Alkalmazott Matematikai Lapok **24** (2007), 37-55.

AZ INVERZLIMESZ EGY JÁTÉKELMÉLETI ALKALMAZÁSA[1]

PINTÉR MIKLÓS

A nem teljes információs játékok szokásos játékelméleti modellbe foglalásának problémája a véleményrangsorok modellezése. A cél a Harsányi János által bevezetett típustér megkonstruálása. A célunk, hogy megmutassuk, miként kapcsolódik a véleményrangsorok kérdése az inverzlimesz fogalmához, illetve egy a mérték inverzlimeszek létezésére kimondott, az ismert tételeknél általánosabb eredmény segítségével egy olyan típustér létezését látjuk be, amely egyetemes, teljes, és a paramétertér, amire épül, tisztán mérhető tér (nem topologikus).

1. Bevezetés

Egy adott szituáció játékelméleti modellezése során gyakran felmerül a játékosok informáltságára vonatkozó ismeretek kérdése, tehát, hogy mit gondolnak az egyes játékosok az adott szituációról, ill. mit gondolnak arról, hogy más játékosok mit gondolnak az adott szituációról s.i.t. A modellt kezelhetetlenül bonyolulttá teheti a különböző szintű vélemények végtelen hierarchiájának kezelése, tehát a véleményrangsorok explicit vizsgálata. Ennek a problémának a kezelésére a köztudás fogalma jelent megoldást (lásd Aumann [1]), tehát egy olyan játék felírása, ahol a játék (minden eleme) köztudott; minden játékos tudja, hogy minden játékos tudja, ... a játék elemeit.

Sok esetben adott a köztudott játék, sokszor azonban olyan szituációt kell modellezni, ahol valamely eleme a játéknak, tehát valamely paraméter nem köztudott. Ekkor a cél szintén egy köztudott játék felírása, tehát egy olyan modell, amely már nem tartalmaz véleményrangsorokat explicit módon.

Harsányi [8] a típus fogalmának bevezetésével kerülte meg a véleményrangsorok problémáját, mely fogalom a játékosok lehetséges „fajtáit” jelenti. Harsányi szerint *„úgy tekintjük a c_i vektort, mint amely az i játékos bizonyos fizikai, társadalmi és pszichológiai jellemzőit reprezentálja, amely vektorban összegyűlnek az i játékos hasznossági függvényének főbb paraméterei, továbbá a főbb elképzelései a*

[1] Ezen munka az OTKA T046194 pályázat támogatásával készült.

társadalmi környezetről ... a játék szabályai olyanok, hogy megengedik bármelyik játékosnak, hogy egyetlen lehetséges típusba tartozzon, annak megfelelően, hogy a c_i vektor milyen értéket vesz fel ... minden játékosról feltesszük, hogy ismeri önmaga típusát, de nem ismeri a többi játékosét."

Heifetz és Samet [10] formalizálta Harsányi típus fogalmát (a mérhetőségi struktúrákat itt nem adjuk meg):

1.1. Definíció. Az S paramétertérre épülő típustér $<(T_i, \mathcal{M}_i)_{i \in M \cup \{0\}}, (f_i)_{i \in M}>$ (röviden $<(T, \mathcal{M}), f)>$) (ahol M a játékosok halmaza, és 0 egy extra játékost jelöl) a következő:

1. $T_0 = S$, $(T_i, \mathcal{M}_i)$ mérhető tér $\forall i \in M \cup \{0\}$-re,
2. $f_i : T_i \to (\Delta(T, \mathcal{M}), \mathcal{A}_{HS})$ mérhető függvény $\forall i \in M$-re, ahol Δ a valószínűségi mértékek halmazát jelöli, $T = \times_{j \in M \cup \{0\}} T_j$ és $\mathcal{M} = \otimes_{j \in M \cup \{0\}} \mathcal{M}_j$,
3. $marg_{(T_i, \mathcal{M}_i)} f_i(t_i) = \delta_{t_i}$, ahol δ_{t_i} a t_i-re koncentrált Dirac-mérték $\forall t_i \in T_i$-re.

Könnyen látható, hogy az 1.1. definícióban a 2. és a 3. pont „összevonható”:

1.2. Definíció. Az S paramétertérre épülő típustér $<(T_i, \mathcal{M}_i)_{i \in M \cup \{0\}}, (f_i)_{i \in M}>$ (röviden $<(T, \mathcal{M}), f)>$) (ahol M a játékosok halmaza, és 0 egy extra játékost jelöl) a következő:

1. $T_0 = S$, $(T_i, \mathcal{M}_i)$ mérhető tér $\forall i \in M \cup \{0\}$-re,
2. $f_i : T_i \to (\Delta(T_{-i}, \mathcal{M}_{-i}), \mathcal{A}_{HS})$ mérhető függvény $\forall i \in M$-re, ahol $T_{-i} = \times_{j \in (M \cup \{0\}) \setminus \{i\}} T_j$ és $\mathcal{M}_{-i} = \otimes_{j \in (M \cup \{0\}) \setminus \{i\}} \mathcal{M}_j$.

A típusterek két tulajdonságát említjük itt meg. Az első a típustér egyetemes volta. Egy típustér egyetemes egy modell tekintetében (tehát ahol a parmétertér és a lehetséges vélemények rögzítettek), ha minden adott modellbeni típusténél bővebb, tehát minden véleményt tartalmaz. A második tulajdonság a típusterek teljessége. Egy típustér teljes, ha minden a paramétertérre épülő következetes véleményrangsor típus, tehát ha tetszőleges modellbeni véleményrangsor megfeleltethető egy 1.1. definícióbani típusnak.

Sem Harsányi, sem Heifetz és Samet nem konstruált típusteret, adottnak tekintették azt. A típusterek megkonstruálása véleményrangsorokon keresztül Böge és Eisele [3], Mertens és Zamir [14], Brandenburger és Dekel [4], Heifetz [9], Mertens et al. [15] és [17] munkák témája. Úgy tűnik, hogy a kompaktság fogalma nélkül nem lehet teljes egyetemes típusteret előállítani (lásd Heifetz és Samet [11]), így a fenti munkák mindegyike használja a kompaktság fogalmát, bár igen eltérő módokon. Ezen munka, amely [17] egy továbbfejlesztett formája, olyan modellt vezet be, ahol a paramétertéren csak mérhetőségi struktúra van (minden egyéb munkában a paramétertér topologikus), és a vélemények olyan valószínűségi mértékek, amelyek megszorításai a különböző szintű vélemények tereire kompakt regulárisak. Ebben a modellben olyan egyetemes típusteret konstruálunk, amely teljes.

A következő fejezet a matematikai apparátust ismerteti, míg az utolsó rész a matematikai eredmények játékelméleti alkalmazását öleli fel.

2. A mérték inverzlimesz létezése

A következőkben feltesszük, hogy a mértékek valószínűségi mértékek. Előrendezett halmazon olyan halmazt értünk, amelyen értelmezve van egy bináris reláció, mely tranzitív, és ha a halmaz egy eleme relációban van valamely más elemmel, akkor saját magával is relációban van. Felfelé irányított halmazon olyan előrendezett halmazt értünk, amelynek tetszőleges két eleméhez létezik halmazbani majoráns elem. Legyen μ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ gyűrűn értelmezett halmazfüggvény, és legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. μ szoros a $\mathcal{C}$ halmazrendszeren, ha tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz és tetszőleges $A \in \mathcal{A}$-hoz, $\exists C \in \mathcal{C}$, hogy $C \subseteq A$ és $\mu(A \setminus C) < \epsilon$. Továbbá $\forall Z \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$-re legyen

$$\mu^*(Z) \mathrel{\hat{=}} \max\left\{\inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{A},\ Z\subseteq\cup_n A_n} \sum\nolimits_n \mu(A_n), \sup\nolimits_{Z\supseteq A\in\mathcal{A}} \mu(A)\right\}.$$

2.1. Definíció. Legyen $(I, \leq)$ előrendezett halmaz, és legyen $(X_i)_{i\in I}$ nemüres halmazok egy családja. Legyen továbbá $f_{ij} : X_j \to X_i$, ha $i \leq j$.

1. $(i \leq j$ és $j \leq k) \Longrightarrow f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$,
2. $f_{ii} = id_{X_i}$ $\forall i \in I$-re.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ rendszert inverzrendszernek nevezzük.

Az inverzrendszer (projektív rendszer) tehát egymáshoz kapcsolt halmazok rendszere.

2.2. Definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ inverzrendszer, ahol $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$-k mértékterek.

1. f_{ij} mérhető $\forall(i \leq j)$-re,
2. $\mu_i = \mu_j \circ f_{ij}^{-1}, \forall(i \leq j)$-re.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ rendszert mérték inverzrendszernek nevezzük.

2.3. Definíció. Legyen $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ tetszőleges inverzrendszer. Legyenek

$$X = \prod_{i\in I} X_i,\ P = \{x \in X \mid pr_i(x) = f_{ij} \circ pr_j(x),\ \forall(i \leq j)\},$$

ahol pr_i a koordináta leképezés X-ből X_i-be. Ekkor P-t az $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ inverzrendszer inverzlimeszének nevezzük és $P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$-vel jelöljük. Legyen továbbá $p_i \mathrel{\hat{=}} pr_i|_P$, ekkor $p_i = f_{ij} \circ p_j$ $\forall(i \leq j)$-re.

Az inverzlimesz (projektív limesz) a halmazok Descartes-szorzat fogalmának általánosítása. Ha például $(I,\leq)$ az üres reláció, akkor az inverzlimesz a Descartes-szorzat.

2.4. Definíció. Legyen $((X_i,\mathcal{A}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer, és legyen $P=\varprojlim(X_i,\ (I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$.

1. $(P,\mathcal{A})$, ahol $\mathcal{A}$ a legdurvább (legszűkebb) σ-algebra, melyre p_i mérhető $\forall i\in I$-re,
2. μ $(P,\mathcal{A})$-n olyan mérték, hogy $\mu\circ p_i^{-1}=\mu_i$ $\forall i\in I$-re.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $(P,\mathcal{A},\mu)$ mértékteret mérték inverzlimesznek nevezzük, és $(P,\mathcal{A},\mu)=\varprojlim((X_i,\mathcal{A}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$-vel jelöljük.

A mérték inverzlimesz létezésének egyik problematikus pontja μ σ-additívitása. Ennek a problémának elkülönítése céljából vezetjük be a következő fogalmat.

2.5. Definíció. Legyen $((X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer, és legyen $P=\varprojlim(X_i,(I,\leq),f_{ij}|i\leq j)$.

1. $\mathcal{A}=\cup_{i\in I}p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ algebra,
2. μ $\mathcal{A}$-n értelmezett olyan additív halmazfüggvény, hogy $\mu\circ p_i^{-1}=\mu_i$ $\forall i\in I$-re.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $(P,\mathcal{A},\mu)$-t gyenge mérték inverzlimesznek nevezzük, és $(P,\mathcal{A},\mu)=w-\varprojlim((X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$-vel jelöljük.

Ahhoz, hogy „értelmes" mérték inverzlimeszt kapjunk, szükséges P inverzlimesz nemürессége. Ennek biztosítására vezette be Bochner [2] a sorozatmaximalitás fogalmát. Később, Millington és Sion [13] gyengítette a sorozatmaximalitás fogalmát, mely általánosítás a majdnem sorozatmaximalitás.

2.6. Definíció. Az $((X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális (almost s.m., almost sequentially maximal), ha tetszőleges $i_1\leq i_2\leq\ldots\in I$ lánchoz $\exists A_{i_n}\subseteq X_{i_n}$ halmazok, hogy

1. $f_{i_n i_m}^{-1}(A_{i_n})\subseteq A_{i_m}$ $\forall(n\leq m)$-re,
2. $\mu_{i_n}^*(A_{i_n})=0$ $\forall n$-re,

ha $x_{i_n}\in(X_{i_n}\setminus A_{i_n})$, és $x_{i_n}=f_{i_n i_{n+1}}\left(x_{i_{n+1}}\right)$ $\forall n$-re, akkor

$$\exists x\in P=\varprojlim(X_i,(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j}),$$

hogy $x_{i_n}=p_{i_n}(x)$ $\forall n$-re.

Vegyük észre, hogy a majdnem sorozatmaximalitás biztosítja az inverzlimesz nemürességét, tehát ebben az esetben a majdnem sorozatmaximalitás kiváltja a Kiválasztási Axiómát.

2.1. KÖVETKEZMÉNY. *Legyenek* $(X_n, \mathcal{M}_n)$ *mérhető terek,* $n \in \mathbb{N}$,

$$(Y_n, \mathcal{N}_n) \doteq (\times_{i=1}^n X_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i), \text{ és } ((Y_n, \mathcal{N}_n, \mu_n), (\mathbb{N}, \leq), f_{mn}|_{m \leq n}),$$

ahol f_{mn}*-ek koordináta leképezések és* μ_n*-ek tetszőleges valószínűségi mértékek, melyek eleget tesznek a 2.2. definíció 2. pontjának. Ekkor*

$$((Y_n, \mathcal{N}_n, \mu_n), (\mathbb{N}, \leq), f_{mn}|_{m \leq n})$$

mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális.

Bizonyítás. Világos, hogy

$$\varprojlim(Y_n, (\mathbb{N}, \leq), f_{mn}|_{m \leq n}) = \times_{i=1}^\infty Y_i = \times_{i=1}^\infty X_i.$$

A koordináta leképezések szürjektívitása miatt A_n-eket $\emptyset$-nak választva kapjuk a 2.6. definícióban szereplő fogalmat. □

A következő állítás, amely fő matematikai állításunk, Metivier [16] (269. old.), Mallory és Sion [12] eredményeinek általánosítása, tehát Bochner, ill. Choksi [5] eredményeinek további általánosítása.

2.1. TÉTEL. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), f_{ij}, (I, \leq))|_{i \leq j}$ *mérték inverzrendszer, ahol* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ σ*-kompakt halmazrendszer* $\forall i \in I$*-re. Ha*

1. $(I, \leq)$ *felfelé irányított,*
2. $f_{ij}(\mathcal{C}_j) \subseteq \mathcal{C}_i$ $\forall (i \leq j)$*-re,*
3. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap \mathcal{C}_j$ $\forall (i \leq j)$*-re* σ*-kompakt halmazrendszer* $\forall x_i \in X_i$*-re,*
4. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_i$*-ből következik, hogy* $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}_i$ $\forall i \in I$*-re,*
5. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *majdnem sorozatmaximális,*
6. μ_i *szoros a* $\mathcal{C}_i$ *halmazrendszeren* $\forall i \in I$*-re,*

akkor $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *létezik és egyértelmű.*

A bizonyítást darabokra bontjuk. Először a σ-additivitás kérdését járjuk körbe.

2.7. Definíció. Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrű, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ halmazrendszer és μ $\mathcal{A}$-n értelmezett additív halmazfüggvény. Ekkor $\mathcal{C}$ halmazrendszer μ-majdnem σ-kompakt, ha tetszőleges $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ halmazsorozathoz és tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz $\exists A \subseteq X$, $\mu^*(A) < \epsilon$, hogy ha $\complement A \cap (\cap_n C_n) = \emptyset$, akkor $\exists m \in \mathbb{N}$, hogy $\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) = \emptyset$.

A μ-majdnem σ-kompaktság ilyetén definíciójának oka a majdnem sorozatmaximalitás fogalmából (2.6. definíció) és a 2.2. állításból érthető meg.

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *gyűrű,* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ μ*-majdnem* σ*-kompakt halmazrendszer, ahol* μ $\mathcal{A}$*-n értelmezett additív halmazfüggvény, mely szoros* $\mathcal{C}$*-n. Ekkor* μ σ*-additív* $\mathcal{A}$*-n.*

Bizonyítás. A bizonyítást az olvasóra bízzuk. □

A következő állítás Rao [18] eredményének általánosítása.

2.1. Állítás. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *olyan mérték inverzrendszer, hogy*

1. $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz,*
2. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális.*

Ekkor

$$(P, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$$

gyenge mérték inverzlimesz létezik és egyértelmű.

Bizonyítás. A bizonyítást az olvasóra bízzuk. □

2.2. Állítás. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzrendszer,* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall i \in I$*-re, és legyen* $J \subseteq I$. *Ha*

1. $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz,*
2. *a* J *halmaz minden megszámlálható részhalmazának van legkisebb eleme,*
3. $f_{ij}(\mathcal{C}_j) \subseteq \mathcal{C}_i$ $\forall (i \leq j) \in I$*-re,*
4. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap \mathcal{C}_j$ $\forall (i \leq j)$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall x_i \in X_i$*-re,*
5. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_i$*-ből következik, hogy* $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$ $\forall i \in J$*-re,*
6. μ_i *szoros a* $\mathcal{C}_i$ *halmazrendszeren* $\forall i \in I$*-re,*
7. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális,*

akkor $\mathcal{C} \doteq \cup_{i \in J} p_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$ *μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer* $\mathcal{M}$*-ben, ahol*

$$(P, \mathcal{M}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}).$$

Bizonyítás. Az 1., a 7. feltételek és a 2.1. Állítás miatt

$$(P, \mathcal{M}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$$

létezik és egyértelmű. Ekkor elég látni, hogy tetszőleges $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$-hez és tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz $\exists A \subseteq P$ $\mu^*(A) < \epsilon$, hogy ha $\forall m \in \mathbb{N}$-re $\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) \neq \emptyset$, akkor $\complement A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$.

Legyenek $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ és $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzítettek. Legyen

$$N_i = \{n \in \mathbb{N} \mid C_n = p_i^{-1}(C'_n),\ C'_n \in \mathcal{C}_i,\ i \in J\} \quad \forall i \in J\text{-re.}$$

Legyen továbbá $i(n)$ egy tetszőlegesen rögzített eleme $\{i \in J \mid n \in N_i\}$-nek.

Legyen i_1 az $\{i(1), i(2), \ldots\}$ halmaz legkisebb eleme (a 2. feltétel miatt létezik). Hasonlóan legyen i_m a $J \setminus \{i_n\}_{n<m}$ halmaz legkisebb eleme $\forall m \in \mathbb{N}$-re.

Legyenek A_{i_n}-ek a 2.6. Definícióbeli halmazok (7. feltétel), és legyenek $\overline{A}_{i_n} \in \mathcal{M}_{i_n}$, hogy $A_{i_n} \subseteq \overline{A}_{i_n}$ és $\mu_{i_n}\left(\overline{A}_{i_n}\right) = 0$ $\forall n$-re ($\mathcal{M}_{i_n}$-ek σ-algebrák, így léteznek ilyen $\overline{A}_{i_n}$-ek). Ekkor a 6. feltétel miatt $\exists K_{i_n} \in \mathcal{C}_{i_n}$, hogy

$$K_{i_n} \subseteq \complement\overline{A}_{i_n} \text{ és } \mu_{i_n}(K_{i_n}) > 1 - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\frac{1}{6} \quad \forall n\text{-re.}$$

Legyen

$$A = \cup_n p_{i_n}^{-1}\left(\complement K_{i_n}\right).$$

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy $\mu^*(A) < \epsilon$.

Indirekt tegyük fel, hogy $\mu^*(A) \geq \epsilon$. Ekkor, mivel

$$A = \cup_n p_{i_n}^{-1}\left(\complement K_{i_n}\right) \text{ és } \mu_{i_n}\left(\complement K_{i_n}\right) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\frac{1}{6} \quad \forall n\text{-re,}$$

így $\exists i^* \in I$, $\exists B^{i^*} \in \mathcal{M}_{i^*}$, hogy

$$\mu_{i^*}\left(B^{i^*}\right) \geq \frac{5\epsilon}{6}, \text{ és } B = p_{i^*}^{-1}\left(B^{i^*}\right)$$

jelölés mellett $B \subseteq A$.

Legyen $j_1 \in I$ olyan, hogy $j_1 \geq i^*$ és $j_1 \geq i_1$; általában, legyen $j_n \in I$ olyan, hogy $j_n \geq j_{n-1}$ és $j_n \geq i_n$ $\forall n \geq 2$ (1. feltétel). Ekkor $\exists C^{j_1} \in \mathcal{C}_{j_1}$, hogy

$$C^{j_1} \subseteq \left(f_{i^*j_1}^{-1}(B^{i^*}) \setminus \left(f_{i_1 j_1}^{-1}\left(\complement K_{i_1}\right) \cup A_{j_1}\right)\right) \text{ és } \mu_{j_1}\left(C^{j_1}\right) > \frac{2\epsilon}{3} \quad \text{(6. feltétel),}$$

ahol A_{j_1} a $j_1 \leq j_2 \leq \ldots$ láncra vonatkozik a 2.6. Definícióból. Hasonlóan, $\exists C^{j_n} \in \mathcal{C}_{j_n}$, hogy

$$C^{j_n} \subseteq \left(f_{i^*j_n}^{-1}(B^{i^*}) \setminus \left(f_{i_n j_n}^{-1}\left(\complement K_{i_n}\right) \cup A_{j_n}\right)\right) \text{ és } \mu_{j_n}\left(C^{j_n}\right) > \frac{2\epsilon}{3} \quad \forall n\text{-re.}$$

C^{j_n}-ek választása (mértéke) miatt $\cap_{n=1}^m f_{j_1 j_n}\left(C^{j_n}\right) \neq \emptyset$ $\forall m$-re, így a 3. feltétel miatt $\cap_n f_{j_1 j_n}\left(C^{j_n}\right) \neq \emptyset$. Legyen $x_{j_1} \in \cap_n f_{j_1 j_n}\left(C^{j_n}\right)$ tetszőlegesen rögzített. Az x_{j_1} választása miatt

$$f_{j_1 j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap \left(\cap_{n=2}^m f_{j_2 j_n}\left(C^{j_n}\right)\right) \neq \emptyset \quad \forall m\text{-re.}$$

Ekkor a 4. feltétel miatt

$$f_{j_1 j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap \left(\cap_{n \geq 2} f_{j_2 j_n}\left(C^{j_n}\right)\right) \neq \emptyset.$$

Legyen

$$x_{j_2} \in f_{j_1 j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap \left(\cap_{n \geq 2} f_{j_2 j_n}\left(C^{j_n}\right)\right)$$

tetszőlegesen rögzített.

Ekkor

i. $f_{i_1 j_1}(x_{j_1}) \notin \complement K_{i_1}$ és $f_{i_2 j_2}(x_{j_2}) \notin \complement K_{i_2}$,

ii. $x_{j_1} \in f^{-1}_{i^* j_1}(B^{i^*})$ és $x_{j_2} \in f^{-1}_{i^* j_2}(B^{i^*})$.

Definiáljunk a fenti módon egy $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, ekkor $\forall n$-re

iii. $f_{i_n j_n}(x_{j_n}) \notin \complement K_{i_n}$,

iv. $x_{j_n} \in f^{-1}_{i^* j_n}(B^{i^*})$.

A 7. feltétel miatt $\exists x \in P$, hogy $x_{j_n} = p_{j_n}(x)$ $\forall n$-re. Ekkor azonban, **iii.** miatt $x \notin A$, míg **iv.** miatt $x \in B$, tehát $B \not\subseteq A$, ami ellentmondás.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy ha $\forall m \in \mathbb{N}$-re $\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) \neq 0$, akkor $\complement A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$.

Legyen

$$C_1^m = K_{i_1} \cap \left(\cap_{j\in J} f_{i_1 j}\left(\cap_{\{n\in N_j | n\leq m\}} p_j(C_n)\right)\right) \quad \forall m \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

Ekkor $C_1^m \neq \emptyset$, a 3. és az 5. feltétel miatt $C_1^m \in \mathcal{C}_i$ $\forall m \in \mathbb{N}$-re. Világos, hogy $C_1^m \supseteq C_1^{m+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, így $\mathcal{C}_i$ σ-kompaktsága miatt $\cap_m C_1^m \neq \emptyset$.

Legyen $x_{i_1} \in \cap_m C_1^m$ tetszőlegesen rögzített. A 4. feltétel miatt

$$f^{-1}_{i_1 i_2}(\{x_{i_1}\}) \cap \mathcal{C}_{i_2}$$

σ-kompakt halmazrendszer. x_{i_1} választása miatt

$$C_2^m = K_{i_2} \cap \left(f^{-1}_{i_1 i_2}(\{x_{i_1}\})\right) \cap \left(\cap_{j\in J\setminus\{i_1\}} f_{i_2 j}\left(\cap_{\{n\in N_j|n\leq m\}} p_j(C_n)\right)\right) \neq \emptyset$$

$\forall m \in \mathbb{N}$-re, így $\cap_m C_2^m \neq \emptyset$.

Legyen $x_{i_2} \in \cap_m C_2^m$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor

a: $x_{i_1} = f_{i_1 i_2}(x_{i_2})$,

b: $x_{i_2} \in K_{i_2} \cap \left(\cap_{n\notin N_{i_1}\cup N_{i_2}} p_{i_2}(C_n)\right) \cap \left(p_{i_2}\left(\cap_{n\in N_{i_1}\cup N_{i_2}} C_n\right)\right)$.

Alkalmazva ezt az eljárást az $i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \ldots$ láncra, kapunk pontok egy halmazát, mely pontok a következő tulajdonságokkal bírnak $\forall k \in \mathbb{N}$-re:

c: $x_{i_k} = f_{i_k i_{k+1}}(x_{i_{k+1}})$,

d: $x_{i_k} \in K_{i_k} \cap \left(\cap_{n\notin \cup_{j=1}^k N_{i_j}} p_{i_k}(C_n)\right) \cap \left(p_{i_k}\left(\cap_{n\in\cup_{j=1}^k N_{i_j}} C_n\right)\right)$.

A **c:** és **d:** pontok miatt

$$x_{i_k} \in \left(X_{i_k} \setminus \complement K_{i_k}\right),\ x_{i_k} = f_{i_k i_{k+1}}\left(x_{i_{k+1}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}\text{-re,}$$

így $A_{i_k} \subseteq \complement K_{i_k}$ $\forall k$-ra és a 7. feltétel miatt $\exists x \in \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$, hogy $x_{i_k} = p_{i_k}(x)$ $\forall k$-ra. Ekkor azonban $x \in \complement A \cap (\cap_n C_n)$, így $\complement A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$. $\square$

2.3. Állítás. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), (I, \le), f_{ij}|_{i\le j})$ *mérték inverzrendszer, ahol* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ σ*-kompakt halmazrendszer* $\forall i \in I$*-re. Ha*

1. $(I, \le)$ *felfelé irányított halmaz,*
2. $(X, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i), (I, \le), f_{ij}|_{i\le j})$ *létezik,*
3. $\forall(i_1 \le i_2 \le \dots)$ *láncra,* $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ*-majdnem* σ*-kompakt halmazrendszer,*
4. μ_i *szoros* $\mathcal{C}_i$*-n* $\forall i \in I$*-re,*

akkor

$$(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \le), f_{ij}|_{i\le j})$$

létezik és egyértelmű.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy μ σ-additív $\cup_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$-n.
A 4. feltétel miatt μ szoros $\cup_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$-n.

Legyenek $A_1, A_2, \ldots \in \cup_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ tetszőleges diszjunkt halmazok, hogy $\cup_n A_n \in \cup_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$. A_n-ek definíciója miatt $\forall n$-hez $\exists i(n) \in I$ és $\exists A_n^{i(n)} \in \mathcal{M}_{i(n)}$, hogy

$$A_n = p_{i(n)}^{-1}\left(A_n^{i(n)}\right).$$

Legyen $i_1 = i(1)$. Az 1. feltétel miatt $\exists i^* \in I$, hogy $i_1 \le i^*$ és $i(2) \le i^\star$. Legyen $i_2 = i^*$. Definiáljuk az $i_1 \le i_2 \le \ldots$ lánc többi elemét hasonlóan. A 3. tulajdonság miatt $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer, így a 2.1. segédtétel miatt

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n).$$

Az $A_1, A_2, \ldots$ halmazok tetszőlegesen választottak voltak, így μ σ-additív $\cup_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$-n. Ekkor a mérték kiterjeszthetősége miatt (lásd például Halmos [7])

$$(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \le), f_{ij}|_{i\le j})$$

létezik és egyértelmű. □

Bizonyítás. [A 2.1. Tétel bizonyítása]
A 2.2. Állítás miatt tetszőleges $i_1 \le i_1 \le \ldots$ lánc esetén $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer. Ekkor a 2.1. Állítás, és a 2.3. Állítás miatt

$$(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \le), f_{ij}|_{i\le j})$$

létezik és egyértelmű. □

3. Teljes, egyetemes típustér tisztán mérhető paramétertéren

Kiindulásképpen legyen S paramétertér, mely paramétertér tartalmazza az összes, a játékosoktól független tényt, amelyeknek befolyása lehet a játékra, pl. a játék leírását. A játékosok véleményeinek modellezéséhez az S generálta véleményteret kell vennünk, tehát figyelembe kell venni, hogy miként vélekednek az egyes játékosok S-ről, miként vélekednek az egyes játékosok arról, hogy miként vélekednek a játékosok S-ről, s.i.t.

3.1. Definíció. A paramétertér mérhető tér $(S, \mathcal{A}_S)$, ahol $\mathcal{A}_S$ az S téren definiált σ-algebra.

A paramétertérről csak azt tesszük fel, hogy mérhető. Modellünkben a játékosok olyan fogalmakkal operálnak, mint esemény, kimenetel, valószínűség; erre egy tisztán mértékelméleti modell tűnik alkalmasnak. Tudjuk azonban, hogy tisztán mértékelméleti modell nem feltétlenül eredményez teljes, egyetemes típusteret (lásd Heifetz és Samet [11]).

3.2. Definíció. Jelölje $\Delta(S, \mathcal{A}_S)$ az $(S, \mathcal{A}_S)$-en értelmezett valószínűségi mértékek halmazát, ekkor $\Delta(S, \mathcal{A}_S) \subseteq [0,1]^{\mathcal{A}_S}$. Legyen $(\Delta(S, \mathcal{A}_S), \tau)$ a $[0,1]^{\mathcal{A}_S}$ szorzattopológia (pontonkénti konvergencia topológia) altereként előállt topológia. Jelöljük a Baire mérhetőségi struktúrát $B(\Delta, \tau)$-val.

Ahol ez nem vezet félreértéshez, ott $\Delta(S, \mathcal{A}_S)$ helyett a rövidebb $\Delta(S)$ jelölést használjuk. Hasonlóan járunk el $B(\Delta(S), \tau)$ és $B(\Delta(S))$ esetében is.

3.3. Definíció. Definiáljunk terek egy sorozatát rekurzív módon, ahol M a játékosok halmaza:

$$\begin{aligned}
V_0 &= (S, A_S) \\
V_1 &= V_0 \otimes \left(\Delta(V_0)^M, B\left(\Delta(V_0)^M\right)\right) \\
V_2 &= V_1 \otimes \left(\Delta(V_1)^M, B\left(\Delta(V_1)^M\right)\right) = \\
&= V_0 \otimes \left(\Delta(V_0)^M, B\left(\Delta(V_0)^M\right)\right) \otimes \left(\Delta(V_1)^M, B\left(\Delta(V_1)^M\right)\right) \\
&\vdots \\
V_n &= V_{n-1} \otimes \left(\Delta(V_{n-1})^M, B\left(\Delta(V_{n-1})^M\right)\right) = \\
&= V_0 \otimes \otimes_{j=0}^{n-1} \left(\Delta(V_j)^M, B\left(\Delta(V_j)^M\right)\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vegyük a $V_\infty = S \times \times_{j=0}^{\infty} \Delta(V_j)^M$ végtelen szorzatot. V_∞-t *véleménytérnek*, egy pontját *világállapotnak* nevezzük.

V_0 egy pontját paraméter értéknek nevezzük, egyszerűen egy lehetséges paramétere a játéknak. V_1 egy pontja nem más, mint egy lehetséges paraméter érték, és a hozzá tartozó első rendű vélemények (a játékosok véleménye a lehetséges paraméterekről), s.i.t.

Ha $v \in V_\infty$, akkor v nem más, mint

$$v = \left(s, \mu_1^1, \mu_1^2, \ldots, \mu_2^1, \mu_2^2, \ldots\right),$$

ahol μ_j^i jelentése: az „i" játékos j-ed rendű véleménye. Tehát V_∞ minden eleme felfogható úgy, mint egy *véleményrangsor*, $(\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots)$ minden játékosra ($\forall i \in M$-re), és még egy lehetséges paraméter.

3.4. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Egy véleményrangsor $(\mu_1^i,\, \mu_2^i, \ldots)$ következetes, ha $\forall n \geq 2$-re

1. $marg_{V_{n-2}} \mu_n^i = \mu_{n-1}^i$,
2. $marg_{[\Delta(V_{n-2})]^i} \mu_n^i = \delta_{\mu_{n-1}^i}$,

ahol $\mu_n^i \in [\Delta(V_{n-1})]^i$ ($[\Delta(V_{n-1})]^i$ az i indexű másolata $\Delta(V_{n-1})$-nek), továbbá $marg_{V_n}$ jelöli a V_n-en lévő peremmértéket.

Az első feltétel azt rögzíti, hogy az adott játékos véleménye egy adott dologról nem változik a véleményrangsorban. A második feltétel szerint az adott játékos pontosan ismeri a saját véleményét (lásd Harsányi [8]). A fenti két feltétel felfogható úgy, mint a játékosok „logikája", feltesszük, hogy ez a „logika" ***köztudott***.

3.5. Definíció. Vegyük azokat a pontokat $(s, \mu_1^1, \mu_1^2, \ldots, \mu_2^1, \mu_2^2, \ldots)$ V_∞-ből, melyek esetén a véleményrangsorok $(\mu_1^i, \mu_i^2, \ldots)$ következetesek $\forall i \in M$-re. Legyen az összes ilyen pont halmaza V_∞^c, és hívjuk V_∞^c-t ***következetes alterének***.

A ^{c} jelölést más terek esetében is használjuk, és jelentése megegyezik a 3.5. Definícióban elmondottakkal.

Modellünkben a véleményrangsorok olyan valószínűségi mértékek sorozatai, melyek következetesek és megszorításaik a különböző rendű „csonka" véleményterekre kompakt regulárisak. Ebből következően definiáljuk újra a véleményteret (3.3. Definíció):

3.6. Definíció. Legyen

$$\begin{aligned}
V_0' &= V_0 \\
V_1' &= V_0' \otimes \left(\Delta_{MC}\left(V_0'\right)^M, B\left(\Delta_{MC}\left(V_0'\right)^M\right)\right) \\
V_2' &= \left(V_1' \otimes \left(\Delta_{MC}(V_1')^M, B\left(\Delta_{MC}\left(V_1'\right)^M\right)\right)\right)^c \\
&\;\;\vdots \\
V_n' &= \left(V_{n-1}' \otimes \left(\Delta_{MC}\left(V_{n-1}'\right)^M, B\left(\Delta_{MC}\left(V_{n-1}'\right)^M\right)\right)\right)^c \\
&= \left(V_0' \otimes \otimes_{j=0}^{n-1}\left(\Delta_{MC}\left(V_j'\right)^M, B\left(\Delta_{MC}\left(V_j'\right)^M\right)\right)\right)^c \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

ahol Δ_{MC} jelöli azon valószínűségi mértékek halmazát, hogy

$$\begin{aligned}
\Delta_{MC}(V_0') &= \Delta(V_0') \\
\Delta_{MC}(V_1') &= \Delta_C\left(\Delta_{MC}(V_0')^M, B\left(\Delta_{MC}(V_0')^M\right)\right) \\
\Delta_{MC}(V_2') &= \Delta_C\left(\left(\otimes_{j=0}^{1}\left(\Delta_{MC}(V_j')^M, B\left(\Delta_{MC}(V_j')^M\right)\right)\right)^c\right) \\
&\ \,\vdots \\
\Delta_{MC}(V_n') &= \Delta_C\left(\left(\otimes_{j=0}^{n-1}\left(\Delta_{MC}(V_j')^M, B\left(\Delta_{MC}(V_j')^M\right)\right)\right)^c\right) \\
&\ \,\vdots
\end{aligned}$$

ahol Δ_C a kompakt reguláris (az előző fejezetben használt terminológia szerint: a kompakt halmazokon szoros) valószínűségi mértékek halmazát jelöli.

Látható, hogy V_n' egy tetszőleges pontja olyan véleményrangsorokat tartalmaz, amelyekben a vélemények maximum n-ed rendűek, következetesek, és a megszorításaik a többi játékos hasonló tulajdonságú véleményeinek tereire kompakt reguláris valószínűségi mértékek. Tehát V_n'-ek már csak azokat a véleményeket tartalmazzák, amelyekkel a modellünkben foglalkozni kívánunk.

A következő fogalom a legfontosabb lépés fő eredményünk bizonyításához.

3.7. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Definiáljuk a csonka véleményterek következő sorozatát (lásd a 3.3. Definíciót):

$$\begin{aligned}
C_0 &= \left(\Delta_{MC}\left(V_0'\right)^{M\setminus\{i\}}, B\left(\Delta_{MC}\left(V_0'\right)^{M\setminus\{i\}}\right)\right) \\
C_1 &= \left(\otimes_{j=0}^{1}\left(\Delta_{MC}\left(V_j'\right)^{M\setminus\{i\}}, B\left(\Delta_{MC}\left(V_j'\right)^{M\setminus\{i\}}\right)\right)\right)^c \\
&\ \,\vdots \\
C_n &= \left(\otimes_{j=0}^{n}\left(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}}, B\left(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}}\right)\right)\right)^c \\
&\ \,\vdots
\end{aligned}$$

A csonka véleményterek segítségével leválasztottuk a szorzatterek nem topologikus részét.

A következő definícióban adjuk meg a használni kívánt mérték inverzrendszer mérhető tereit.

3.8. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Definiáljunk terek egy sorozatát rekurzív módon:

$$\begin{aligned}
T_0 &= V_0' \\
T_1 &= V_0' \otimes \left(\Delta_{MC}(V_0')^{M\setminus\{i\}}, B\left(\Delta_{MC}(V_0')^{M\setminus\{i\}}\right)\right) \\
T_2 &= \left(V_1' \otimes \left(\Delta_{MC}(V_1')^{M\setminus\{i\}}, B\left(\Delta_{MC}(V_1')^{M\setminus\{i\}}\right)\right)\right)^c \\
&\vdots \\
T_n &= \left(V_{n-1}' \otimes \left(\Delta_{MC}\left(V_{n-1}'\right)^{M\setminus\{i\}}, B\left(\Delta_{MC}\left(V_{n-1}'\right)^{M\setminus\{i\}}\right)\right)\right)^c \\
&= \left(V_0' \otimes \otimes_{j=0}^{n-1} \left(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}}, B\left(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}}\right)\right)\right)^c \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A következő fogalom egy adott játékos lehetséges típusainak halmaza.

3.9. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, és vegyük a következő halmazt:

$$T^i = \left(\times_{j=0}^{\infty} \Delta_{MC}\left(V_j'\right)^i\right)^c.$$

Ekkor T^i az „i" játékos típusainak halmaza, T^i egy pontja az „i" játékos egy lehetséges típusa.

Az „i" játékos típusainak halmaza tehát tartalmazza az összes lehetséges következetes véleményrangsort. Tehát, ha $t \in T^i$, akkor

$$t = (\nu_1^i, \nu_2^i, \nu_3^i, \ldots),$$

és t következetes. Ezen tulajdonságok miatt T^i, ha T^i benne van egy típustérben, akkor ez egy *teljes típustér*. Látható, hogy modellünkben a vélemények még nem, de azok megszorításai a csonka véleményterekre már kompakt reguláris valószínűségi mértékek.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *T^i egy szorzattér altere, így topológiája a pontonkénti konvergencia topológia: (T^i, τ).*

3.2. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített,*

$$\left(\left(T_n, \nu_{n+1}^i\right), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{mn}|_{m\leq n}\right) \tag{1}$$

mérték inverzrendszer, ahol pr_{mn} koordináta leképezés T_n-ből T_m-be $\forall(m \leq n)$-re, és $(\nu_1^i, \nu_2^i, \ldots) \in T^i$.

Bizonyítás. A mérték inverzrendszer definíciója megtalálható a 2.2. Definícióban.

- $pr_{mn} = pr_{mk} \circ pr_{kn}$ $\forall(m \leq k \leq n)$-re, a koordináta leképezések definiciója miatt,
- $pr_{nn} = id_{T_n^c}$ $\forall n$-re közvetlenül adódik a koordináta leképezések definíciójából,
- pr_{mn} mérhető $\forall(m \leq n)$-re, a szorzat mérhetőségi struktúra közvetlen következménye,
- $\nu^i_{n+1}\left(pr^{-1}_{mn}(A)\right) = \nu^i_{m+1}(A)$ $\forall(m \leq n)$-re és $\forall A \in T_m$ mérhető halmazra a véleményrangsorok következetessége miatt.

□

A 3.2. Következmény kapcsolatot teremt a véleményterek, véleményrangsorok és a mérték inverzrendszer fogalmak között.

3.1. Megjegyzés. A 3.2. Következményben (1) a

$$\left(\left(C_n, marg_{C_n}\nu^i_{n+2}\right), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{mn}|_{m \leq n}\right) \tag{2}$$

mérték inverzrendszerre cserélhető.

A következő állítás azt mutatja, hogy az igazi kérdés ν^i σ-additivitása, tehát hogy létezik-e a mérték inverzlimesz.

3.1. Állítás. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Az (1)-ben definiált mérték inverzrendszer esetén létezik $\left(T, \mathcal{A}_T, \nu^i\right)$ gyenge mérték inverzlimesz (lásd a 2.5. Definíciót).*

Bizonyítás. Lásd a 2.1. Állítást és a 3.5. Definíciót. □

A 3.1. Állítás ν^i additivitására koncentrál. Általában a mérték inverzlimesz létezése két problémába ütközhet. Az első az inverzlimesz „gazdagsága", tehát az a kérdés, hogy az inverzlimesz elég sok pontot tartalmazzon (a Heifetz és Samet [11] cikkbeli ellenpélda erre a problémára épül). A második tipikus probléma ν^i σ-additivitása (természetesen a két probléma nem független egymástól).

Az első fajta probléma elkerülésére koordináta leképezéseket használunk (majdnem sorozatmaximalitás, lásd a 2.6. Definíciót és a 2.1. Példát), míg a második típusú probléma kezelése a valószínűségi mértékek valami fajta kompakt regularitását követeli meg.

3.10. Definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. $\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$ olyan valószínűségi mértékek halmaza, hogy ha $\nu \in \Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$, akkor

$$marg_{C_{n-1}}\nu \in \Delta_C(C_{n-1}) \quad \forall n\text{-re.}$$

A következő tétel a fő eredményünk.

3.1. Tétel. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, ekkor T^i egyetemes típustér, tehát létezik $f : T^i \to (\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T), \tau)$ homeomorfizmus.*

A tétel bizonyítását szétbontottuk.

A következő segédtétel a mértékterek összeillesztéséről szól.

3.1. Segédtétel. *Legyenek* $(M, \mathcal{A}_M, \mu_M), (N, \mathcal{A}_N, \mu_N)$ *valószínűségi mértékterek, és legyen* μ *additív halmazfüggvény* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M \times N)$*-en, mely a cilinder halmazok által generált algebra. Legyenek továbbá* p_M *és* p_N *koordináta leképezések. Ha* $\mu \circ p_M^{-1} = \mu_M$ *és* $\mu \circ p_N^{-1} = \mu_N$*, akkor* μ σ*-additív.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\mathcal{A}$ elemei felírhatók a következő formában: $\cup_{j=1}^{m}(M_j \times N_j)$, ahol $m \in \mathbb{N}$, $M_j \in \mathcal{A}_M$, $N_j \in \mathcal{A}_N$. Ismert hogy, μ σ-additív $\mathcal{A}$-n pontosan akkor, ha tetszőleges $A_n \supseteq A_{n+1}$ halmazsorozatra

$$(\cap_n A_n = \emptyset) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges halmazsorozat, hogy $A_n \supseteq A_{n+1}$ és $\cap_n A_n = \emptyset$. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$-hez legyen $k_n \in \mathbb{N}$, hogy $A_n = \cup_{j=1}^{k_n} \left(M_j^n \times N_j^n\right)$. Legyen

$$F \doteq \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(n) \le k_n \quad \forall n\right\},$$

ekkor

$$\cap_n A_n = \cup_{f\in F} \cap_n \left(M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n\right).$$

Tudjuk, hogy

$$(\cap_n A_n = \emptyset) \Longrightarrow \left(\cap_n \left(M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n\right) = \emptyset \quad \forall f \in F\text{-re}\right). \tag{3}$$

Osszuk az $\cap_n \left(M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n\right)$ halmazokat két csoportba. Tartalmazza az első csoport, F_1 azokat az f elemeket, ahol $\cap_n M_{f(n)}^n = \emptyset$, és a maradék elemek alkossák a második csoportot F_2-őt.

Legyen $M_n \doteq \cup_{f\in F_1} \cap_{j=1}^n M_{f(j)}^j$, ahol n tetszőlegesen rögzített. Minden n-re M_n véges sok $\mathcal{A}_M$-beli halmazból kapható meg, tehát $M_n \in \mathcal{A}_M$. Könnyen látható, hogy $M_n \supseteq M_{n+1}$ $\forall n$-re, tehát $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton halmazsorozat. Azt kell még látnunk, hogy $\cap_n M_n = \emptyset$.

A fentiekből következik, hogy

$$\cap_n M_n = \cup_{f\in F_1} \cap_n M_{f(n)}^n.$$

F_1 definíciója miatt $\cap_n M_{f(n)}^n = \emptyset$ $\forall f \in F_1$-re, tehát $\cap_n M_n = \emptyset$.

$$\cap_{j=1}^n (M_j \times N) \supseteq \cup_{f\in F_1} \cap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j\right) \quad \forall n\text{-re.}$$

μ_M σ-additivitása miatt $\mu_M(M_n) \to 0$, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \mu_M(M_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(M_n \times N) \ge \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{f\in F_1} \cap_{j=1}^n \left(M_{f(j)}^j \times N_{f(j)}^j\right)\right),$$

így

$$\mu\left(\cup_{f\in F_1}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)\to 0.$$

Az F_2 halmazra teljesen hasonlóan látható, hogy

$$\mu\left(\cup_{f\in F_2}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)\to 0.$$

μ additivitása miatt $\forall n$-re

$$\begin{aligned}&\mu\left(\cup_{f\in F_1}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)+\mu\left(\cup_{f\in F_2}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)\\ \geq&\mu\left(\left(\cup_{f\in F_1}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)\cup\left(\cup_{f\in F_2}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)\right)\end{aligned}\tag{4}$$

Legyen $\epsilon>0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $\exists n_1\in\mathbb{N}$, hogy

$$\mu\left(\cup_{f\in F_1}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)<\frac{\epsilon}{2}\quad\forall n\geq n_1\text{-re},$$

és $\exists n_2\in\mathbb{N}$, hogy

$$\mu\left(\cup_{f\in F_2}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)<\frac{\epsilon}{2}\quad\forall n\geq n_2\text{-re}.$$

Ekkor

$$\mu\left(\cup_{f\in F_1}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)+\mu\left(\cup_{f\in F_2}\cap_{j=1}^{n}\left(M^j_{f(j)}\times N^j_{f(j)}\right)\right)<\epsilon$$

$\forall n\geq\max\{n_1,n_2\}$-re. A (4) egyenlőtlenség és ϵ tetszőlegesen választott volta miatt $\mu(A_n)\to 0$. □

3.11. Definíció. Legyen $g:\Delta_{MC}(T,\mathcal{A})\to T^i$ olyan, hogy $\forall\nu$ mértékhez azt a $t=(\nu_1^i,\nu_2^i,\ldots,\nu_n^i,\ldots)$ pontot rendeli T^i-ből, ahol

$$\nu_n^i=marg_{T_{n-1}}\nu\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

3.2. Segédtétel. *g bijekció.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy g injektív. Ha $\nu\in\Delta_{MC}(T,\mathcal{A}_T)$ adott, akkor ν egyértelműen meghatározza a peremmértékeit, tehát meghatároz egy pontot T^i-ben.

Most azt mutatjuk meg, hogy g szürjektív. A 2.1. Tétel feltételei teljesülnek a (2) mérték inverzrendszerre, hiszen a 2.1. Példa, a kompakt halmazok és a peremmértékek kompakt regularitása biztosítja a feltételeket. Ekkor a 3.1. Állítás miatt alkalmazhatjuk a 3.1. Segédtételt $(S,\mathcal{A},\nu_1^i)$-re és a (2) mérték inverzrendszer mérték inverzlimeszére. A mérték kiterjeszthetősége még az egyértelműséget is biztosítja, így az (1) mérték inverzrendszernek egyetlen mérték inverzlimesze van. Tehát tetszőleges $t\in T^i$ elemhez létezik $\Delta_{MC}(T,\mathcal{A}_T)$ halmazbani elem (a mérték a mérték inverzlimeszben), mely peremmértékei t komponensei. □

3.12. Definíció. Legyen $f = g^{-1}$.

3.3. SEGÉDTÉTEL. *f homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Közvetlen következménye a τ topológia tulajdonságainak. □

Bizonyítás. [A 3.1. Tétel bizonyítása]
Legyen f definiálva a 3.12. Definícióval. A 3.2. Segédtétel miatt f bijekció. A 3.3. Segédtétel miatt f homeomorfizmus. □

3.2. Megjegyzés. A 3.1. Tétel típustere egyetemes.

3.3. Megjegyzés. A homeomorfizmus létezését csak $(\Delta_{MC}(T,\mathcal{A}_T),\tau)$-ra, nem $(\Delta_{MC}(T,\sigma(\mathcal{A}_T),\tau)$-ra bizonyítottuk, mert az utóbbira nem feltétlenül létezik (lásd a 3.1. Példát).

A következő ellenpélda a 3.1. Tételhez fűzött 3.3. Megjegyzést támasztja alá.

3.1. Példa. Legyen

$$\Omega \triangleq [0,1]^{\{1,1/2,1/3,\dots,1/n,\dots\}},$$

tehát az $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ pontokon értelmezett $[0,1]$-be képező függvények halmaza.

Legyenek $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1/n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, $\delta_{f_n}(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f_n \in A \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ Dirac-mértékek. Ekkor Ω kompakt metrikus tér, mérhetőségi struktúráját a koordináta leképezések generálják (szorzattopológia), és látható, hogy a Borel és Baire halmazok egybeesnek.

Az is látható továbbá, hogy a koordináta leképezések segítségével megadott algebra (cilinder halmazok) generálja a Borel mérhetőségi struktúrát.

Legyen $f_0 = 0$ konstans függvény, és legyen δ_{f_0} a fent definiáltaknak megfelelően Dirac-mérték. Látható, hogy $\delta_{f_n} \to \delta_{f_0}$ pontonként az algebra (cilinder halmazok) összes elemén, de a $B = \{f_0\}$ (minden pontban nulla függvény) halmazon, ami nem eleme az algebrának csak a σ-algebrának, $\delta_{f_n}(B) \nrightarrow \delta_{f_0}(B)$.

A következő példa azt demonstrálja, hogy a mi modellünk mennyiben lehet előrelépés a korábbi modellekhez képest.

3.2. Példa. Legyen két játékos, mindkét játékosnak legyen két-két stratégiája. Ez a játék normál formában egy pont $\mathbb{R}^8$-ban. Van egy valószínűségi változó, mely meghatározza a játékosok kifizetéseit, tehát a paramétertér legyen $S = \mathbb{R}^{8^{\mathbb{R}}}$ (a paraméterek függvények $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}^8$-ba). S nem kompakt, nem Polish-tér, így Mertens és Zamir [14], ill. Brandenburger és Dekel [4] modelljei nem működnek ebben az esetben. Legyen S mérhető struktúrája a Borel halmazai. A mi modellünkben a lehetséges vélemények az összes valószínűségi mértékek halmaza S-en, de ezek között lehetnek olyanok, melyek nem kompakt regulárisak, tehát Heifetz [9], Mertens et al. [15] modelljei kevésbé általánosak, mint a miénk.

Két megjegyzés:

3.4. Megjegyzés. A Baire halmazok szerepe csupán a modellezni kívánt probléma szempontjából fontos (hasonlóság Heifetz és Samet [10]-hoz). A Baire halmazok helyett mindenhol Borel halmazokat használva a fenti eredmények érvényesek maradnak.

3.5. Megjegyzés. Elfogadott az irodalomban (lásd Dekel és Gul [6]), hogy a Bayesi modellekben maga a modell is köztudott a játékosok számára. Ez a mi modellünkben is igaz, de csak a 3.3. Megjegyzés mellett. Ha σ-algebrán szeretnénk látni a homeomorfizmust (ez lenne a „szép" modell), akkor a játékosok számára a modell nem lenne köztudott.

A fent ismertetett modellnek fő „erénye" az, hogy a különböző rendű vélemények terén olyan topológiát definiál, mely független az alacsonyabb rendű vélemények tereinek topológiájától, ráadásul ezen tér a vélemények gazdagabb ábrázolását teszi lehetővé.

Hivatkozások

[1] Aumann R. J.: *Agreeing to disagree* Annals of Statistics **4**, 1976, (1236–1239.)

[2] Bochner S.: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability.* University of California Press (1955)

[3] Böge W. – T. Eisele: *On solutions of bayesian games.* International Journal of Game Theory **8**, 1979, (193–215.)

[4] Brandenburger A. – E. Dekel: *Hierarchies of beliefs and common knowledge.* Journal of Economic Theory **59**, 189–198. (1993)

[5] Choksi J. R.: *Inverse limits of measure spaces.* Proc. London Math. Soc. **8(Ser 3)**, 1958, (321–342.)

[6] Dekel E. – F. Gul: *Rationality and knowledge in game theory.* Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications (Seventh World Congress of Econometric Society **Vol. 1.**) 1997, (87–171.)

[7] Halmos P. R.: *Mértékelmélet.* Gondolat 1984.

[8] Harsányi J.: *Games with incomplete information played by bayesian players part I., II., III.* Management Science **14**, 159–182., 320–334., 486–502. (1967-1968)

[9] Heifetz A.: *The bayesian formulation of incomplete information – the non-compact case.* International Journal of Game Theory **21**, 1993, (329–338.)

[10] Heifetz A. – D. Samet: *Topology-free typology of beliefs.* Journal of Economic Theory **82**, 1998, (324–341.)

[11] Heifetz A. – D. Samet: *Coherent beliefs are not always types.* Journal of Mathematical Economics **32**, 1999, (475–488.)

[12] Mallory D. J. – M. Sion: *Limits of inverse systems of measures.* Ann. Inst. Fourier **21**, 1971, (25–57.)

[13] Millington H. – M. Sion: *Inverse systems of group-valued measures.* Pacific Journal of Mathematics **44**, 1973, (637–650.)

[14] Mertens J. F. – S. Zamir: *Formulations of bayesian analysis for games with incomplete information.* International Journal of Game Theory **14**, 1985, (1–29.)

[15] Mertens J. F. – S. Sorin – S. Zamir: *Repeated games part A* CORE Discussion Paper No. 9420, 1994.

[16] Metivier M.: *Limites projectives de measures. Martingales. Applications.* Annali di Matematica **63**, 1963, (225–352.)

[17] Pintér M.: *Type space on a purely measurable parameter space.* Economic Theory **26**, 2005, (1239–139.)

[18] Rao M. M.: *Measure Theory and Integration.* John Wiley és Sons, 1987.

(Beérkezett: 2005. január 20.)

PINTÉR MIKLÓS
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
MATEMATIKA TANSZÉK
1093 BUDAPEST, FŐVÁM TÉR 13-15.
miklos.pinter@uni-corvinus.hu

A GAME THEORETIC APPLICATION OF INVERSE LIMIT

Miklós Pintér

It is a usual problem of modeling games with incomplete information to handle the hierarchies of beliefs. It is our aim to construct a type space introduced by Harsányi, and to show the connection between the concept of hierarchies of beliefs and the idea of inverse system. Therefore, we give an existence theorem for measure inverse limit, which is more general than the previously known theorems, and by this theorem we build a complete universal type space based on a purely measurable parameter space (i.e. non topological).