$2,086$	$3,049$	$0,1005394659$
$0,5$	$2,529$	$2,575$	$3,295$	$0,5116286765$
1	$2,908$	$3,041$	$3,666$	$0,9929536024$
2	$3,834$	$4,316$	$4,541$	$1,8876786443$
5	$7,096$	$10,096$	$7,573$	$5,0552630484$
10	$12,226$	$20,800$	$12,409$	$10,3854189384$
20	$22,232$	$39,762$	$22,327$	$20,4598142270$
50	$51,611$	$103,782$	$51,663$	$50,1775524064$
100	$101,920$	$191,048$	$101,949$	$99,0642703366$
500	$502,987$	$1014,469$	$502,982$	$504,0998428836$
1000	$1002,353$	$2072,311$	$1002,350$	$997,5608938731$

5.7. táblázat.

λ	$\bar{m}$	$\bar{m}_1$	$\bar{m}_2$
10^{-9}	$-328,184908$	$-328,193052$	$-328,179580$
10^{-7}	$-124,882695$	$-124,875595$	$-124,884553$
10^{-5}	$-12,932015$	$-12,938207$	$-12,929066$
10^{-3}	$0,287774$	$0,287226$	$0,292341$
10^{-2}	$-0,194302$	$-0,190979$	$-0,194236$
$0,1$	$-0,008145$	$-0,003466$	$-0,010227$
$0,5$	$0,017906$	$0,013327$	$0,022725$
1	$-0,011508$	$-0,003422$	$-0,018271$
2	$0,022027$	$0,026912$	$0,017645$
5	$0,003324$	$-0,000577$	$0,004392$
10	$0,004124$	$0,000694$	$0,004402$
20	$0,000170$	$-0,003358$	$0,000306$
50	$-0,000588$	$-0,004599$	$-0,000430$
100	$-0,000198$	$0,000607$	$-0,000213$
500	$-0,000046$	$-0,000067$	$-0,000046$
1000	$0,000030$	$0,000203$	$0,000030$

λ	$\sigma^\star_m$	$\sigma^\star_{m_1}$	$\sigma^\star_{m_2}$
10^{-9}	$22567,43198$	$22567,43439$	$22567,43164$
10^{-7}	$2297,54239$	$2297,54520$	$2297,54032$
10^{-5}	$221,19998$	$221,20621$	$221,20151$
10^{-3}	$22,53552$	$22,53430$	$22,53957$
10^{-2}	$7,16012$	$7,15200$	$7,16812$
$0,1$	$2,17374$	$2,17675$	$2,18135$
$0,5$	$0,88849$	$0,88528$	$0,90783$
1	$0,58614$	$0,58266$	$0,61386$
2	$0,36130$	$0,38529$	$0,37737$
5	$0,16718$	$0,22233$	$0,17751$
10	$0,09211$	$0,15534$	$0,09604$
20	$0,04809$	$0,10892$	$0,04914$
50	$0,01921$	$0,07162$	$0,01957$
100	$0,01002$	$0,04931$	$0,01007$
500	$0,00203$	$0,02234$	$0,00203$
1000	$0,00107$	$0,01612$	$0,00107$

5.8. táblázat.

λ	$\bar{\lambda}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
10^{-9}	$4,829$	$1655,893$	$5,406$
10^{-7}	$4,805$	$682,617$	$5,425$
10^{-5}	$4,843$	$1282,959$	$5,431$
10^{-3}	$4,740$	$1323934,599$	$5,333$
10^{-2}	$4,785$	$32208,582$	$5,438$
$0,1$	$4,820$	$262466,628$	$5,441$
$0,5$	$5,248$	$375323,002$	$5,781$
1	$5,405$	$1739,684$	$5,951$
2	$6,343$	$5025,983$	$6,852$
5	$9,469$	$108362,612$	$9,852$
10	$14,220$	$41366,754$	$14,466$
20	$24,407$	$609226,748$	$24,536$
50	$53,516$	$32001983,603$	$53,584$
100	$104,018$	$2476187,904$	$104,059$
500	$505,153$	$1098676,658$	$505,147$
1000	$1005,018$	$217378846,779$	$1005,021$

λ	$\sigma^\star_{\bar{\lambda}}$	$\sigma^\star_{\bar{\lambda}_1}$	$\sigma^\star_{\bar{\lambda}_2}$
10^{-9}	$4,063$	$20082,158$	$4,110$
10^{-7}	$4,232$	$10054,182$	$4,267$
10^{-5}	$4,257$	$15152,575$	$4,262$
10^{-3}	$4,243$	$41684574,454$	$4,304$
10^{-2}	$4,131$	$971400,455$	$4,217$
$0,1$	$4,058$	$7926294,253$	$4,147$
$0,5$	$4,446$	$11776567,945$	$4,523$
1	$4,103$	$25694,612$	$4,175$
2	$4,501$	$105546,579$	$4,507$
5	$5,071$	$3036950,518$	$5,156$
10	$5,647$	$1204364,109$	$5,755$
20	$7,404$	$13163793,573$	$7,489$
50	$10,177$	$1007331473,865$	$10,227$
100	$14,904$	$45309009,139$	$14,956$
500	$33,307$	$11879326,211$	$33,300$
1000	$51,668$	$6866120869,699$	$51,719$

5.9. táblázat.

λ	$T_\lambda(\Phi)$	$T_{\lambda_1}(\Phi)$	$T_{\lambda_2}(\Phi)$
10^{-9}	$4,259$	$11,174$	$4,865$
10^{-7}	$4,147$	$9,436$	$4,790$
10^{-5}	$4,212$	$9,718$	$4,812$
10^{-3}	$4,092$	$8,954$	$4,688$
10^{-2}	$4,189$	$10,761$	$4,846$
$0,1$	$4,243$	$10,281$	$4,867$
$0,5$	$4,553$	$13,203$	$5,084$
1	$4,871$	$15,532$	$5,416$
2	$5,742$	$20,859$	$6,257$
5	$8,930$	$64,093$	$9,316$
10	$13,714$	$97,204$	$13,952$
20	$23,997$	$207,109$	$24,105$
50	$53,098$	$515,933$	$53,152$
100	$103,536$	$996,798$	$103,569$
500	$504,262$	$5593,433$	$504,230$
1000	$1004,917$	$9652,539$	$1004,914$

λ	$s_\lambda(\Phi)$	$s_{\lambda_1}(\Phi)$	$s_{\lambda_2}(\Phi)$
10^{-9}	$3,429$	$15,987$	$3,545$
10^{-7}	$3,364$	$12,721$	$3,442$
10^{-5}	$3,372$	$13,604$	$3,395$
10^{-3}	$3,411$	$12,117$	$3,461$
10^{-2}	$3,253$	$15,249$	$3,335$
$0,1$	$3,333$	$14,144$	$3,412$
$0,5$	$3,364$	$18,111$	$3,435$
1	$3,455$	$21,386$	$3,534$
2	$3,689$	$28,462$	$3,739$
5	$4,510$	$93,469$	$4,595$
10	$5,227$	$138,000$	$5,284$
20	$7,216$	$298,171$	$7,301$
50	$10,326$	$714,436$	$10,356$
100	$14,951$	$1445,055$	$15,057$
500	$33,339$	$7703,103$	$33,348$
1000	$51,744$	$12940,382$	$51,791$

5.10. táblázat.

λ	$T_\lambda(\chi_1)$	$T_{\lambda_1}(\chi_1)$	$T_{\lambda_2}(\chi_1)$
10^{-9}	$1,197$	$-0,233$	$1,671$
10^{-7}	$1,136$	$0,034$	$1,720$
10^{-5}	$1,171$	$-0,056$	$1,780$
10^{-3}	$1,044$	$-0,003$	$1,596$
10^{-2}	$1,234$	$-0,183$	$1,857$
$0,1$	$1,217$	$-0,072$	$1,773$
$0,5$	$1,557$	$-0,103$	$2,019$
1	$1,700$	$-0,105$	$2,183$
2	$2,389$	$-0,063$	$2,866$
5	$4,847$	$-2,594$	$5,123$
10	$9,063$	$-0,639$	$9,261$
20	$17,416$	$-4,326$	$17,495$
50	$43,982$	$-1,905$	$44,002$
100	$90,321$	$-23,148$	$90,246$
500	$473,256$	$-67,535$	$473,207$
1000	$958,745$	$34,938$	$958,801$

λ	$s_\lambda(\chi_1)$	$s_{\lambda_1}(\chi_1)$	$s_{\lambda_2}(\chi_1)$
10^{-9}	$4,366$	$17,154$	$4,553$
10^{-7}	$4,311$	$14,074$	$4,407$
10^{-5}	$4,347$	$14,738$	$4,365$
10^{-3}	$4,326$	$13,885$	$4,408$
10^{-2}	$4,231$	$16,540$	$4,289$
10^{-2}	$4,231$	$16,540$	$4,289$
$0,1$	$4,330$	$15,853$	$4,439$
$0,5$	$4,354$	$20,611$	$4,460$
1	$4,543$	$23,639$	$4,637$
2	$4,845$	$31,804$	$4,910$
5	$5,880$	$99,852$	$6,034$
10	$6,710$	$145,942$	$6,818$
20	$9,489$	$319,960$	$9,526$
50	$13,073$	$780,823$	$13,112$
100	$19,066$	$1519,424$	$19,196$
500	$44,327$	$8638,175$	$44,338$
1000	$67,063$	$14877,598$	$66,981$

5.11. táblázat.

λ	$T_\lambda(\chi'_1)$	$T_{\lambda_2}(\chi'_1)$	$\hat{\mu}_\lambda(\chi'_1)$	$\hat{\mu}_{\lambda_2}(\chi'_1)$
10^{-9}	$1,969$	$2,125$	$2,016$	$2,172$
10^{-7}	$1,944$	$2,113$	$2,002$	$2,174$
10^{-5}	$1,960$	$2,121$	$2,014$	$2,178$
10^{-3}	$1,924$	$2,086$	$1,982$	$2,149$
10^{-2}	$1,960$	$2,131$	$2,010$	$2,185$
$0,1$	$1,971$	$2,133$	$2,018$	$2,183$
$0,5$	$2,056$	$2,188$	$2,117$	$2,252$
1	$2,130$	$2,261$	$2,173$	$2,306$
2	$2,330$	$2,443$	$2,378$	$2,493$
5	$2,938$	$3,003$	$2,975$	$3,040$
10	$3,669$	$3,701$	$3,701$	$3,732$
20	$4,870$	$4,880$	$4,884$	$4,896$
50	$7,269$	$7,272$	$7,282$	$7,287$
100	$10,161$	$10,163$	$10,173$	$10,174$
500	$22,449$	$22,448$	$22,463$	$22,463$
1000	$31,695$	$31,695$	$31,691$	$31,691$

λ	$s_\lambda(\chi'_1)$	$s_{\lambda_2}(\chi'_1)$	$\hat{\sigma}_\lambda(\chi'_1)$	$\hat{\sigma}_{\lambda_2}(\chi'_1)$
10^{-9}	$0,877$	$0,837$	$0,874$	$0,828$
10^{-7}	$0,873$	$0,818$	$0,893$	$0,835$
10^{-5}	$0,867$	$0,805$	$0,886$	$0,828$
10^{-3}	$0,891$	$0,829$	$0,900$	$0,843$
10^{-2}	$0,839$	$0,788$	$0,861$	$0,814$
$0,1$	$0,858$	$0,808$	$0,864$	$0,820$
$0,5$	$0,830$	$0,792$	$0,875$	$0,841$
1	$0,823$	$0,788$	$0,825$	$0,794$
2	$0,804$	$0,772$	$0,826$	$0,796$
5	$0,771$	$0,770$	$0,783$	$0,778$
10	$0,713$	$0,716$	$0,721$	$0,730$
20	$0,744$	$0,751$	$0,740$	$0,746$
50	$0,709$	$0,710$	$0,691$	$0,694$
100	$0,735$	$0,740$	$0,726$	$0,728$
500	$0,742$	$0,742$	$0,738$	$0,737$
1000	$0,816$	$0,817$	$0,815$	$0,816$

5.12. táblázat.

λ	$\bar{\lambda}_{01}$	$T_{\lambda_{01}}(\Phi)$	$T_{\lambda_{01}}(\chi_1)$
10^{-9}	$0,0000004520$	$0,0000000054$	$-0,0000000001$
10^{-7}	$0,0000206315$	$0,0000004505$	$0,0000000010$
10^{-5}	$0,0084782052$	$0,0000515889$	$-0,0000004706$
10^{-3}	$0,4909567321$	$0,0047249365$	$-0,0000103112$
10^{-2}	$0,3025506315$	$0,0542730904$	$-0,0006022251$
$0,1$	$2,9584553512$	$0,3849289055$	$0,0169395202$
$0,5$	$10,4419325260$	$1,2900696625$	$0,1684887499$
1	36.2512922522	2.1221856267	0.3786405268
2	$14,3667140500$	$4,0161238720$	$0,6984491780$
5	$49,1358446583$	$10,5848494511$	$1,8927356790$
10	$99,6942998767$	$19,2742707771$	$4,5206277313$
20	$125,0085749353$	$42,8741669071$	$7,6138634102$
50	$325,2563957839$	$100,7337506954$	$19,5956627102$
100	$681,3721028164$	$201,7760313855$	$36,6146373116$
500	$3722,7357327552$	$1145,2344179125$	$176,2835040404$
1000	$6485,1994744147$	$2121,9602044310$	$362,5585998907$

λ	$\sigma^{\star}_{\lambda_{01}}$	$s_{\lambda_{01}}(\Phi)$	$s_{\lambda_{01}}(\chi_1)$
10^{-9}	$0,0000053719$	$0,0000000075$	$0,0000000084$
10^{-7}	$0,0001826169$	$0,0000006132$	$0,0000006823$
10^{-5}	$0,1587709934$	$0,0000722464$	$0,0000776469$
10^{-3}	$12,9482311202$	$0,0065066266$	$0,0072211597$
10^{-2}	$1,4535034414$	$0,0759872892$	$0,0812450305$
$0,1$	$25,0832457455$	$0,4816070011$	$0,5534828201$
$0,5$	$162,6980331077$	$1,3592764498$	$1,7054502079$
1	$892,1995757717$	$2,1310300753$	$2,6408152358$
2	$106,7566467028$	$4,0301749968$	$5,0440818104$
5	$407,0417578934$	$10,6076036140$	$13,3237372965$
10	$1136,4993741364$	$17,4635387746$	$22,6917896410$
20	$736,1131006574$	$43,5090030614$	$52,9080790675$
50	$1774,9092015925$	$96,9639194568$	$125,3218112837$
100	$4405,5405647631$	$205,8868058566$	$253,1602663898$
500	$21689,9580049764$	$1182,0954998355$	$1462,9321527378$
1000	$33412,7201642518$	$2178,6256990969$	$2618,6756658016$

Hivatkozások

[1] Arató M.: *Linear stochastic systems with constant coefficients.* Springer-Verlag, Berlin, 1982

[2] Arató M. – Benczúr A.: *Some new results in the statistical investigation of elementary gaussian processes* in European meeting of statisticians. Budapest, 1972, (69–83.)

[3] Arató M. – Benczúr A.: *Szimulációs eredmények az elemi Gauss-folyamat paraméterei becslésének eloszlására.* MTA Számítástechnikai Központ Közlemények **8**, 1972, (3–34.)

[4] Arató M. – Kuki A. – Szabó A.: *Exact Distribution of Estimators of Parameters in Ornstein-Uhlenbeck Processes.* Computers Math. Applic. **31**, 1996, (45–54.)

[5] Cox D.D.: *Gaussian likelihood estimation for nearly nonstationary AR(1) processes.* Ann. Stat. **19**, 1991, (1129–1142.)

[6] Fegyverneki S.: *A special joint estimation of location and scale with applications.* Publ. Univ. of Miskolc, Series D. Natural Sciences, Mathematics, **39**, 1999 (21-27.)

[7] Fegyverneki S.: *Újabb statisztikai vizsgálatok az Ornstein-Uhlenbeck folyamatról I. Elméleti háttér.* Alkalmazott Matematikai Lapok **23**, 2006, (39-57.)

[8] Guirguis G. H.: *A rational approximation of the inverse normal probability function.* Comp. Statist. & Data Anal. **11**, 1991, (199-201.)

[9] Hampel F. R. – Ronchetti E. M. – Rousseeuw P. J. – Stahel W. A.: *Robust statistics: the approach based on influence functions.* Wiley, New York, 1986

[10] Huber P. J.: *Robust statistics.* Wiley, New York, 1981

[11] Kálovics F.: *A continuation method for Chebyshev approximation.* Publ. Univ. of Miskolc, Series D. Natural Sciences **36**, 1995, (33-40.)

[12] Kerékfy P.: *A robusztus becslésekről.* Alk. Mat. Lapok **4**, 1978, (327-357.)

[13] Kormos J.: *Hypothesis testing for nearly nonstationary autoregressive models.* Computers Math. Applic. **19**, 1990, (75-82.)

[14] Pap Gy. – van Zuijlen M. C. A.: *Parameter estimation with exact distribution for multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes.* J. Multivariate Analysis **59**, 1996 (153-165.)

[15] Striebel C. T.: *Densities for stochastic processes.* Ann. Math. Stat. **30**, 1959, (559-667.)

(Beérkezett: 2001. május 15.)

FEGYVERNEKI SÁNDOR
MISKOLCI EGYETEM, MATEMATIKAI INTÉZET
3515 MISKOLC, MISKOLC-EGYETEMVÁROS
matfs@gold.uni-miskolc.hu

NEW STATISTICAL INVESTIGATIONS OF ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS II. SIMULATION

Sándor Fegyverneki

An asymptotic analysis is presented for estimation in the three-parameter Ornstein-Uhlenbeck process, where the parameters are the local mean, the drift and the variance. We are interested in the case when the damping parameter (λ, or $\lambda T = \kappa$) is nearly zero. The asymptotic sufficient statistics can be related to noncentral χ_1^2 distribution. The maximum likelihood estimate of the parameter vector is a solution of a rather complicated system of equations. We describe the methods for solving maximum-likelihood equations. Classical and robust estimators are determined for parameters. It is shown that the lower confidence limit of the drift (or damping) parameter is equal to zero with positive probability when it is near to zero.