

## TARTÁLYMÉRETEZÉSI PROBLÉMÁK VIZSGÁLATÁNAK MATEMATIKAI HÁTTERE SZTOCHASZTIKUS MŰKÖDÉSI FELTÉTELEK ESETÉN

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA, LAKATOS G. BÉLA ÉS MIHÁLYKÓ CSABA

Különböző termelési rendszerekben gyakori közbülső tárolók alkalmazása. Sztochasztikus működési feltételek esetén gyakran felmerülő probléma a tároló méretének adott megbízhatósági szint mellett meghatározása, illetve a szükséges kezdő anyagmennyiség megadása. Ebben a cikkben a gyakorlati feladat megoldásának matematikai aspektusaival, a megbízhatóságot megadó függvények elemzésével, az őket jellemző egyenletek analitikus és numerikus megoldásával, valamint a vizsgált függvények approximációjával foglalkozunk.

### 1. Bevezetés

A különböző műszaki rendszerek megvalósításánál gyakran alkalmazott eljárás közbülső tárolók használata. Könnyen elképzelhető ez egy vegyipari gyárnál, ahol egy tartályban gyűjtik a megtermelt anyagot, és ebből a tartályból veszik ki a felhasználás esetén. A gyűjtés oka lehet az eltérő ütemű termelés és felhasználás, de például okot adhat erre az is, hogy meghibásodások esetén is legyen felhasználható anyag a raktáron. A cél a tartály megfelelő méretének a meghatározása annak érdekében, hogy a tartályból ne csorduljon túl az anyag, valamint annak a kezdő anyagmennyiségnek a megadása, amelynek rendelkezésre kell állnia a kezdő időpillanatban annak érdekében, hogy a termelés ne akadjon el anyagihiány folytán.

Hasonló tárolóként működik egy biztosítótársaság pénztára, illetve szennyvíztisztításnál az ülepítő tartály is. Előbbi esetben a kérdés a megfelelő kezdő tőke meghatározása, utóbbinál pedig például a megfelelő tartályméret megadása mellett annak a kezdő vízszintnek a meghatározása is lehet feladat, amely mellett még a mikroorganizmusok megfelelő működése biztosítható. Ezekből a példákból látható, hogy az általunk felvetett problémák és kérdések más aspektusban is előfordulnak.

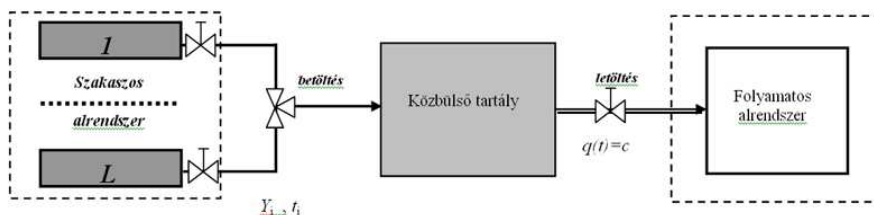
Ha a tároló probléma eredeti megfogalmazásához visszatérünk, akkor az anyagot termelő és tartályba töltő egységeket betöltő egységeknek, az anyagot a tartályból letöltő és azt felhasználó egységeket felhasználó egységeknek szokták nevezni. Mind a betöltő, mind a felhasználó egységek működése többféle lehet. Ipari rendszerek esetén megkülönböztetnek szakaszos, illetve folyamatos működésű egységeket. Más megközelítésben az egységek működése lehet determinisztikus, illetve

stochasztikus. Szakaszos működésű betöltő és szakaszos működésű felhasználó alrendszerek közbülső tartállyal történő összekapcsolásának vizsgálatát tartalmazza determinisztikus működési feltételek esetén [4, 17]. Determinisztikus betöltések és felhasználások esetén véletlen meghibásodások feltételezésével dolgozott ki modellt Lee és Reklaitis [6, 7], valamint Odi és Karimi [9, 10], továbbá Orbán-Mihálykó és Lakatos [11]. Szakaszos betöltésű és folyamatos anyag felhasználású alrendszerek működésének modelljei szerepelnek a [12, 13] publikációkban. Jelen publikációban a szakaszos betöltésű és folyamatos letöltésű alrendszerek összekapcsolásával és főleg a feladat megoldása közben felmerült problémák matematikai aspektusai-val foglalkozunk.

## 2. A vizsgált modell: alapvető jelölések és feltételezések

A közbülső tartályba a megtermelt anyagot a betöltési alrendszert alkotó betöltési egységek töltik be. Ezek nem működnek állandóan. Az  $i$ -edik betöltés a tartályba a  $t_i$  időpillanatban történik. A betöltés ideje rövid, ezt elhanyagoljuk, azaz pillanatszerű betöltésekkel dolgozunk. Az egyes betöltések közt eltelt időt egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változóknak tekintjük, amelyek eloszlásfüggvénye  $F(x)$ , sűrűségfüggvénye  $f(x)$ . Jelölje  $\mu_F$  a közös várható értéket és  $\sigma_F$  a közös szórást. Jelölje  $N(t)$  a  $t$  ideig történő betöltések számát. Az  $i$ -edik betöltés esetén a tartályba betöltött anyagmennyiség szintén véletlen nagyságú, ezt a folytonos eloszlású  $Y_i$  valószínűségi változó adja meg. Az  $Y_i$  valószínűségi változókról feltételezzük, hogy nemnegatív értékűek, egymástól függetlenek, azonos eloszlásúak  $G(y)$  eloszlásfüggvénnyel,  $g(y)$  sűrűségfüggvénnyel,  $\mu_G$  várható értékkel és  $\sigma_G$  szórással. Feltételezzük továbbá, hogy az  $N(t)$  betöltési folyamat és  $Y_i$  egymástól függetlenek. A letöltési folyamatot folytonos műveletnek tekintjük állandó  $c$  intenzitással. Célunk a tartály megfelelő méretezése, azaz annak a tartályméretnek a megadása, amely elegendő ahhoz, hogy a tartályba beleférjen a betöltő egységek által megtermelt anyag, valamint a kezdő anyagmennyiség megadása, azaz annak az anyagmennyiségnek a meghatározása, amelynek rendelkezésre kell állnia a  $t = 0$  időpillanatban annak érdekében, hogy a tartályban mindig legyen a felhasználó egységek számára elegendő anyagmennyiség.

Az általunk vizsgált modell hasonló a Prékopa-Ziermann-modellhez [2], amelynek vizsgálata során az a kérdés, hogy mennyi az a minimális kezdő anyagmennyiség, amellyel a folyamatos működés biztosítható, ha a szállítmányok véletlen időpontokban érkeznek és véletlen vagy állandó anyagmennyiséget szállítanak. Modelünk és a Prékopa-Ziermann-modell közti alapvető különbség az, hogy jelen esetben nem meghatározott számú, hanem véletlen számú betöltés történik (szállítmány érkezik) a  $[0, T]$  intervallumon, és a megoldási mód is különbözik az általuk kidolgozott megoldástól. A megfelelő tartályméret meghatározásának problémája pedig biztosítási problémákkal hozható kapcsolatba. Az ott alkalmazott eljárást használ-



1. ábra. A termelési rendszer sematikus vázlata

juk a megoldás során. A konkrét megfeleltetéseket és a felhasznált eredményeket a megfelelő helyeken részletezzük.

A szükséges kezdő anyagmennyiség és a szükséges tartályméret meghatározásához a közbülső tartályban levő anyag mennyiségének változását vizsgáljuk az időben.

A tartályban az anyagmennyiség-változás két dologból tevődik össze: a beáramló anyagmennyiségből és a tartályból letöltött anyagmennyiségből. Mivel a betöltött anyagmennyiséget a

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

összeg adja meg, a letöltött anyagmennyiséget pedig a  $h(t) = ct$  függvény, ezért a két függvény különbsége, vagyis

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct$$

éppen a  $t = 0$  időpontbeli tartályban levő anyagmennyiséghez viszonyított anyagmennyiség-változás. Ha ehhez a függvényhez hozzáadjuk a  $t = 0$  időpontban a tartályban levő anyagmennyiséget, akkor a tartályban levő anyagmennyiséget leíró függvényhez jutunk. Jelöljük  $z_0$ -al a kezdő anyagmennyiséget! Ahhoz, hogy soha ne fogyjon ki a tartályból az anyag, szükséges, hogy

$$z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \geq 0 \quad (1)$$

egyenlőtlenség teljesüljön minden nemnegatív  $t$  értékre, vagy ha rögzített  $T$  ideig vizsgáljuk a folyamatot, akkor minden  $0 \leq t \leq T$  esetén. Ahhoz, hogy a közbülső tartály mérete ( $z_1$ ) elegendő legyen, szükséges, hogy

$$z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \leq z_1 \quad (2)$$

teljesüljön minden nemnegatív  $t$  értékre a vizsgált  $[0, T]$  időintervallumon. Mivel azonban az anyagmennyiség-változás egy sztochasztikus folyamat, ezért az (1) és (2) egyenlőtlenségek a folyamat minden realizációja során nem, csupán valamilyen valószínűséggel (megbízhatósággal) teljesülnek. Vezessük hát be azokat a megbízhatóságokat leíró függvényeket, amelyek a tartálméret és a kezdő anyagmennyiség különbségének, illetve a kezdő anyagmennyiségnek a függvényében megadják annak a valószínűségét, hogy a tartályból nem fog túlsordulni az anyag, illetve, hogy mindig rendelkezésre áll elegendő anyag az anyagot felhasználó egységek számára! Definiáljuk az  $R_1 : R^2 \rightarrow R$  függvényt az alábbi módon:

$$R_1(z, T) = P \left( \left\{ 0 \leq z - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + ct, \quad \forall t : 0 \leq t \leq T \right\} \right), \quad (3)$$

azaz a  $z$  méretű tartályban az anyagmennyiség-változás  $T$  ideig nem haladja meg a tartály méretét (azaz a kezdő anyagmennyiséggel növelt tartálméret esetén nincsen már túlsordulás), valamint legyen  $R_2 : R^2 \rightarrow R$  az alábbi módon definiálva:

$$R_2(z, T) = P \left( \left\{ 0 \leq z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct, \quad \forall t : 0 \leq t \leq T \right\} \right) \quad (4)$$

ami annak a valószínűségét fejezi ki, hogy a  $[0, T]$  időintervallumon nem fogy el az anyag a közbülső tartályból.

Megjegyezzük, hogy a (3) összefüggés a (2) átrendezéséből a  $z = z_1 - z_0$  bevezetése után adódik. A tartálméretezési és a kezdő anyagmennyiség meghatározási problémát a véges időintervallumon vizsgáljuk. Rögzített  $T$  esetén az anyagmennyiség változáshoz szükséges hely megadását az  $1 - \alpha$  megbízhatósági szinten az  $R_1$  függvény inverzének meghatározása jelenti az  $1 - \alpha$  helyen, a megfelelő kezdő anyagmennyiség az  $1 - \alpha$  megbízhatósági szinten pedig az  $R_2$  függvény inverzének értéke az  $1 - \alpha$  helyen. A gyakorlati problémánál a szükséges tartálméret az  $1 - 2\alpha$  megbízhatósági szinten nem nagyobb, mint az előbbi két érték összege.

### 3. A megbízhatóságot megadó függvények vizsgálata

A megbízhatóságot megadó (3) függvény a biztosítási matematikában felmerülő klasszikus tönkremenési probléma vizsgálatokor tanulmányozott függvény. Igaz, hogy a biztosítási probléma megoldása során a befolyt pénz növeli a tárolóban (pénztárban) levő anyagmennyiséget (pénzt), s ez lineáris függvénye az időnek, míg a kifizetések véletlen időpontban történnek és véletlen nagyságúak, mégis a pénztárban levő pénz mennyiségének változása, valamint a kezdő tőkemennyiség meghatározása átrendezés után egy az egyben megfelel az általunk megfelelő tartálméret meghatározásaként aposztrofált feladatnak. A kezdő anyagmennyiség

meghatározási probléma megfelelőjével azonban nem találkoztunk az irodalomban. A probléma megoldásának módjában a biztosítási matematikában járt utat próbáljuk követni: integrálegyenletet állítunk fel a (4)-ben bevezetett megbízhatóságot megadó függvényre, s próbáljuk megkeresni ennek analitikus vagy numerikus megoldását.

### 3.1. Integrálegyenletek a megbízhatóságot megadó függvényekre

Az általunk bevezetett  $R_1(z, T)$  függvényre felírható integrálegyenlet megtalálható Thorin [18] cikkében, ezért ezzel az egyenlettel nem foglalkozunk. Jelen cikkünkben főleg az  $R_2(z, T)$  függvénnyel és határértékének vizsgálatával foglalkozunk.

Az  $R_2(z, T)$  függvényre igazak az alábbi állítások:

#### 3.1. ÁLLÍTÁS.

- $R_2(z, T)$  rögzített  $T$  esetén monoton növekvő függvénye a  $z$ -nek és rögzített  $z$  esetén monoton fogyó függvénye  $T$ -nek.
- $R_2(z, T) = 0$ , ha  $z \leq 0$  vagy  $T \leq 0$ .
- Bárhogyan választjuk is a paramétereket,  $R_2(z, T)$  bármely  $z > 0$  és  $T > 0$  esetén kielégíti az alábbi integrálegyenletet:

$$R_2(z, T) = \int_0^{\frac{z}{c}} \int_0^{\infty} R_2(z + y - c\tau, T - \tau) f(\tau) g(y) d\tau dy + (1 - F(T)) \cdot 1_{\{z \geq cT\}}, \quad (5)$$

ahol  $1_A$  1 értéket vesz fel, ha az indexben levő esemény bekövetkezik és 0 értéket, ha az esemény nem következik be.

- Bármely paraméterválasztás esetén rögzített  $T$  mellett, ha  $z \rightarrow \infty$ , akkor  $R_2(z, T) \rightarrow 1$ .

*Bizonyítás.* Az állítás a), b) és d) részei könnyen láthatók. A c) rész bizonyítására a teljes valószínűség tételét alkalmazhatjuk. Tekintsük az első betöltés időpontját, jelöljük ezt  $\tau$ -val.

Ekkor három eset fordulhat elő.

- $\tau \geq T$ . Amennyiben  $z \geq cT$ , akkor  $T$  időpontig

$$0 \leq z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct, \quad t \in [0, T]$$

biztosan teljesül, mivel

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = 0 \quad t \in [0, T],$$

ha viszont  $z < cT$ , akkor biztosan

$$z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct < 0 \quad \text{valamely } t \in [0, T] \text{-re.}$$

2. Ha  $\tau < T$  és  $z - c\tau < 0$ , akkor  $z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct < 0$  valamely  $t \in [0, \tau]$ -ra, tehát

$$P \left( 0 \leq z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \quad \forall t \in [0, T] \right) = 0.$$

3. Ha  $\tau < T$  és  $z - c\tau \geq 0$ , valamint az első betöltés mennyisége  $Y_1 = y$  akkor az első betöltés időpontjában megújul a folyamat, hiszen felújítási folyamat az  $N(t)$ , vagyis a  $T - \tau$  időintervallumon kell teljesülnie a

$$0 \leq z + y - c\tau + \sum_{i=2}^{N(t)} Y_i - ct$$

feltételnek. Ez utóbbinak a feltételes valószínűsége  $R_2(z + y - c\tau, T - \tau)$ . Alkalmazva a teljes valószínűség tételét az első betöltés időpontjára és a betöltött anyagmennyiség értékére, kapjuk a bizonyítandó integrálegyenletet.  $\square$

Mivel a (5) egyenletet analitikusan nem tudjuk megoldani, fordítsuk figyelmünket arra a problémára, amely akkor vetődik fel, ha azt szeretnénk, hogy a tartályból az anyagmennyiség soha ne fogyjon ki. Mivel ez az előbbi  $R_2(z, T)$  határértéke  $T \rightarrow \infty$  esetén, ezért amennyiben ismernénk a határértéket, visszakövetkeztethetnénk nagy  $T$  értékek esetén az  $R_2(z, T)$ -re is. Vezessük hát be az alábbi függvényt, amely a tartályban levő kezdő anyagmennyiség függvényében megadja annak a valószínűségét, hogy mindig áll rendelkezésre anyag a felhasználó számára. Legyen  $R_2 : R \rightarrow R$

$$R_2(z) = P \left( \left\{ 0 \leq z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct, \quad t \geq 0 \right\} \right). \quad (6)$$

A következő állítások igazak az  $R_2$  függvényre:

### 3.2. ÁLLÍTÁS.

a)  $R_2(z)$  monoton növekvő függvénye  $z$ -nek,  $R_2(0) = 0$ , továbbá minden nemnegatív  $z$  érték esetén  $R_2(z)$  kielégíti az alábbi integrálegyenletet:

$$R_2(z) = \int_0^{\frac{z}{c}} \int_0^{\infty} R_2(z - c\tau + y) f(\tau) g(y) d\tau dy. \quad (7)$$

Negatív  $z$  esetén  $R_2(z) = 0$ .

- b) Ha  $\frac{\mu_G}{c\mu_F} \leq 1$ , akkor  $R_2(z) = 0$  bármely valós  $z$  érték esetén. Ha  $\frac{\mu_G}{c\mu_F} > 1$ , akkor  $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2(z) = 1$ .

*Bizonyítás.* Az a) rész bizonyítása hasonlóan történhet a 3.1. állításbeli bizonyításhoz azzal a megjegyzéssel, hogy az első betöltés időpontjára alkalmazva a teljes valószínűség tételét a folyamat megújul. A b) rész indoklásakor vegyük figyelembe, hogy a tartályban levő anyagmennyiségre igazak az alábbiak:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left( \frac{z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct}{t} \right) = \frac{\mu_G}{\mu_F} - c,$$

továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D \left( z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \right) = \infty.$$

Tehát ha  $\frac{\mu_G}{c\mu_F} < 1$ , akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left( z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \right) = -\infty,$$

tehát a nagy számok törvénye szerint

$$z_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct$$

értéke 1 valószínűséggel előbb-utóbb negatív lesz. Ha viszont  $\frac{\mu_G}{c\mu_F} = 1$ , akkor a Chung-Fuchs-tétel miatt [3] (mivel a szórás végtelenbe tart) 1 valószínűséggel bármilyen nagy, illetve kis értéket felvesz. Ha  $\frac{\mu_G}{c\mu_F} > 1$ , akkor

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \rightarrow \infty$$

1 valószínűséggel, emiatt  $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2(z) = 1$ . □

*Megjegyzés.* Ha az  $N(t)$  folyamat Poisson-folyamat  $\lambda = \frac{1}{\mu_F}$  paraméterrel, akkor a (7) egyenlet az alábbi formában írható:

$$R_2(z) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} R_2(z - c\tau + y) \lambda \cdot e^{-\lambda\tau} g(y) d\tau dy. \quad (8)$$

### 3.2. Poisson-folyamattal megadott betöltési folyamat esete

3.3. ÁLLÍTÁS. Legyen a betöltési folyamat Poisson-folyamat  $\lambda = \frac{1}{\mu_F}$  paraméterrel. Ekkor a (8) egyenlet az alábbi integrálegyenletté alakítható:

$$R_2(z) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (R_2(z+y) - R_2(y))(1 - G(y))dy, \quad z > 0. \quad (9)$$

*Bizonyítás.* Helyettesítsük a  $t = z - c\tau$  kifejezést a (8) formulába. Ekkor láthatjuk, hogy

$$R_2(z) = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \int_0^z R_2(z+y) \lambda \cdot e^{-\lambda \frac{z}{c}} \cdot e^{\lambda \frac{t}{c}} dt dG(y).$$

Szorozzuk meg  $e^{\lambda \frac{z}{c}}$ -vel az egyenlet mindkét oldalát, majd deriváljuk  $z$  szerint őket. A deriválás elvégezhető, mert  $R_2(z)$  egy folytonos függvény integrálja, ezért deriválható. Deriválás után azt kapjuk, hogy

$$e^{\lambda \frac{z}{c}} \cdot \left( R_2'(z) + \frac{\lambda}{c} R_2(z) \right) = \frac{\lambda}{c} \cdot e^{\lambda \frac{z}{c}} \cdot \int_0^{\infty} R_2(t+y) dG(y).$$

Egyszerűsítve  $e^{\lambda \frac{z}{c}}$ -vel, majd integrálva mindkét oldalt 0-tól végtelenig, kapjuk, hogy

$$R_2(w) - R_2(0) = \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^w \left( \int_0^{\infty} R_2(z+y) dG(y) \right) dz - \int_0^w R_2(z) dz \right).$$

Cseréljük meg az integrálás sorrendjét és alkalmazzuk a  $x = z + y$  helyettesítést, valamint integráljunk parciálisan! Ha bevezetjük a  $B(w) = \int_0^w R_2(x) dx$  jelölést, akkor

$$\begin{aligned} R_2(w) - R_2(0) &= \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^{\infty} (B(w+y) - B(y)) dG(y) - B(w) \right) = \\ &= \frac{\lambda}{c} ([-(B(w+y) - B(y))(1 - G(y))]_0^{\infty}) + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \left( \int_0^{\infty} (R_2(w+y) - R_2(y)) (1 - G(y)) dy - B(w) \right). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (B(w+y) - B(y)) \cdot (1 - G(y)) = 0 \text{ és } (B(w) - B(0)) \cdot (1 - G(0)) = B(w),$$



hiszen  $Y_i$  nemnegativitása miatt  $G(0) = 0$ , s ezért az összeg első tagjából a határok behelyettesítése után  $\frac{\lambda}{c}B(w)$  marad, ami az összeg második tagjával összevonva eltűnik és a bizonyítandó állítást kapjuk.  $\square$

Megjegyezzük, hogy a (9) egyenlet egy Fredholm-típusú integrálegyenlet. Nehezíti a numerikus megoldását az, hogy a felső határ nem véges, valamint az, hogy az egyenlet siettetett argumentumú, azaz a „jövő” ismerete is szükséges az aktuális érték kiszámításához.

A (9) integrálegyenlet megoldásának egyértelműségét nem sikerült bebizonyítani. A megoldhatóságról azonban állíthatjuk, hogy bármely (folytonos)  $G(y)$  eloszlásfüggvénnyel rendelkező  $Y_i$   $i = 1, \dots$  betöltések esetén (9)-nek van exponenciális megoldása. Nevezetesen igaz az alábbi állítás:

3.4. ÁLLÍTÁS. Legyen

$$h(y) = \frac{\lambda}{c}(1 - G(y)), \quad y \geq 0$$

esetén. Ha a (9) egyenlet olyan megoldását keressük, amelynek határértéke  $\infty$ -ben 1 és 0-beli értéke 0, akkor  $\frac{\lambda\mu_G}{c} > 1$  esetén az

$$R_2(z) = 1 - e^{-\nu z} \tag{10}$$

függvény megfelel e kívánalmaknak, amennyiben  $\nu > 0$  teljesíti az alábbi egyenlőséget:

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy = 1. \tag{11}$$

Állítjuk továbbá, hogy a (11) egyenletnek minden  $G(y)$  folytonos eloszlásfüggvény esetén egyértelmű valós pozitív megoldása van.

*Bizonyítás.* Induljunk ki a (8) egyenletből, azaz az

$$R_2(z) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (R_2(z+y) - R_2(y))(1 - G(y)) dy = \int_0^{\infty} (R_2(z+y) - R_2(y))h(y) dy$$

összefüggésből. Az

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} R_2(z+y)(1 - G(y)) dy \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (1 - G(y)) dy = \frac{\lambda\mu_G}{c},$$

és

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} R_2(y)(1 - G(y)) dy \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (1 - G(y)) dy = \frac{\lambda\mu_G}{c}$$

egyenlőtlenségek, valamint  $(R_2(z+y) - R_2(y))(1 - G(y))$  nemnegativitása biztosítja az improprius integrálok konvergenciáját, s így

$$\begin{aligned} R_2(z) &= \int_0^{\infty} (R_2(z+y) - R_2(y))h(y)dy = \\ &= \int_0^{\infty} R_2(z+y)h(y)dy - \int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Ebből is adódik, hogy  $R_2(0) = \int_0^{\infty} R_2(0+y)h(y)dy - \int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy = 0$  lehet csak.

Képezzük (12) mindkét oldalának határértékét, és cseréljük meg az integrálás és a határértékképzés sorrendjét! Kapjuk, hogy

$$1 = \int_0^{\infty} h(y)dy - \int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy = \frac{\lambda\mu}{c} - \int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy,$$

azaz

$$\int_0^{\infty} R_2(y)h(y)dy = \frac{\lambda\mu_G}{c} - 1.$$

Keressük (12) megoldását  $R_2(z) = c_1 - c_2e^{-\nu z}$  alakban!

Mivel  $R_2(0) = 0$ ,  $c_1 = c_2$  lehet csak, valamint  $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2(z) = 1$  miatt  $\nu$  pozitív és  $c_1 = 1$ . Itt jegyezzük meg, hogy komplex  $\nu$  megoldásokkal azért sem kell foglalkoznunk, mert a trigonometrikus tagok miatt  $R_2(z)$  monotonitása nem teljesülne. Vagyis  $R_2(z) = 1 - e^{-\nu z}$ , ahol  $\nu > 0$ . Helyettesítsük be ezt az alakot (12)-be, s azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\nu z} &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\nu(z+y)})h(y)dy - \int_0^{\infty} (1 - e^{-\nu y})h(y)dy = \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-\nu y} - e^{-\nu(z+y)})h(y)dy = \\ &= -e^{-\nu z} \int_0^{\infty} e^{-\nu y}h(y)dy + \int_0^{\infty} e^{-\nu y}h(y)dy = \\ &= (1 - e^{-\nu z}) \cdot \int_0^{\infty} e^{-\nu y}h(y)dy \quad \forall z \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Legyen

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy = D.$$

Mivel

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy \leq \int_0^{\infty} h(y) dy = \frac{\lambda \mu}{c},$$

ezért  $D$  értéke biztosan véges.

Így (13) miatt  $1 - e^{-\nu z} = (1 - e^{-\nu z})D$ , valamint  $1 - e^{-\nu z} \neq 0$  minden  $z > 0$  esetén, tehát  $D$  értéke szükségképpen 1 lehet csak.

Meg kell még mutatnunk, hogy valóban létezik olyan  $\nu > 0$  valós szám, amire

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy = 1.$$

Definiáljuk a  $C(\nu)$  függvényt nemnegatív  $\nu$  értékek esetén az alábbi módon:

$$C(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy.$$

A korábban elmondottak miatt  $C$  minden nemnegatív  $\nu$ -re jól definiált. Látható, hogy  $C(\nu)$   $\nu$ -nek szigorúan monoton fogyó, folytonos függvénye. Tudjuk, hogy  $C(0) = \frac{\lambda \mu}{c} > 1$ , valamint az is igaz, hogy  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} C(\nu) = 0$ . Ez utóbbi abból látszik, hogy

$$0 \leq C(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\nu y} dy = \frac{\lambda}{c} \left( \frac{1}{\nu} \right) \rightarrow 0, \quad \text{ha } \nu \rightarrow \infty.$$

Következésképpen a Bolzano-féle közbülső érték tétel miatt  $C$  értéke valahol 1-gyel lesz azonos. A szigorú monotonitás azt is biztosítja, hogy csak egyszer veheti fel a  $C$  függvény az 1 értéket.  $\square$

*Megjegyzés.* A  $\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy$  függvény a  $h(y)$  függvény Laplace-transzformáltja, amelyet ebben az esetben a valós számegeyenesen, annak is nemnegatív részén értelmezzük. Azt a helyet kell megkeresnünk, amely helyen a Laplace-transzformált 1 értéket vesz fel. Ennek a helynek a meghatározása explicit módon általában nem lehetséges. A numerikus meghatározás lehetőségeire a későbbiekben térünk vissza. Becslésére azonban az alábbi állítás lehetőséget ad.

## 3.5. ÁLLÍTÁS.

- a) Legyen  $\frac{\lambda\mu_G}{c} > 1$ . Ha valamely  $\alpha$  pozitív számra  $1 - G(y) \leq e^{-\alpha y}$  minden  $y \geq 0$  esetén, akkor az a  $\nu > 0$  érték, amelyre  $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = 1$  teljesül, legfeljebb  $\frac{\lambda}{c} - \alpha$  lehet.
- b) Ha valamely  $\beta$  pozitív számra  $1 - G(y) \geq e^{-\beta y}$  minden  $y \geq 0$  esetén, akkor az a  $\nu > 0$  érték, amelyre  $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = 1$  teljesül, legalább  $\frac{\lambda}{c} - \beta$ .
- c) Ha  $1 - G(y) = e^{-\delta y}$  minden  $y \geq 0$  esetén, akkor az a  $\nu > 0$  érték, amelyre  $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = 1$  teljesül, éppen  $\frac{\lambda}{c} - \delta$ .

*Bizonyítás.*

$$a) \quad 1 = \int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy \leq \int_0^\infty e^{-\nu y} \frac{\lambda}{c} e^{-\alpha y} dy = \frac{\lambda}{c(\nu + \alpha)}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy  $\nu \leq \frac{\lambda}{c} - \alpha$ .

$$b) \quad 1 = \int_0^\infty e^{-\nu y} g(y) dy \geq \int_0^\infty e^{-\nu y} \frac{\lambda}{c} e^{-\beta y} dy = \frac{\lambda}{c(\nu + \beta)}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy  $\nu \geq \frac{\lambda}{c} - \beta$ .

- c) Összekapcsolhatjuk az állítás 1. és 2. részét, mivel egyenlőség esetén mindkét irányú egyenlőtlenség fennáll.  $\square$

3.6. ÁLLÍTÁS. Ha  $Y_i$   $i = 1, 2, \dots$  exponenciális eloszlású valószínűségi változó  $\mu_G$  várható értékkel, azaz  $\lambda = \frac{1}{\mu_G}$  paraméterrel, akkor a (10) egyenletnek  $\frac{\lambda\mu_G}{c} > 1$  esetben megoldása az alábbi függvény, amennyiben  $z \geq 0$ :

$$R_2(z) = 1 - e^{-\frac{\lambda\mu_G - c}{\mu_G c} z} \quad (14)$$

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk az előző tétel 3. részét az  $\frac{1}{\mu_G} = \delta$  választással, és azonnal kapjuk a kívánt állítást.  $\square$

Megjegyezzük, hogy a  $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = 1$  egyenletet expliciten is meg tudjuk oldani exponenciális eloszlású betöltések esetén. Sőt, magát a (8) egyenletet is meg tudjuk oldani exponenciális eloszlásfüggvény esetén, kihasználva az exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének alakját. Ily módon (8) egy lineáris differenciálegyenletté alakítható, amelynek egyértelmű megoldása (14). Így exponenciális eloszlású betöltött anyagmennyiségek esetén (8) megoldásának egyértelműségét is állíthatjuk.

Mivel az eloszlásfüggvény explicit alakját az esetek egy részében nem ismerjük, ezért a (9) által megadott egyenletet megadjuk a valószínűségi változó sűrű-

ségfüggvényének segítségével is. A (11)-ben szereplő integrált parciális integrálás módszerével számoljuk ki, s kapjuk, hogy (11) az alábbi alakban is írható:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\nu y} (1 - G(y)) dy = \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{e^{-\nu y}}{-\nu} (1 - G(y)) \right]_0^{\infty} + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\nu y}}{-\nu} g(y) dy = \\ &= \frac{\lambda}{c\nu} - \frac{\lambda}{c\nu} \int_0^{\infty} e^{-\nu y} g(y) dy \end{aligned}$$

amiből átrendezés után kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} g(y) dy = 1 - \frac{c\nu}{\lambda}.$$

Ez azt jelenti, hogy (9) megoldásának megadása érdekében azt a  $\nu > 0$  értéket kell megtalálnunk, ahol  $Y_i$  sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja éppen metszi az  $1 - \frac{c}{\lambda}\nu$  egyenest.

Megjegyezzük, hogy Poisson-eloszlású betöltési folyamat mellett exponenciális eloszlású betöltött anyagmennyiség esetén a  $\frac{\lambda\mu G}{c} < 1$  esetben az

$$R_1(z) = P \left( \left\{ 0 \leq z - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + ct \quad \forall t : 0 \leq t \right\} \right)$$

függvény is exponenciális függvény, nevezetesen

$$R_1(z) = 1 - \frac{\lambda\mu G}{c} e^{-\left(\frac{c-\lambda\mu G}{\mu G c}\right)z}.$$

Az  $R_1(z)$ -re vonatkozó integrálegyenlet megtalálható az [5] könyvben, ez az integrálegyenlet az említett esetben lineáris differenciálegyenletté alakítható, és egyértelműen megoldható.

### 3.3. Numerikus megoldások Poisson-folyamattal megadott betöltési folyamat esetén

A (9) egyenlet egy megoldásának meghatározása érdekében a (11) egyenletet kell megoldanunk. A (11) egyenlet megoldása során négy különböző esetet különböztetünk meg.

1. Amennyiben az  $Y_i$  valószínűségi változók eloszlásfüggvénye olyan, hogy az  $\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy$  integrál explicit módon kiszámítható, és a (11) egyenlet megoldása zárt alakban megadható. Ez azt jelenti, hogy zárt alakban kifejezhető, hogy

$h(y)$  Laplace-transzformáltja hol vesz fel 1 értéket. Ilyen esetre példa az, ha  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ )  $\frac{1}{\mu_G}$  paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy = \frac{\lambda}{c} \frac{1}{\nu + \frac{1}{\mu}} = 1.$$

Ebből az összefüggésből  $\nu$  értéke egyértelműen meghatározható, és megkapjuk azt a megoldást, amelyet (14)-ben már megadtunk.

2. Amennyiben az  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ ) valószínűségi változók eloszlásfüggvénye olyan, hogy az  $\int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy$  integrál explicit módon kiszámítható, de a (11) egyenlet explicit módon nem oldható meg, azaz a  $h(y)$  Laplace-transzformáltja explicit módon megadható, de csak numerikusan számítható ki, hogy hol vesz fel 1 értéket. Ilyen esetre példa, ha  $Y_i$  egyenletes eloszlású valószínűségi változó az  $[a, b]$  intervallumon. Természetesen annak érdekében, hogy  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ ) értékei nemnegatívak legyenek, és létezzen nemtriviális megoldása (9)-nek, szükséges, hogy  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  valamint  $\frac{\lambda(a+b)}{2c} > 1$  teljesüljenek. Ebben az esetben az integrálás elvégzése után az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy &= \frac{\lambda}{c} \int_0^a e^{-\nu y} dy + \frac{\lambda}{c} \int_a^b e^{-\nu y} \left(1 - \frac{y-a}{b-a}\right) dy = \\ &= \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\nu(b-a) + e^{-\nu b} - e^{-\nu a}}{\nu^2(b-a)}, \end{aligned}$$

vagyis (11) megoldása a

$$\frac{\lambda \nu(b-a) + e^{-\nu b} - e^{-\nu a}}{c(b-a)} = \nu^2$$

egyenlet megoldását jelenti.

Mivel a

$$\frac{\lambda \nu(b-a) + e^{-\nu b} - e^{-\nu a}}{c(b-a)} - \nu^2$$

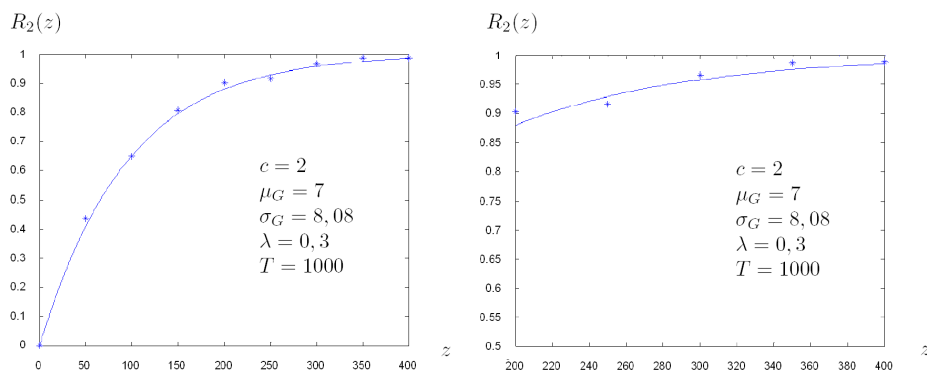
függvény esetén a függvény deriváltját ismerjük, ezért a gyökkereső eljárások közül a Newton módszer javasolható.

Mivel a gyök bizonyíthatóan a  $(0, \frac{\lambda}{c})$  nyílt intervallumba esik, ezért a gyökkereső eljárás indítási pontját erről az intervallumról válasszuk.

Illusztrációként mutatjuk meg az alábbi példát. Az  $a = 0$ ,  $b = 14$  paraméterválasztással a várható érték  $\frac{a+b}{2} = 7$ , így  $c = 2$  és  $\lambda = 0,3$  esetén a

$$\frac{\lambda(a+b)}{2c} = 1,05 > 1$$

feltétel teljesül. A (11) egyenlet megoldására a Newton-módszer négy tizedesjegy pontossággal a  $\nu = 0,0106$  értéket adta. Számítógéppel elvégeztük a folyamat Monte-Carlo-szimulációját, a szimulációból származó megbízhatóságokat összehasonlítottuk a numerikus megoldás segítségével kapott függvény értékeivel, és azt tapasztaltuk, hogy a kettő közti eltérés mindig a szimuláció hibáján belül volt. A Monte-Carlo-szimulációból származó értékek és az  $R_2(z)$  függvény - az előbbi  $\nu$  értékkel közelítve a kitevőt - láthatók a 2. ábrán.



**2. ábra.** A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (\*), és a numerikus eljárás alapján kapott  $R_2$  függvény a kezdő anyagmennyiség függvényében

3. Amennyiben az  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ ) valószínűségi változók eloszlásfüggvénye olyan, hogy az  $\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy$  integrál explicit módon pontosan nem számolható ki, de „kis elhanyagolással” igen. Ilyen esetre példa, ha  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ ) normális eloszlású valószínűségi változó az  $m > 0$  és  $\sigma > 0$  paraméterekkel. Természetesen az nem biztosítható, hogy  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ ) értéke biztosan pozitív legyen, de ha  $m \geq 3\delta$ , akkor  $Y_i$  értéke legalább 0,997 valószínűséggel, ha  $m \geq 5\delta$ , akkor  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ ) értéke legalább 0,999994 valószínűséggel nemnegatív. Ilyen paraméterválasztás esetén parciálisan integrálva és kihasználva a normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének alakját kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\nu y} (1 - G(y)) dy = \\ &= \left[ \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{e^{-\nu y} (1 - G(y))}{-\nu} \right]_0^\infty - \frac{\lambda}{c\nu} \int_0^\infty e^{-\nu y} g(y) dy \approx (\leq) \\ &\approx \frac{\lambda}{\nu c} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-\nu y} \cdot e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{\nu c} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{(y-\nu-m)^2}{2\sigma^2}} dy \right) \approx$$

$$\approx (\geq) \frac{\lambda}{c\nu} \left( 1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \right).$$

Az első közelítésnél azt használtuk fel, hogy megfelelő paraméterválasztásnál az eloszlásfüggvény értéke 0-ban csaknem 0, azaz a betöltött anyagmennyiségek nemnegatívak, a második közelítésben pedig azt, hogy ugyanezen oknál fogva a sűrűségfüggvény integrálja 0-tól  $\infty$ -ig csaknem 1. Így

$$\nu \approx \frac{\lambda}{c} \left( 1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \right).$$

Bebizonyítható, hogy a  $\frac{\lambda\mu_G}{c} > 1$  feltétel fennállása esetén a

$$\nu = \frac{\lambda}{c} \left( 1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \right) \quad (15)$$

egyenletnek egyértelmű pozitív megoldása a  $\left( 0, \frac{\mu_G}{2\sigma_G^2} \right)$  nyílt intervallumba esik.

Mivel az

$$f(\nu) = \nu - \frac{\lambda}{c} \left( 1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2}\nu^2 - m\nu} \right)$$

függvény deriváltját explicit módon ismerjük, ezért gyökkereső eljárásként ismét alkalmazhatjuk a Newton-módszert.

Példaként tekintsük a következő esetet! Legyen  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ ) eloszlása normális eloszlás az  $\mu_G = 10$  és  $\sigma_G = 2$  paraméterekkel. Legyen  $c = 2$ , valamint legyen  $\lambda = 0,3$ . Ekkor a (15) egyenlet megoldása a Newton módszerrel  $\nu = 0,0849$ -nek adódott. A szimulációból kapott eredményeket összevetve a numerikus eljárás segítségével kapott  $1 - e^{-0,0849z}$  függvény értékeivel, azt tapasztaltuk, hogy az eltérés mindig a szimuláció hibáján belül van. A 3. ábra mutatja a függvényértékeket, a szimulációs értékeket, és a köztük levő eltéréseket.

4. Amennyiben a Laplace-transzformálás csak numerikusan hajtható végre, akkor a

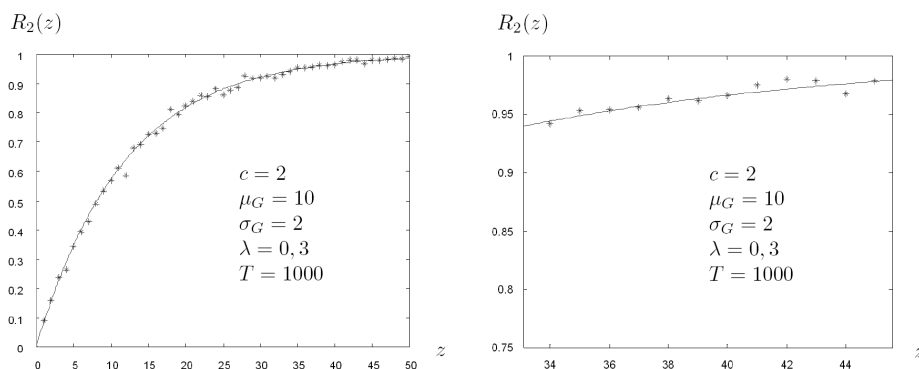
$$s(\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy - 1 = 0$$

egyenlet megoldására a következő eljárás alkalmazható: A gyökkereső eljárás alkalmazása során (például a Newton-módszert alkalmazva), az  $s(\nu)$  függvény és deriváltja értékei helyett azok közelítő értékeit használjuk. Ehhez szükségünk van az improprius integrál közelítő kiszámítására. Ehhez a következőképp jutunk:

Az  $x = \nu y$  helyettesítés után  $\frac{1}{\nu} h\left(\frac{x}{\nu}\right) = \tilde{h}(x)$  jelöléssel kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-\nu y} h(y) dy = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{1}{\nu} h\left(\frac{x}{\nu}\right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \tilde{h}(x) dx,$$





**3. ábra.** A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (\*), és a numerikus eljárás alapján kapott  $R_2(z)$  függvény a kezdő anyagmennyiség függvényében

s a numerikus integrálás elvégzésére a Gauss-Laguerre kvadratúra formula alkalmazható ([16]).

Az

$$s(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\nu y} h(y) dy - 1$$

függvény deriváltja a Newton-módszerhez szintén kell, így meg kell (közelítőleg) azt is határozni.

A derivált a következő alakú:

$$s'(\nu) = - \int_0^{\infty} y e^{-\nu y} h(y) dy. \quad (16)$$

Az előbbi improprius integrál konvergens, mivel

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\infty} y e^{-\nu y} h(y) dy \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} y(1 - G(y)) dy = \\ &= \frac{\lambda}{c} \left( \left[ \frac{y^2(1 - G(y))}{2} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{y^2}{2} g'(y) dy \right) = \frac{\lambda}{2c} M_2, \end{aligned}$$

amennyiben  $M_2$  jelöli  $Y_i$  ( $i = 1, \dots$ ) második momentumát.

(16) numerikus kiszámítására szintén alkalmazható a Gauss-Laguerre kvadratúra formula a  $\tilde{h}(x) = \frac{x}{\nu} h\left(\frac{x}{\nu}\right)$  függvénnyel. Így a Newton-módszer alkalmazásával (11) gyöke numerikusan megadható.

A numerikus számolások során azt tapasztaltuk, hogy a huszadfokú Laguerre-polinomokkal számolva az improprius integrálok értékét nagy pontossággal megkaphatjuk. A huszadfokú polinom alkalmazásához szükséges kvadratúra súlyokat, valamint a polinom gyökhelyeit táblázatban találtuk meg ([16]).

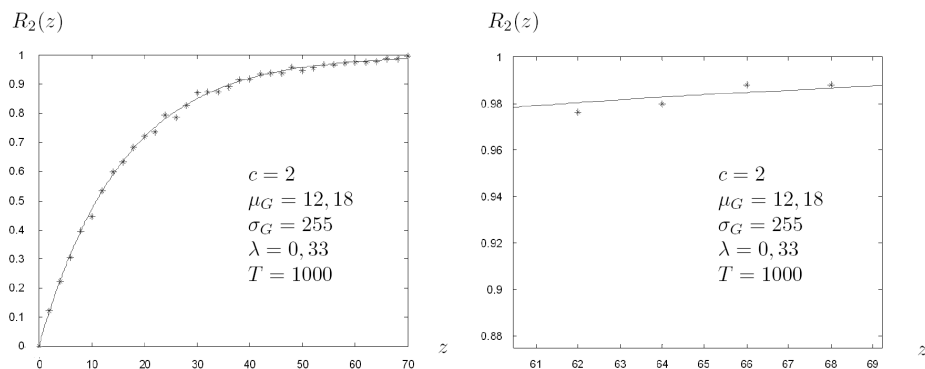
Illusztrációként, bemutatjuk a lognormális eloszlásra alkalmazva ezt az eljárást. A lognormális eloszlásnál  $m = 2$ ,  $\sigma = 1$  paraméterválasztás esetén

$$\mu_G = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}$$

értéke 12,18-nak adódik. Ha  $\lambda = 0,3$ , valamint  $c = 2$ , akkor

$$\frac{\lambda\mu_G}{c} = 1,87 > 1.$$

Ezen paraméterek esetén (11) megoldása négy tizedesjegy pontossággal  $\nu = 0,0634$ , azaz  $R_2(z) \approx 1 - e^{-0,0634z}$ . A szimulációs értékek és a numerikus megoldás révén kapott függvény értékei közti eltérésekről azt tapasztaltuk, hogy a szimuláció hibáján belül vannak. A 4. ábra mutatja  $N = 1000$  szimuláció esetén a szimulációs értékeket és a numerikus eljárás során kapott exponenciális függvényt.



**4. ábra.** A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (\*), és a numerikus eljárás alapján kapott  $R_2$  függvény a kezdő anyagmennyiség függvényében

### 3.4. Állandó nagyságú betöltések esete

Amennyiben a betöltött anyagmennyiségek nem véletlen, hanem állandó nagyságúak, és ezt az állandót tekintjük egységnyi mennyiségnek, akkor a 3. fejezet 3.2. állításához hasonlóan bizonyítható, hogy az

$$R_2^c(z) = P(\{0 \leq z + N(t) - ct, \quad \forall t \geq 0\})$$

megbízhatóságot megadó függvényre vonatkozó egyenlet az alábbi :

$$R_2^e(z) = \int_0^{z/c} R_2^e(z+1-c\tau)f(\tau)d\tau, \quad z \geq 0,$$

amely Poisson-folyamat esetén az alábbi egyenletbe megy át:

$$R_2^e(z) = \int_0^{z/c} R_2^e(z+1-c\tau)\lambda e^{-\lambda\tau} d\tau, \quad z \geq 0. \quad (17)$$

Ennek az integrálegyenletnek keressük a megoldását  $\frac{\lambda}{c} > 1$  esetén az  $R_2(0) = 0$  és  $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2(z) = 1$  peremfeltételek mellett.

3.7. ÁLLÍTÁS. Poisson-folyamattal megadott betöltési folyamat esetén  $R_2^e(z)$  kielégíti az alábbi differenciálegyenletet, ha  $z \geq 0$ :

$$(R_2^e(z))' = \frac{\lambda}{c} (R_2^e(z+1) - R_2^e(z)) \quad (18)$$

az  $R_2^e(0) = 0$  és a  $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2^e(z) = 1$  peremfeltételekkel.

Az egyenlőséget úgy értjük, hogy ha a 0 pontbeli derivált nem létezne, akkor  $(R_2^e)'(0)$  értékén a derivált függvény 0 pontbeli jobb oldali határértékét értjük. A (18) egyenlet egy siettetett argumentumú differenciálegyenlet.

*Bizonyítás.* Induljunk ki a (17) integrálegyenletből és helyettesítsük a  $t$  helyébe a  $t = z - c \cdot \tau + 1$  kifejezést, valamint szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát  $e^{\frac{\lambda}{c}z}$ -vel. Ekkor (17) az alábbi alakot ölti:

$$R_2^e(z) \cdot e^{\frac{\lambda}{c}z} = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}} \cdot \int_1^{z+1} R_2^e(t) \cdot e^{\frac{\lambda}{c}t} dt.$$

Deriváljuk mindkét oldalt  $z$  szerint, s láthatjuk, hogy

$$\left( (R_2^e(z))' + \frac{\lambda}{c} R_2^e(z) \right) \cdot e^{\frac{\lambda}{c}z} = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}} R_2^e(z+1) \cdot e^{\frac{\lambda}{c}(z+1)}.$$

Most egyszerűsítsünk  $e^{\frac{\lambda}{c}z}$ -vel és rendezzük az egyenletet, s megkapjuk a kívánt állítást.  $\square$

Megjegyezzük, hogy sajnos az  $(R_2^e(z))' = \frac{\lambda}{c} (R_2^e(z+1) - R_2^e(z))$  egyenlőség negatív  $z$  értékek esetén nem áll fenn, mivel, amennyiben fennállna, akkor  $z < 0$  esetén a  $R_2^e(z) = 0$  lenne. De ekkor a függvény deriváltja is azonosan 0 lenne. Ez viszont csak akkor igaz, ha  $R_2^e(z+1) = 0$  állandó, vagyis az  $R_2^e(z)$  függvény a  $[0,1]$  intervallumon 0 értéket venne fel. Ezt folytatva azt kapjuk, hogy az  $R_2^e(z)$  függvény minden intervallumon 0.

3.8. ÁLLÍTÁS. Amennyiben  $\frac{\lambda}{c} > 1$ , akkor a (18) differenciálegyenlet megoldása

$$R_2^e(z) = 1 - e^{-c_2 \cdot z} \quad z \geq 0,$$

amennyiben a  $c_2$  valós szám kielégíti az alábbi feltételt:

$$\frac{\lambda \cdot e^{-c_2}}{c_2 \cdot c - \lambda} = -1. \quad (19)$$

*Bizonyítás.* A (18) differenciálegyenlet megoldásának egyértelműsége az  $R_2^e(0) = 0$  és a  $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2^e(z) = 1$  peremfeltételek mellett a differenciálegyenletek elmélete alapján belátható [14]. Ami a megoldás alakját illeti, keressük (19) megoldását nemnegatív  $z$  esetén  $R_2^e(z) = c_3 - c_1 e^{-c_2 z}$  alakban! Mivel az integrálegyenlet megoldása folytonos minden pontban, továbbá  $\lim_{z \rightarrow \infty} R_2^e(z) = 1$ , ezért  $c_3 = 1$  és  $c_2 > 0$ , valamint mivel  $R_2^e(0) = 0$ , ezért  $c_1 = 1$  lehet csak. Ha most már felhasználjuk, hogy  $R_2^e(z)$ -t éppen  $R_2^e(z) = 1 - e^{-c_2 z}$  alakban keressük, és ha ezt az alakot behelyettesítjük a (18) egyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy a

$$c_2 e^{-c_2 z} = \frac{\lambda}{c} \left( -e^{-c_2(z+1)} - e^{-c_2 z} \right)$$

egyenlőség minden nemnegatív  $z$  érték esetén teljesül.

Ezt átalakítva és egyszerűsítve  $e^{-c_2 z}$ -vel láthatjuk, hogy  $c_2 c = \lambda(1 - e^{-c_2})$ , azaz  $c_2 c - \lambda = -\lambda e^{-c_2}$ .

Ha a bal oldal 0, akkor az egyenlőség nem teljesülhet, ezért oszthatunk a bal oldallal és az osztás után pontosan a kívánt alakot kapjuk.

Nézzük meg, van-e valós megoldása a (19) egyenletnek!

Mivel a (19) egyenletből  $c_2$  explicit módon nem fejezhető ki, ezért írjuk át (19)-t az alábbi alakba:

$$e^{-c_2} = 1 - c_2 \frac{c}{\lambda},$$

ezért a megoldás az  $y = e^{-x}$  exponenciális függvény és a  $y = 1 - \frac{c}{\lambda} x$  lineáris függvények metszéspontjának első koordinátája. A két függvény grafikonjának nyilvánvalóan metszéspontja a (0,1) pont, ami azt jelenti, hogy a  $c_2 = 0$  nyilván kielégíti a (19) egyenletet. Másrészt az  $y = e^{-x}$  függvény (0,1) pontbeli érintője az  $y = 1 - x$  egyenlettel leírható egyenes, és mivel az  $y = e^{-x}$  függvény szigorúan monoton fogyó konvex függvény, ezért ha egy (0,1) ponton átmenő egyenes meredeksége kisebb  $-1$ -nél, akkor újabb pontban metszi a görbét a pozitív félegyenesen, viszont ha az egyenes meredeksége legalább  $-1$  és negatív, akkor újabb pontban már a pozitív félegyenesen nem metszheti az exponenciális görbét, csupán a negatív félegyenesen. Tehát a (19) egyenletnek akkor és csak akkor van pozitív megoldása, ha  $-\frac{\lambda}{c} < -1$ , vagyis ha  $\frac{\lambda}{c} > 1$ , s ez pontosan az a feltétel, ami mellett az integrálegyenlet megoldását kerestük.  $\square$

Megjegyezzük, hogy a (19) egyenlet megoldására alkalmas a Newton-módszer. Mivel a gyök bizonyíthatóan a  $(0, \frac{\lambda}{c})$  intervallumba esik, ezért a gyökkeresést cél-

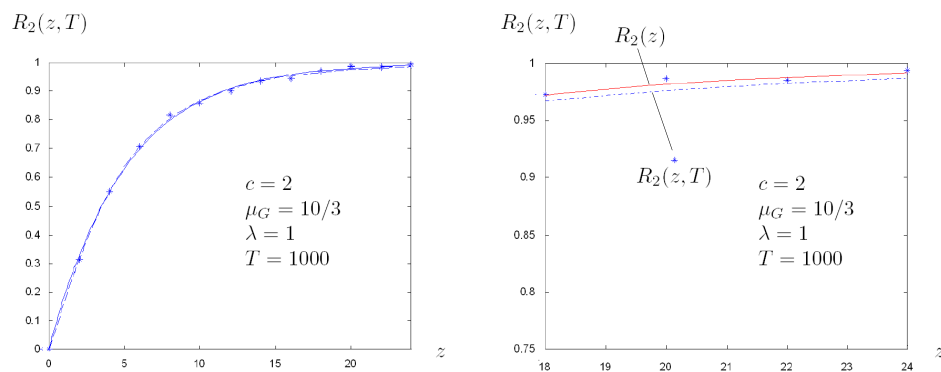
szerű ebből az intervallumból indítani. A keresett kitevők meghatározására használt gépidő másodpercnyi, tehát a keresett közelítő megoldást jelentő függvény igen rövid idő alatt meghatározható.

### 3.5. A megbízhatóságokat megadó függvények függvényillesztésen alapuló megadása

A 3.1. szakaszban bemutatott véges időintervallumra vonatkozó (5) integrálegyenlet analitikus megoldásait nem sikerült megadni, így a numerikus meghatározásokra fordítottuk figyelmünket. Egyik lehetőség az integrálegyenletek klasszikus numerikus megoldása. Másik lehetőség, lévén, hogy a folyamat maga számítógépen jól szimulálható, az integrálegyenletek numerikus módszerekkel történő megoldása helyett a megbízhatóságok Monte-Carlo-szimulációval való meghatározása bizonyos  $z$  értékek esetén, s ezekre a megbízhatósági értékekre eloszlásfüggvény illesztése. Mivel a Poisson-folyamattal leírt betöltési folyamat esetén az analitikus megoldások exponenciális típusú függvények voltak, azért Poisson-folyamat esetén exponenciális függvényt illesztettünk a szimulációs értékekre ([13]). A paraméterillesztéssel kapott megoldások nagy  $T$  értékek esetén jól közelítették az  $R_2(z)$  függvényt. Olyan esetekben, amikor a végtelen intervallumra vonatkozó egyenletek pontos megoldását ismerjük, ezeket összehasonlítva a paraméterillesztésből származó megoldással jó egyezést kaptunk. Számos esetben, például nem Poisson-folyamattal leírt betöltési folyamat esetén, nem voltak azonban jók az illesztéssel kapott függvények. Ezekben az esetekben nem áll rendelkezésünkre információ az eloszlásfüggvény típusára vonatkozólag, a megoldás feltehetőleg nem exponenciális függvény, és a megoldást nem célszerű exponenciális függvénnyel közelíteni. Ezért a függvényillesztéshez olyan általános eloszlásfüggvény-családot kerestünk, amelynek tagjaival jól közelíthető az eloszlásfüggvények széles osztálya. Mivel ez a követelmény igaz a tangenshiperbolikus eloszláscsaládra ([1, 8, 15]), így a tangenshiperbolikus eloszlásfüggvény-családot választottuk az illesztéshez. Az illesztendő függvényeket rögzített  $T$  esetén  $R_1^*(z, T) = th^{m_1}(b_1z + a_1)^{n_1}$ , illetve  $R_2^*(z, T) = th^{m_2}(b_2z)^{n_2}$  alakban kerestük, a paramétereket a legkisebb négyzetek módszerével határoztuk meg, és így minden esetben a szimulációs pontokra jól illeszkedő függvényeket kaptunk.

Illusztrációként mutatjuk az alábbi példát. Poisson betöltési folyamat esetén exponenciális eloszlású valószínűségi változókkal megadott betöltött anyagmennyiség mellett a paramétereket  $c = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu_G = \frac{10}{3}$  értékűnek választva (14) alapján a pontos megoldás  $R_2(z) = 1 - e^{0.2z}$ .  $T = 1000$ -ig  $N = 1000$ -szer elvégeztük a folyamat Monte-Carlo-szimulációját, és megkerestük a szimulációs értékekre legjobban illeszkedő tangenshiperbolikus eloszlásfüggvényt. Négy tizedesjegyre kerekítve a kapott paramétereket  $R_2^*(z, 1000) = th^{1.7802}(0,3738z)^{0.6341}$  adódott közelítő megoldásként. A két függvényt mutatjuk az 5. ábrán, a különbségük csak a jobb oldali nagyított változaton látható.

Megemlítjük, hogy a szimuláció végrehajtása, és a relatív gyakoriságok megkeresése az adott esetben 33 mp-et vett igénybe MatLab programcsomaggal írt szí-



**5. ábra.** A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (\*), és a rájuk illesztett tangenshiperbolikus eloszlásfüggvény  $R_2^*(z, T)$  (-.-), valamint az  $R_2(z)$  pontos megbízhatóság (\_\_\_) a kezdő anyagmennyiség függvényében

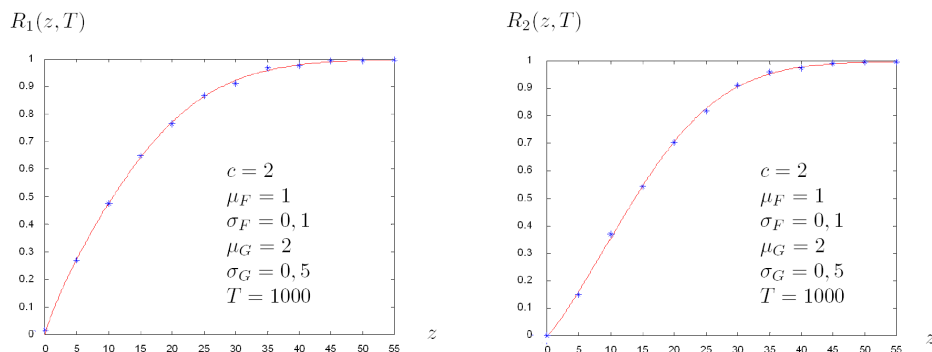
mulációs program segítségével INTEL PENTIUM(R) típusú CPU 180GHz 256MB RAM paraméterű személyi számítógépen.

Végezetül a 6. ábrán a paraméterek speciális választása esetén az  $R_1(z, T)$ , valamint  $R_2(z, T)$  függvényre Monte-Carlo-szimuláció segítségével kapott értékeket, valamint a rájuk legjobban illeszkedő tangenshiperbolikus eloszlásfüggvényeket láthatjuk. Az ábrán látható példákban mind a betöltési időközöket, mind a betöltött anyagmennyiséget normális eloszlású valószínűségi változókkal adtuk meg. A paramétereket az ábrákon feltüntettük. A szimulációt minden esetben 1000-szer végeztük el.

Az előző fejezetben megadott numerikus módszerek előnye a tangenshiperbolikus eloszlásfüggvény illesztéssel szemben a gyorsabb végrehajthatóság mellett az is, hogy esetében a  $c$ ,  $\lambda$  illetve egyéb paraméterektől való függés jobban látható, esetenként ezek szerinti deriváltja, gradiens vektora implicit módon meghatározható. Hátránya viszont, hogy csak Poisson betöltési folyamat mellett alkalmazható.

Végezetül a 6. ábrán a paraméterek speciális választása esetén az  $R_1(z, T)$ , valamint  $R_2(z, T)$  függvényre Monte-Carlo-szimuláció segítségével kapott értékeket, valamint a rájuk legjobban illeszkedő tangenshiperbolikus eloszlásfüggvényeket láthatjuk. Az ábrán látható példákban mind a betöltési időközöket, mind a betöltött anyagmennyiséget normális eloszlású valószínűségi változókkal adtuk meg. A paramétereket az ábrákon feltüntettük. A szimulációt minden esetben 1000-szer végeztük el.

Rögzített  $T$  esetén az illesztéssel kapott közelítő függvények inverzét meghatároztuk. Az inverzekbe 0,99 megbízhatóságot behelyettesítve az  $R_1$  függvény esetén a  $z = 45,39$  értékeket kaptuk, vagyis ennyi helyet kell biztosítani a tartályban az anyagmennyiség változás számára annak érdekében, hogy 0,99 valószínűséggel ne történjen túlsordulás. Az  $R_2$  függvény inverzébe behelyettesítve a 0,99 értéket



**6. ábra.** A szimulációs eljárásból kapott megbízhatóságok (\*), és a rájuk illesztett tangenshiperbolikus eloszlásfüggvények a tartályméret, illetve a kezdő anyagmennyiség függvényében

pedig a  $z = 45,24$  értéket kapjuk. A tartály mérete pedig  $45,39 + 45,24 = 90,63$  anyagegység legyen, s ekkor  $45,24$  egység kezdő anyagmennyiséggel indítva a folyamatot  $0,98$  valószínűséggel sem anyagelfogyásból, sem túlsordulásból nem származik hiba  $T = 1000$ -ig.

### Hivatkozások

- [1] BLICKLE T., LAKATOS, B. G., MIHÁLYKÓ, Cs., ULBERT, Zs.: *The hyperbolic tangent distribution family*. Powder Technology **97** (1998), 51–58.
- [2] CSÁTH, M. (SZERK.): *Operációkutatási esettanulmányok*. Budapest (1971).
- [3] CHUNG, K. L.: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer Verlag (1967).
- [4] KARIMI, I. A. AND REKLAITIS, G. V.: *Intermediate storage in noncontinuous processes involving stages of parallel units*. AIChE Journal **31** (1985), 44–52.
- [5] KARLIN, S., TAYLOR, H. M.: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest (1985).
- [6] LEE, E. S., REKLAITIS, G. V.: *Intermediate storage and operation of batch processes under equipment failure*. Comp. chem. Engng. **13** (1989), 491–498.
- [7] LEE, E. S., REKLAITIS, G. V.: *Intermediate storage and the operation of periodic processes under equipment failure*. Comp. chem. Engng. **13** (1989), 1235–1243.
- [8] MIHÁLYKÓ, Cs., BLICKLE, T.: *On the approximation of the lognormal distribution*. Math. Gaz. **84** (2000), 308–311.
- [9] ODI, T. O., KARIMI, I. A.: *A general stochastic model for intermediate storage in noncontinuous processes*. Chem. Eng. Sci. **45** (1990), 3533–3549.

- [10] ODI, T. O., KARIMI, I. A.: *Intermediate storage for noncontinuous process variability and failures*. Chem. Eng. Sci. **46** (1991), 3269–3282.
- [11] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., LAKATOS, B. G.: *Intermediate storage in batch processing systems under stochastic equipment failures*. Comp. chem. Engng. **22** (1998), S797–800.
- [12] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É. AND LAKATOS, B. G.: *Modeling operation of intermediate storage in batch/continuous processing systems under stochastic operation conditions*. Proceedings of 4<sup>th</sup> Mathematical Modeling (Eds. I. Troch, F. Breiteneker), Bécs (2003), 171–179.
- [13] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., LAKATOS, B. G.: *Intermediate storage in batch/continuous processing systems under stochastic operation conditions*. Comp. chem. Engng. **28** (2004), 2493–2508.
- [14] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., LAKATOS B. G.: *On the advanced integral and differential equations of sizing procedure of storage devices*. Functional Differential Equations, (2004), 121–131.
- [15] SÜLE Z., BLICKLE T., MIHÁLYKÓ Cs., BEZEGH, A.: *Eloszlások közelítése tangenshiperbolikus eloszlással*. MKN'05 konferencia kiadványa, (2005), 190–193.
- [16] STROUD, A. H., SECREST, D.: *Gaussian quadrature formulas*. Pentice-Hall, London (1966).
- [17] TAKAMATSU, T., HASHIMOTO, I. S., HASEBE, S.: *Optimal scheduling and minimum storage tank capacity in the process system with parallel batch type units*. Comp. chem. Eng. (1979), 185–192.
- [18] THORIN: *PROBABILITIES OF RUIN*. Scand. Actuarial J. (1982), 65–102.

(Beérkezett: 2006. június 22.)

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA  
 PANNON EGYETEM  
 MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK  
 8200 VESZPRÉM, EGYETEM U. 10-12.  
 Email: orbane@almos.uni-pannon.hu

LAKATOS G. BÉLA  
 PANNON EGYETEM  
 FOLYAMATMÉRNÖKI TANSZÉK  
 8200 VESZPRÉM, EGYETEM U. 10-12.  
 Email: lakatos@fmt.uni-pannon.hu

MIHÁLYKÓ CSABA  
 PANNON EGYETEM  
 MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK  
 8200 VESZPRÉM, EGYETEM U. 10-12.  
 Email: mihalyko@almos.uni-pannon.hu

*Alkalmazott Matematikai Lapok (2007)*



MATHEMATICAL BACKGROUND OF SIZING INTERMEDIATE STORAGEES  
UNDER STOCHASTIC OPERATIONAL CONDITIONS

ÉVA ORBÁN-MIHÁLYKÓ, BÉLA G. LAKATOS AND CSABA MIHÁLYKÓ

Intermediate storages are frequently used in chemical engineering. Under stochastic operation conditions determination of the appropriate size of the intermediate storage and the determination of the necessary initial amount of material are important questions. This paper is devoted to the mathematical aspects of the practical problem, to the analysis of the functions describing reliability, to the analytical and numerical solutions of the integral equations which are satisfied by the reliability functions and to their approximations.