Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 99-117.

EGY KONSTRUKTÍVAN DEFINIÁLT TÖBBDIMENZIÓS GAMMA-ELOSZLÁS ILLESZTHETŐSÉGI FELTÉTELÉVEL KAPCSOLATOS KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁKRÓL

KÉRI GERZSON ÉS SZÁNTAI TAMÁS

A jelenlegi dolgozat célja a [4] dolgozatban bevezetett, és a [6] dolgozatban tovább vizsgált, konstruktívan definiált többdimenziós gamma-eloszlás empirikus adatokhoz való illeszthetőségére vonatkozó új eredmények közlése. A többdimenziós gamma-eloszlás és alkalmazási lehetőségeinek bővebb tárgyalását az érdeklődő olvasó az [1], [2], [3] és [5] könyvekben találhatja meg. Azt már a [4] dolgozat szerzői megmutatták, hogy az általuk bevezetett többdimenziós gamma-eloszlás nem feltétlenül illeszthető tetszőleges nemnegatív tapasztalati kovariancamátrixú adathalmazhoz. A [6] dolgozatban a szerző a kovarianciamátrix elemeire vonatkozó szükséges feltételeket fogalmazott meg az illeszthetőségre vonatkozóan. Ezekről a 4-nél nem nagyobb dimenziós eloszlások esetében meg tudta mutatni, hogy elégségesek is. Nagyobb dimenzió esetén e szükséges feltételek elégségessége nyitott kérdés maradt. Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy magasabb dimenzióban a [6]-ban felsoroltakon kívül további szükséges feltételeket is könnyen meg lehet adni. A mai fejlettebb számítástechnikai eszközök birtokában megadtuk az 5 és a 6 dimenziós esetekre is az illeszthetőség elégséges feltételeit. Ennek során kiderült, hogy 5 dimenzió esetén a szükséges és elégséges feltételek összességére még tetszetős, kerek meghatározás adható, 6 dimenzió esetén azonban e feltételek oly módon bővülnek, hogy már nem összegezhetők a 4 és 5 dimenziós esethez hasonlóan, és kezdenek szinte kaotikusnak látszó formát ölteni. Megkíséreltük a 7 dimenziós eset megoldását is, erről azonban menet közben lemondtunk, amikor kiderült, hogy az elvégzendő számítás gépidő igénye a vártnál jóval tetemesebb.

1. Bevezetés

A [4] cikkben a szerzők bevezettek egy új, többdimenziós gamma-eloszlást a Tisza Tokajnál mért havi vízhozam adatainak a modellezésére. Ezt az eloszlást illesztették a hat egymás utáni vízszegény hónap vízhozam adataihoz és sikeresen alkalmazták azt egy sztochasztikus optimalizálási probléma megoldásában. A [6] cikkben a szerző annak feltételét vizsgálja, hogy egy empirikus kovarianciamátrixhoz létezzen a mátrix adataira illeszkedő többdimenziós gamma-eloszlás. Ez a vizsgálat kapcsolódik a [4] cikk eredményeihez, melyben a szerzők három módszert dolgoztak ki a tárgyalt többdimenziós gamma-eloszlás empirikus adatokhoz történő közelítő illesztésére. A [6] cikk alapötlete annak felismerése, hogy a többdimenziós gamma-eloszlás illeszthetőségének a problémája a következő lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának a kérdésére vezethető vissza:

Milyen feltételek mellett teljesül, hogy adott $n \times n$ méretű valós szimmetrikus $\mathbf{C}$ mátrix esetén a

$$\sum_{l=1}^{p} \mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^T \vartheta_l = \mathbf{C} \tag{1}$$

egyenletrendszernek a ϑ_l-ekre van nemnegatív megoldása? Itt $p = 2^n - 1$, az $\mathbf{a}_l \in R^n, l = 1, 2, \ldots, p$ vektorok pedig az összes olyan R^n-beli vektort jelentik, melyek komponensei 0 vagy 1 értékűek, de nem mind 0 értékű.

A $\mathbf{C}$ mátrix szimmetrikus volta miatt elég az (1) egyenletrendszernek a $\mathbf{C}$ mátrix felső háromszög részéhez tartozó egyenleteit tekinteni. Ekkor az $\mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^T$ diádoknak is csak a felső háromszög része marad az egyenletrendszerben. A felső háromszög mátrixok elemeiből $\frac{1}{2}n(n+1)$ méretű vektorokat képezve, (1)-ből az

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}\vartheta &= \mathbf{c} \\ \vartheta &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2}$$

feltételrendszert kapjuk, ahol $\tilde{\mathbf{A}}$ egy $\frac{1}{2}n(n+1) \times (2^n - 1)$ méretű mátrix.

A [6] cikkben a szerző az (1) egyenletrendszer nemnegatív megoldásának létezésére a következő szükséges feltételt találta, melyről megmutatta, hogy $n \leq 4$ esetén elégséges is. (Idézzük az említett cikk 2.1. tételét.)

1.1. Tétel. *Ha egy $\mathbf{C}$ empirikus kovarianciamátrixra létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$ paraméter halmaz, akkor $\mathbf{C}$ elemeire teljesülnie kell a*

$$\sum_{i \in I_1} c_{ii} - \sum_{i \in I_1, k \in I_2} c_{ik} + \sum_{i \in I_1, k \in I_1, i<k} c_{ik} + \sum_{i \in I_2, k \in I_2, i<k} c_{ik} \geq 0 \tag{3}$$

feltételrendszernek, ahol $I_1, I_2 \subseteq I = \{1, 2, \ldots, n\}$ és $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

E szükséges feltételek segítségével egy új, az előzőeknél hatékonyabb algoritmus készült a pontosan illeszkedő többdimenziós gamma-eloszlás meghatározására, melynek alkalmazása során úgy épül fel lépésről lépésre a pontosan illeszkedő többdimenziós gamma-eloszlás, hogy a fennmaradó rész kovariancia mátrixa mindig eleget tesz a rá vonatkozó szükséges feltételeknek, vagy legalábbis azok közül a leglényegesebbeknek. Az algoritmus lépései során mindig csak az általunk eddig ismert szükséges feltételek teljesülését követeljük meg a fennmaradó rész kovariancia mátrixára vonatkozóan, ezért előfordulhat, hogy az algoritmus úgy fejeződik be, hogy a szükséges feltételek teljesülnek ugyan, mégsem lehet a fennmaradó részt pontosan előállítani. Ennek esélyével kapcsolatos számításokat a cikk végén, a 4. szakaszban ismertetünk. A közbeeső részekben (2–3. szakasz) az 1.1. tételben megadott szükséges feltételek általánosítására, majd $n = 5$ és $n = 6$ esetén szükséges és elégséges feltételek megadására és osztályozására vonatkozó újabb eredményekről számolunk be.

2. Egy módszer a szükséges feltételek bővítésére

Ebben a szakaszban ismertetjük és bebizonyítjuk az 1.1. tétel általánosítása formájában megfogalmazott bővebb szükséges feltételrendszer létezését $n > 4$ esetén. Az általánosítás előkészítéseként először egy lemmát bizonyítunk be.

2.1. LEMMA. *Ha egy* **C** *empirikus kovarianciamátrixra létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló* $\vartheta_1, \dots, \vartheta_p$ *paraméter halmaz, akkor* **C** *elemeire teljesülnie kell a*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \rho_i \rho_k c_{ik} \geq 0 \tag{4}$$

feltételnek tetszőleges $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ *egészek esetén (melyek között lehetnek azonosak is).*

Bizonyítás. Az (1) egyenletrendszer szerint

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} a_{kl} \vartheta_l$$

ahol $a_{1l}, a_{2l}, \dots, a_{pl}$ az $\mathbf{a}_l$ vektor komponensei. E kifejezéseket a (4) egyenlőtlenség bal oldalába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(\rho_i+1)}{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \rho_i \rho_k c_{ik} = \\
=&\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{p} \left[\sum_{i=1}^{n} (\rho_i^2 + \rho_i) a_{il}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \rho_i \rho_k a_{il} a_{kl} \right] \vartheta_l = \\
=&\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{p} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{il} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{il}^2 \right] \vartheta_l = \\
=&\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{il} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{il} + 1 \right) \vartheta_l \geq 0.
\end{aligned}$$

Az átalakítás utolsó lépésében felhasználtuk, hogy $a_{il}^2 = a_{il}$, mivel a_{il} értéke csak 0 vagy 1 lehet. ■

Az általánosítást kimondó tétel megfogalmazásához jelöljük a 0-tól és egymástól is különböző ρ_i egészek számát s-sel, és gyűjtsük össze az azonos ρ_i egészek indexeit az $I_1, I_2, \dots, I_s$ indexhalmazokba. (Természetesen lehetséges, hogy valamennyi nemnulla ρ_i különbözik egymástól, ebben az esetben az $I_1, I_2, \dots, I_s$ indexhalmazok mind egyeleműek.) Most tetszőleges $p \in \{1, 2, \dots, s\}$ esetén legyen $r_p = \rho_i$ ahol $i \in I_p$. E jelölésekkel nyilvánvalóan adódik a 2.1. lemma alábbi következménye:

2.1. Tétel. *Ha egy* $\mathbf{C}$ *empirikus kovarianciamátrixra létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$ *paraméterhalmaz, akkor* $\mathbf{C}$ *elemeire teljesülnie kell a*

$$\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{r_p(r_p+1)}{2}\sum_{i\in I_p} c_{ii}\right)+\sum_{p=1}^{s}\left(r_p^2 \sum_{i\in I_p, k\in I_p, i<k} c_{ik}\right)+$$
$$+\sum_{p=1}^{s-1}\sum_{q=p+1}^{s}\left(r_p r_q \sum_{i\in I_p, k\in I_q} c_{ik}\right)\geq 0$$

feltételeknek, ahol $I_1, I_2, \ldots, I_s \subseteq I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $I_p \cap I_q = \emptyset$, *ha* $p \neq q$, $r_1, r_2, \ldots r_s$ *pedig tetszőleges 0-tól és egymástól különböző egész számok.*

Vegyük észre, hogy a 2.1. tételből az 1.1. tételt úgy kapjuk meg, hogy a paramétereknek azokra az értékeire szorítkozunk, melyekre $s = 1$, $r_1 = -1$, vagy $s = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = -1$.

Megjegyezzük, hogy már az 1.1. tétel is tartalmazott redundáns feltételeket, ez még inkább így van a végtelen számosságú feltételt tartalmazó 2.1. tétel esetén. A [6] dolgozat feltárta, hogy az 1.1. tétel esetén melyek a redundáns feltételek, megmutatva, hogy tetszőleges n-re az 1.1. tétel feltételrendszere ekvivalens azzal a szűkebb feltételrendszerrel, amit úgy kapunk, hogy az eredeti feltételekből csak azokat vesszük figyelembe, melyekre

$$\begin{aligned} n_1 = 0 &\quad \text{és} \quad n_2 = 2,\\ \text{vagy } n_1 = 1 &\quad \text{és} \quad 1 \leq n_2 \leq n - n_1,\\ \text{vagy } n_1 \geq 2 &\quad \text{és} \quad 2 \leq n_2 \leq n - n_1. \end{aligned}$$

Itt és a továbbiakban is n_p-vel az I_p halmaz elemszámát jelöljük.

A 2.1. tétel esetében általános értelemben nem, de $n = 5$ esetére a későbbi 1. táblázatban megadunk egy hasonló, redundanciát már nem tartalmazó szűkített feltételrendszert. E feltételrendszer meghatározásához számítógépes módszert használtunk. Ugyanez a kérdés $n > 5$ esetén nagyon nehéznek látszik, viszont egy ilyen, az általános esetre vonatkozó vizsgálat jelentőségét amúgy is nagy mértékben csökkenti az az – ugyancsak számítógép segítségével kapott – meglepő eredmény, mely szerint $n = 6$ esetén már az 1.1. tételhez képest lényeges bővítéseket tartalmazó 2.1. feltételei sem adnak elégséges feltételt.

A 4. szakaszban $n = 5$ esetére két konkrét példát látunk olyan kovarianciamátrixokra, melyek az 1.1. tétel feltételrendszerét még teljesítik, de a 2.1. tétel feltételrendszerét nem. Ezek az ott $\mathbf{C}_1$-gyel és $\mathbf{C}_2$-vel jelölt mátrixok.

3. Az $n = 5$ és az $n = 6$ eset számítógépes megoldása

Amint már a [6] dolgozat is részletesen kifejtette, a szükséges és elégséges feltételek vizsgálata ekvivalens bizonyos konvex poliedrikus kúpok extremális irányai meghatározásának a kérdésével.

s	n_1	n_2	n_3	r_1	r_2	r_3	feltétel típus
1	2	–	–	−1	–	–	$c_{12} \geq 0$
2	1	1	–	1	−1	–	$c_{11} - c_{12} \geq 0$
2	1	2	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{23} - c_{12} - c_{13} \geq 0$
2	1	3	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{23} + c_{24} + c_{34} - c_{12} - c_{13} - c_{14} \geq 0$
2	1	4	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{23} + c_{24} + c_{25} + c_{34} + c_{35} + c_{45} -$ $- c_{12} - c_{13} - c_{14} - c_{15} \geq 0$
2	2	2	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{34} - c_{13} - c_{14} - c_{23} - c_{24} \geq 0$
2	2	3	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{34} + c_{35} + c_{45} -$ $- c_{13} - c_{14} - c_{15} - c_{23} - c_{24} - c_{25} \geq 0$
2	3	2	–	1	−1	–	$c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{12} + c_{13} + c_{23} + c_{45} -$ $- c_{14} - c_{15} - c_{24} - c_{25} - c_{34} - c_{35} \geq 0$
2	4	1	–	−1	2	–	$3c_{55} + c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{23} + c_{24} + c_{34} -$ $- 2c_{15} - 2c_{25} - 2c_{35} - 2c_{45} \geq 0$
3	1	3	1	1	−1	2	$c_{11} + 3c_{55} + c_{23} + c_{24} + c_{34} + 2c_{15} -$ $- c_{12} - c_{13} - c_{14} - 2c_{25} - 2c_{35} - 2c_{45} \geq 0$
3	3	1	1	1	−1	−2	$c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{55} + c_{12} + c_{13} + c_{23} + 2c_{45} +$ $- c_{14} - c_{24} - c_{34} - 2c_{15} - 2c_{25} - 2c_{35} \geq 0$
3	2	2	1	1	−1	−2	$c_{11} + c_{22} + c_{55} + c_{12} + c_{34} + 2c_{35} + 2c_{45} -$ $- c_{13} - c_{14} - c_{23} - c_{24} - 2c_{15} - 2c_{25} \geq 0$

1. táblázat. Szükséges és elégséges feltételek $n = 5$ esetén

Jelölje $\mathcal{C}_n$ azoknak az $n \times n$ méretű valós szimmetrikus $\mathbf{C}$ mátrixoknak a halmazát, melyekre az (1) feltételrendszernek létezik nemnegatív megoldása. Jelölje $\mathcal{D}_n$ azoknak az $n \times n$ méretű valós szimmetrikus $\mathbf{D}$ mátrixoknak a halmazát, melyek elemeire teljesül

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} d_{i_j i_k} \geq 0$$

az $i_1, i_2, \ldots, i_s$ $(1 \leq s \leq n)$ indexek minden olyan rendszere esetén, ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n$. [6]-ban a szerző megmutatja, hogy a $\mathcal{C}_n$ és $\mathcal{D}_n$ halmazok konvex kúpok a szimmetrikus mátrixok mint vektorok $\frac{n(n+1)}{2}$ dimenziós euklideszi terében, melyekre fennáll, hogy $\mathbf{D} \in \mathcal{D}_n$ akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} d_{ik} \geq 0 \quad \text{minden} \quad \mathbf{C} \in \mathcal{C}_n \text{ esetén},$$

és $\mathbf{C} \in \mathcal{C}_n$ akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} d_{ik} \geq 0 \quad \text{minden} \quad \mathbf{D} \in \mathcal{D}_n \text{ esetén}. \tag{5}$$

Az ilyen tulajdonságú kúp párokat egymás duálisának (vagy polárjának) szokták nevezni, gyakran fordított egyenlőtlenségekkel értelmezve, de az általunk végzett vizsgálatok szempontjából mindegy, hogy a lehetséges értelmezések melyik módozatát választjuk.

Az előbbi megállapítás alapján kimondhatjuk, hogy egy $\mathbf{C}$ empirikus kovarianciamátrixra akkor és csak akkor létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$ paraméter halmaz, ha fennáll (5). Ebből következik az alábbi szükséges és elégséges feltétel. (Ez lényegében a [6] dolgozat 4.2′. állítása.)

3.1. TÉTEL. *Egy* $\mathbf{C}$ *empirikus kovarianciamátrixra akkor és csak akkor létezik az (1) feltételeknek eleget tevő, csupa nemnegatív komponensből álló* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$ *paraméter halmaz, ha*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} d_{ik} \geq 0 \quad \textit{minden olyan} \quad \mathbf{D} \in \mathcal{D}_n \textit{ esetén,}$$

mely a $\mathcal{D}_n$ *kúpnak extremális iránya.*

E tétel gyakorlati értéke azon múlik, hogy meg tudjuk-e határozni $\mathcal{D}_n$ extremális irányait.

A 2.1. lemma alapján annyi rögtön látszik, hogy a következő mátrixok mind elemei (de nem okvetlenül extremális irányai) a $\mathcal{D}_n$ halmaznak. (Ehhez a 2.1. lemma (4) formuláját írjuk át a főátló alatti elemeket is tartalmazó $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \rho_i \rho_k c_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \rho_i c_{ii} \geq 0$ alakba.)

$$\begin{pmatrix} \rho_1(\rho_1+1) & \rho_1\rho_2 & \rho_1\rho_3 & \ldots & \rho_1\rho_n \\ \rho_2\rho_1 & \rho_2(\rho_2+1) & \rho_2\rho_3 & \ldots & \rho_2\rho_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_n\rho_1 & \rho_n\rho_2 & \rho_n\rho_3 & \ldots & \rho_n(\rho_n+1) \end{pmatrix} \tag{6}$$

A $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ paraméterek itt is előjelben nem korlátozott egész értékeket vehetnek fel, közöttük lehetnek 0-k és azonosak is.

Ismét összegyűjtve az azonos ρ_i értékeket az $I_1, I_2, \ldots, I_s$ indexhalmazokba és bevezetve az $I_0 = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \bigcup_{p=1}^{s} I_p$ jelölést, a (6) alatti $\mathbf{D} \in \mathcal{D}_n$ mátrix elemei a következőképpen is megadhatók:

$$d_{ii} = \begin{cases} r_p(r_p+1) & \text{ha } i \in I_p,\ 1 \le p \le s, \\ 0 & \text{ha } i \in I_0, \end{cases} \tag{7}$$

$$d_{ik} = \begin{cases} r_p^2 & \text{ha } i,k \in I_p,\ i \neq k,\ 1 \le p \le s, \\ 0 & \text{ha } i,k \in I_0,\ i \neq k, \end{cases} \tag{8}$$

$$d_{ik} = \begin{cases} r_p r_q & \text{ha } i \in I_p,\ k \in I_q,\ 1 \le p,\ q \le s,\ p \neq q \\ 0 & \text{ha } i \in I_0 \text{ vagy } k \in I_0. \end{cases} \tag{9}$$

Az összes extremális irány számának meghatározása $n = 5$-re és $n = 6$-ra a kettős leíró módszerre (double description method) Fukuda által implementált cdd+ programrendszer (lásd [7]) használatával történt. Az eredmény:

A $\mathcal{D}_5$ halmaz extremális irányainak száma 210.
A $\mathcal{D}_6$ halmaz extremális irányainak száma 38780.

Izomorfia (vagyis ekvivalencia) vizsgálat alapján ezek a számok jelentősen csökkenthetők. Két azonos méretű szimmetrikus mátrixot izomorfnak és egyúttal ekvivalensnek tekintünk, ha szimmetrikus sor-oszlop permutáció egyiket a másikba viszi.

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{D} \in \mathcal{D}_n$ extremális irány, akkor az összes $\mathbf{D}$-vel ekvivalens mátrix is eleme és extremális iránya a $\mathcal{D}_n$ kúpnak. Saját készítésű gépi program használatával $n = 5$ és $n = 6$ esetére meghatároztuk az egymással nem ekvivalens extremális irányok számát, melyre a következő eredményt kaptuk:

A $\mathcal{D}_5$ halmaz egymással nem ekvivalens extremális irányainak száma 12.
A $\mathcal{D}_6$ halmaz egymással nem ekvivalens extremális irányainak száma 145.

Az alkalmazott módszer lényege, hogy valamilyen szisztematikus leszámlálási eljárással minden esetben az egymással nem ekvivalens struktúrák (esetünkben extremális irányok vagy, ha úgy tetszik, mátrixok) számát határozzuk meg. E célból valamilyen lexikografikus rendezési elv alapján minden ekvivalenciaosztályból egyet, a lexikografikus értelemben legkisebbet tároljuk a leszámlálás során.

Az $n = 5$ esetre az izomorf alakzatok kizárása után kapott 12 extremális irány a 2.1. tétel feltételrendszeréből is kikövetkeztethető, ha az 1. táblázatban megadott s, n_i és r_i paraméterekkel írjuk fel a 2.1. tétel feltételeit. E táblázatban felsoroljuk először a 8 korábban (az 1.1. tétel alapján) is ismert feltétel fajtát, majd a vízszintes vonal alatt folytatjuk a később talált 4 feltétel fajtával.

A mátrixelemek indexeit variálva, a táblázatban felsorolt 12 feltételtípusból típusonként 10, 20, 30, 20, 5, 30, 10, 10 (eddig összesen 135 régi), 5, 20, 20, 30, mindösszesen 210 feltétel adódik. A $\mathcal{D}_5$ konvex kúpnak ugyanennyi extremális irányát kapjuk meg a 2. táblázatban felsorolt mátrixokból a sorok és oszlopok szimmetrikus permutációi segítségével.

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}
$$

2. táblázat. $\mathcal{D}_n$ extremális irányai $n = 5$ esetén

Megjegyezzük, hogy számítógép nélkül, standard matematikai módszerekkel elméleti úton is bizonyítható, hogy az 1. táblázatban felsorolt feltételek között – az indexek variációit is figyelembe véve – nincsenek redundánsak. Az elméleti bizonyítást az olvasóra bízzuk, és ennek megkönnyítésére felsoroljuk az extremális irányoknak megfelelő mátrixokat is (2. táblázat).

Struktúrák ekvivalenciaosztályainak vizsgálata során illik megadni az egyes osztályok automorfizmus-csoportjának rendjét. Szimmetrikus mátrixok ekvivalenciaosztályai esetén automorfizmusok azok a – sorok és oszlopok szimmetrikus permutációjával értelmezett – leképezések, amelyek az adott mátrixot változatlanul hagyják. Megvizsgálva ebből a szempontból a 2. táblázatban megadott mátrixokat, könnyen látható, hogy e mátrixok esetén automorfizmusok azok az indexpermutációk, amelyek csak az azonos (n_i, r_i) párokhoz tartozó indexeket, továbbá az esetleges csupa 0 értéket tartalmazó sorok indexeit permutálják. Az automorfizmuscsoportok tehát ezekben az esetekben kisméretű szimmetrikus csoportok direkt összegei. A táblázatban megadott mátrixok automorfizmus-csoportjának rendje eszerint minden esetben a

$$\prod_{i=0}^{s} n_i! \quad \left(\text{ahol } n_0 = n - \sum_{i=1}^{s} n_i\right) \tag{10}$$

képlettel kapható meg, és így a 12 mátrix automorfizmus-csoportjának a rendjére sorrendben a 12, 6, 4, 6, 24, 4, 12, 2, 24, 6, 6, 4 értéket kapjuk.

Itt érdemes mindjárt megjegyezni, hogy a (10) képlet tetszőleges n esetén is érvényes minden olyan szimmetrikus mátrixra, melynek elemeit a (7)–(9) előírással képezzük.

Rátérve az $n = 6$ eset vizsgálatára, a 145 egymással nem ekvivalens extremális irány, illetve az ezeknek megfelelő mátrixok áttekintése során az derült ki, hogy ezek közül csak 31 mátrix adható meg a 2.1. tételben és a (7)–(9) formuláknál használt jelölésekkel. Sajnos, ez azt is jelenti, hogy az $n = 6$ esetre érvényes szükséges és elégséges feltételrendszer feltételei közül ezeknek csak körülbelül egynegyede vezethető le a 2.1. tétel alapján. Ezek közül 12 mátrix az 1. táblázat soraihoz tartozó (és a 2. táblázatban szemléltetett) 12 mátrixnak egy-egy csupa 0 elemű sorral és oszloppal történő kiegészítéseként adódik. Az ott még nem szerepelt újabb 19 esetnek a felsorolását a 3. táblázat tartalmazza. Az e táblázat sorainak megfelelő egyenlőtlenség feltételek az 1. táblázathoz, azok mátrix reprezentációi a 2. táblázathoz hasonló módon írhatók fel.

s	n_1	n_2	n_3	n_4	r_1	r_2	r_3	r_4
2	1	5	–	–	1	-1	–	–
2	2	4	–	–	1	-1	–	–
2	3	3	–	–	1	-1	–	–
2	4	2	–	–	1	-1	–	–
2	4	2	–	–	-1	2	–	–
2	5	1	–	–	-1	2	–	–
3	1	4	1	–	1	-1	2	–
3	2	3	1	–	1	-1	2	–
3	2	3	1	–	1	-1	-2	–
3	3	1	2	–	1	-1	-2	–
3	3	2	1	–	1	-1	-2	–
3	4	1	1	–	1	-1	-2	–
2	4	2	–	–	1	-2	–	–
2	5	1	–	–	-1	3	–	–
3	1	4	1	–	1	-1	3	–
3	3	2	1	–	1	-1	-3	–
3	4	1	1	–	1	-1	-3	–
4	1	3	1	1	1	-1	2	-2
4	2	2	1	1	1	-1	2	-2

3. táblázat. Néhány további szükséges feltétel $n = 6$ esetén

A hátralévő további 114 extremális irány mátrixa közül a legtöbb egyáltalán nem, vagy alig rendelkezik felismerhető struktúrával. Ezért ezeknek a mátrixoknak az egyenkénti vizsgálata nem túlságosan érdekes. A részletes vizsgálat helyett csak néhány példát mutatunk itt $\mathcal{D}_6$ olyan extremális irányaira, melyek nem vezethetők le a 2.1. tételből:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ezek még viszonylag szabályos struktúrával rendelkező mátrixok. (Az egymással nem ekvivalens extremális irányok teljes listáját a Függelék tartalmazza.)

4. Az illeszthetőség vizsgálata rácspontok esetén

Ebben a szakaszban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy mekkora annak a veszélye, hogy a (3) szükséges feltételen alapuló illesztő algoritmus nem állít elő pontosan illeszkedő többdimenziós gamma-eloszlást. E célból kiszámítjuk és összehasonlítjuk a rácspontok számát a (3) feltételnek eleget tevő $\mathbf{C}$ mátrixok halmazának, illetve a $\mathcal{C}_n$ halmaznak korlátos metszeteiben (adott élhosszúságú kockákban). A továbbiakban ismertetjük a leszámlálásra alkalmazott módszer részleteit és eredményét.

A gamma-eloszlás illeszthetőségének, tehát az (1) egyenletrendszer megoldhatóságának a kérdését itt olyan $\mathbf{C}$ szimmetrikus mátrixok esetén vizsgáljuk, melyeknek minden elemére teljesül

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le c_{ij} \le \lambda \\ c_{ij} \text{ egész} \end{array}\right\} \quad (1 \le i, j \le n). \tag{11}$$

Kis n-ek és λ-k esetén ($n \le 6,\ \lambda \le 9$, de az utóbbinak a korlátja n-től is függ) meghatározzuk az olyan $\mathbf{C}$ mátrixok számát, melyek kielégítik az 1.1. tétel, illetve a 3.1. tétel feltételrendszerét, és egyidejűleg eleget tesznek a (11) korlátossági és egészértékűségi követelménynek is. Ellenőrzési célból összeszámoljuk az olyan különböző **C** empirikus kovarianciamátrixok számát is, melyek úgy adódnak, hogy λ-nál nem nagyobb nemnegatív egész értékű ϑ_l értékeket helyettesítünk be az (1) feltételrendszer bal oldalán álló kifejezésbe minden lehetséges módon, és meghatározzuk, hogy az így kapott különböző **C** mátrixok közül hányra teljesül, hogy minden mátrixelem abszolút értéke legfeljebb λ.

A leszámlálás eredményét az 4. táblázatban mutatjuk be. (E táblázatból az is látható, hogy a különböző n értékek esetén milyen λ-kra végeztük el az összehasonlító leszámlálást.) A leszámlálásra és ekvivalenciavizsgálatra készített programok helyességének teszteléseként először $n = 3$-ra és $n = 4$-re végeztük el a számítást, és azt találtuk, hogy ezekre az n-ekre $\lambda \le 9$-ig a különböző módon elvégzett leszámlálások azonos eredményt adnak. Ez nem meglepő, mivel tudjuk, hogy a (3) feltétel $n \le 4$ esetén szükséges és elégséges. Mégis kaptunk ezzel egy nem túl erős, de talán ennek ellenére említést érdemlő mellékeredményt:

4.1. Tétel. *Ha valamely* 3×3 *vagy* 4×4 *méretű* **C** *mátrix minden eleme* 10*-nél kisebb egész és az (1) rendszernek van nemnegatív megoldása, akkor van (1)-nek olyan nemnegatív megoldása is, amely csupa egész értékű komponensből áll.*

Megjegyezzük, hogy $n = 3$-ra az 4.1. tételben megfogalmazott állítás a $\lambda < 10$ korlát nélkül is igaz. Ez könnyen látható a [6] cikk 4. szakaszában közölt gondolatmenetből, amely $n = 3$ esetén a (3) illeszthetőségi feltételek elégségességét bizonyítja.

$\lambda\backslash n$	2	3	4	5			6		
1	4	7	12	19	19	19	30	30	30
2	10	32	108	373	371	370	1365	1339	1332
3	20	110	759	6593	6549	6546	75567	73498	73265
4	35	313	4230	90667	90152	90144	3259603	3177039	3174592
5	56	771	19190	929050	924671	924660			
6	84	1702	73239						
7	120	3442	241999						
8	165	6487	709746						
9	220	11533	1884440						

4. táblázat. Az egymással nem ekvivalens **C** mátrixok száma 3 különböző értelmezésben

A 4. táblázat $n = 5$-re és $n = 6$-ra három oszlopot tartalmaz. Ilyenkor az azonos n-hez tartozó három oszlop közül a balra lévő (kisebb fontmérettel nyomtatott) oszlop a (3) feltételrendszernek eleget tevő **C** mátrixok számát, a középső (normál mérettel nyomtatott) oszlop a szükséges és elégséges feltételrendszernek eleget tevő **C** mátrixok számát mutatja, a jobbra lévő (megint kisebb mérettel nyomtatott) oszlop pedig a nemnegatív ϑ_l értékek behelyettesítése útján nyert **C** mátrixok számát.

Az $n = 2$-höz tartozó oszlop értékeit meghatározó fájlokat még közvetlenül generáltuk az alábbi észrevétel alapján: $n = 2$ és tetszőleges λ esetén az e paraméterértékeknek megfelelő fájl azon 2×2 méretű szimmetrikus **C** mátrixokból áll, melyek elemeire fennáll

$$0 \le c_{12} \le c_{11} \le c_{22} \le \lambda,$$

az ilyen (c_{12}, c_{11}, c_{22}) hármasok száma pedig

$$\binom{\lambda+3}{3}.$$

$n \ge 3$ esetén az n-hez tartozó fájl elkészítéséhez a program inputként használja az $(n-1)$-hez tartozó fájlt.

A leszámlálás eredményei bizonyos mértékig választ adnak arra a kérdésre, hogy a (3) feltételekre épülő algoritmus mennyire megbízható. Ez jórészt azon múlik, hogy a (3) feltételrendszernek eleget tevő **C** mátrixok között milyen arányban fordulnak elő „hamis megoldások”, vagyis olyanok, amelyek nem elemei a $\mathcal{C}_n$ halmaznak. Az előzőekben specifikált rácspontokra $n = 5\,; \lambda = 2, 3, 4, 5$, illetve $n = 6$, $\lambda = 2, 3, 4$ esetén a 4. táblázat adataiból kiszámítható, hogy ez a részarány a vizsgált esetekben 0,47 és 2,74 százalék között van, és ez elég megnyugtatónak tűnik.

Végül két példát mutatunk „hamis megoldás” előfordulására. Válasszuk ehhez a 4. táblázatban a legegyszerűbb olyan esetet, amikor a különböző értelemben vett leszámlálások eredményei között eltérés van. Ez az $n = 5$, $\lambda = 2$ eset. Most tekintsük azokat a 0, 1, 2 elemű 5×5 méretű mátrixokat, amelyek a (3) feltételrendszernek eleget tesznek, viszont egész értékű ϑ_l-ek behelyettesítésével nem állíthatók elő. Három ilyen mátrix van, mivel a leszámlálás 373 mátrixot generált az első, 370 mátrixot a harmadik esetben. Ezek a mátrixok a következők:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A mátrixelemek behelyettesítésével verifikálható, hogy mindhárom mátrix maradéktalanul eleget tesz a (3) feltételrendszernek, viszont $\mathbf{C}_1$ és $\mathbf{C}_2$ esetén (1)-nek mégsincs nemnegatív megoldása, tehát $\mathbf{C}_1$ és $\mathbf{C}_2$ mint empirikus kovarianciamátrixok esetén a gamma eloszlás nem illeszthető pontosan.

Konkrét számításhoz (1) helyett célszerűbb a vektoriális (2) feltételrendszert tekinteni. Az ebben előforduló $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix $n = 5$ esetén a következő:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccc}
1&&&&& 1&1&1&1&& &&&&& 1&1&1&1&1& 1&&&&& 1&1&1&1&& 1 \\
&1&&&& 1&&&&1& 1&1&&&& 1&1&1&&& &1&1&1&& 1&1&1&&1& 1 \\
&&1&&& &1&&&1& &&1&1&& 1&&&1&1& &1&1&&1& 1&1&&1&1& 1 \\
&&&1&& &&1&&& 1&&1&&1& &1&&1&& 1&1&&1&1& 1&&1&1&1& 1 \\
&&&&1& &&&1&& &1&&1&1& &&1&&1& 1&&1&1&1& &1&1&1&1& 1 \\
&&&&& 1&&&&& &&&&& 1&1&1&&& &&&&& 1&1&1&&& 1 \\
&&&&& &1&&&& &&&&& 1&&&1&1& &&&&& 1&1&&1&& 1 \\
&&&&& &&1&&& &&&&& &1&&1&& 1&&&&& 1&&1&1&& 1 \\
&&&&& &&&1&& &&&&& &&1&&1& 1&&&&& &1&1&1&& 1 \\
&&&&& &&&&1& &&&&& 1&&&&& &1&1&&& 1&1&&&1& 1 \\
&&&&& &&&&& 1&&&&& &1&&&& &1&&1&& 1&&1&&1& 1 \\
&&&&& &&&&& &1&&&& &&1&&& &&1&1&& &1&1&&1& 1 \\
&&&&& &&&&& &&1&&& &&&1&& &1&&&1& 1&&&1&1& 1 \\
&&&&& &&&&& &&&1&& &&&&1& &&1&&1& &1&&1&1& 1 \\
&&&&& &&&&& &&&&1& &&&&& 1&&&1&1& &&1&1&1& 1
\end{array}\right)$$

(Az áttekinthetőség kedvéért a 0-k helyét üresen hagytuk a mátrixban.)

Szorozzuk meg a (2) feltételrendszerben álló egyenlőségrendszer mindkét oldalát balról az

$$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2, -2, -2,\ 1, -1, -1, -1, -1,\ 1)$$

sorvektorral. Ezáltal azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1 + \vartheta_4 + \vartheta_5 + 3\vartheta_6 + 3\vartheta_7 + \vartheta_{10} + 3\vartheta_{15} + 6\vartheta_{16} + \vartheta_{17} + \\
&\quad + \vartheta_{18} + \vartheta_{19} + \vartheta_{20} + \vartheta_{24} + \vartheta_{25} + 3\vartheta_{26} + 3\vartheta_{27} + \vartheta_{31} = \\
&= c_{11} + c_{44} + c_{55} + 2c_{12} + 2c_{13} - 2c_{14} - 2c_{15} + \\
&\quad + c_{23} - c_{24} - c_{25} - c_{34} - c_{35} + c_{45} = -1,
\end{aligned}$$

és ez ellentmond a ϑ vektorra megkövetelt nemnegativitásnak.

Hasonló módszert alkalmazhatunk a $\mathbf{C}_2$ mátrixra is, de ehhez a

$$(3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2, -2, -2, -2, -1, -1, -1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

sorvektorral érdemes szorozni, hogy a kívánt célt elérjük. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&3\vartheta_1+\vartheta_2+6\vartheta_6+\vartheta_7+\vartheta_8+\vartheta_9+\vartheta_{13}+\vartheta_{14}+\vartheta_{15}+3\vartheta_{16}+\\&\quad+3\vartheta_{17}+3\vartheta_{18}+3\vartheta_{25}+\vartheta_{26}+\vartheta_{27}+\vartheta_{28}+\vartheta_{30}\\&=3c_{11}+c_{22}+2c_{12}-2c_{13}-2c_{14}-2c_{15}-c_{23}-\\&\quad-c_{24}-c_{25}+c_{34}+c_{35}+c_{45}=-1,\end{aligned}$$

ami ismét ellentmond ϑ nemnegativitásának.

Egész más a helyzet a $\mathbf{C}_3$ mátrixszal. Ez a mátrix arra az esetre példa, amikor a (2) feltételrendszernek van nemnegatív megoldása, de nincs egész értékű nemnegatív megoldása. Egy nemnegatív megoldás a következő:

$$\vartheta_l=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{ha } l\in\{7,8,9,10,11,12,29,30\}\\ 0 & \text{az összes többi } l \text{ indexre.}\end{cases}$$

Ilyen esetek előfordulása magyarázza, hogy a 4. táblázatban az $n=5$-höz és $n=6$-hoz tartozó három számoszlop közül a második és a harmadik oszlop kissé eltér egymástól.

FÜGGELÉK

A $\mathcal{D}_6$ halmaz egymással nem ekvivalens extremális iránya

d_{11}	d_{22}	d_{33}	d_{44}	d_{55}	d_{66}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}	d_{34}	d_{35}	d_{36}	d_{45}	d_{46}	d_{56}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	−1
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	−1	1	−1	−1
0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	1	1	−1	1	1	−1	1	−1	−1
0	0	0	0	0	2	1	1	1	1	−1	1	1	1	!1	1	1	−1	1	−1	−1
0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	1	1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	2	2	1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	−1	−1	!1	−1	1
0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1
0	0	0	2	2	2	1	1	−1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1
0	0	2	2	2	2	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1
0	0	4	4	4	4	3	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	0	0	0	6	1	1	1	1	−2	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	0	0	6	6	1	1	1	−2	−2	1	1	!2	−2	1	−2	−2	−2	−2	4
0	0	0	0	0	12	1	1	1	1	−3	1	1	1	−3	1	1	−3	1	−3	−3
2	2	2	2	2	2	1	1	1	−2	−2	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	4
0	0	0	0	0	6	1	1	1	2	−2	1	1	2	−2	1	2	−2	2	−2	−3
0	0	0	0	0	12	1	1	1	2	−3	1	1	2	−3	1	2	−3	2	−3	−5
0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	1	−1	−1	2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	0	2	2	2	1	1	−1	−1	2	1	−1	−1	2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	1	−1	−1	−1	2	−1	−1	−1	2	1	1	−2	1	−2	−2
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	−1	2	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	2	2	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	4
0	0	2	2	2	2	1	−1	−1	2	2	−1	−1	2	2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	2	4	4	4	3	5	−2	−2	−2	5	−2	−2	−2	−3	−3	−3	1	1	1
0	2	4	4	4	4	5	−2	−2	−2	−2	−3	−3	−3	−3	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	2	6	0	0	0	0	0	1	1	−1	−2	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	0	0	2	6	1	1	1	−1	−2	1	1	−1	−2	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	0	2	2	6	1	1	−1	−1	−2	1	−1	−1	−2	−1	−1	−2	1	2	2
0	0	2	2	2	6	1	−1	−1	−1	3	−1	−1	−1	3	1	1	−3	1	−3	−3
0	2	2	2	2	6	−1	−1	−1	−1	3	1	1	1	−3	1	1	−3	1	!3	−3
0	0	0	2	6	6	1	1	−1	2	−2	1	−1	−2	−2	−1	−2	−2	2	2	3
0	0	0	0	2	12	1	1	1	−1	−3	1	1	−1	−3	1	−1	−3	−1	!3	3
0	0	0	4	6	6	1	1	3	−2	−2	1	3	−2	−2	3	−2	−2	−5	−5	3
0	0	0	0	6	12	1	1	1	−2	−3	1	1	−2	−3	1	−2	−3	−2	−3	5
0	0	0	0	4	4	0	0	1	−1	−1	1	2	−1	−1	2	−1	−1	−2	−2	1
0	0	0	4	4	4	0	1	−1	−1	−1	2	−1	−1	−1	−2	−2	−2	1	1	1
0	0	0	4	4	4	1	2	−1	−1	−1	3	−2	−2	−2	−2	−2	−2	1	1	1
0	0	0	0	0	6	0	1	1	1	−1	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	0	0	2	2	1	1	1	0	−1	1	1	0	−1	1	−1	0	−1	0	−1
0	0	0	2	2	2	0	0	1	1	−1	1	−1	−1	2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	0	1	1	1	−1	−1	−1	−1	2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	0	2	2	4	0	0	1	1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	0	0
0	0	0	2	4	4	0	0	1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	1
0	0	2	2	2	4	0	−1	−1	−1	1	1	1	1	−2	1	1	−2	1	−2	−2

d_{11}	d_{22}	d_{33}	d_{44}	d_{55}	d_{66}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}	d_{34}	d_{35}	d_{36}	d_{45}	d_{46}	d_{56}
0	0	0	0	2	4	1	1	2	−1	−1	1	2	−1	−1	2	−1	−1	−1	−2	0
0	0	0	2	4	4	1	2	−1	−1	−1	2	−1	−1	−1	−1	−2	−2	0	0	1
0	0	0	0	2	6	1	1	1	0	−2	1	1	0	−2	1	−1	−2	−1	−2	1
0	0	0	0	2	6	1	1	2	−1	−2	1	2	−1	−2	2	−1	−2	−1	−3	2
0	0	0	0	4	6	1	1	2	−1	−2	1	2	−1	−2	2	−1	−2	−2	−3	1
0	0	0	0	6	6	1	1	1	−1	−2	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	0	0	6	12	1	1	2	−2	−3	1	2	−2	−3	2	−2	−3	−3	−5	5
0	0	2	2	2	4	1	−1	−1	2	−1	−1	−1	2	−1	1	−2	0	−2	0	−1
0	2	2	2	2	4	−1	−1	−1	2	1	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	2	2	2	2	4	−1	−1	−1	2	−2	1	1	−2	2	1	−2	2	−2	2	−3
0	2	2	2	2	4	1	1	1	−1	−2	1	1	−2	−2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	0	2	2	6	1	1	−1	2	−2	1	−1	2	−2	−1	2	−2	−2	2	−4
0	0	2	2	2	6	1	−1	−1	2	−2	−1	−1	2	−2	1	−2	2	−2	2	−4
0	2	2	2	2	6	−1	−1	−1	2	3	1	1	−2	!3	1	−2	!3	−2	−3	5
0	0	2	2	2	10	1	−1	−1	2	−3	−1	−1	2	−3	1	−2	3	−2	3	−5
0	0	2	2	2	10	1	−1	2	2	−3	−1	2	2	−3	−2	−2	3	3	−5	−5
0	2	2	2	2	10	−1	−1	2	2	−3	1	−2	−2	3	−2	−2	3	3	−5	−5
0	0	0	2	4	6	1	1	−1	−1	−2	1	−1	−1	−2	−1	−1	−2	0	2	1
0	0	0	2	4	6	1	1	−1	3	−2	1	−1	3	−2	−1	3	−2	−3	2	−5
0	0	2	4	6	6	1	−1	3	−2	−2	−1	3	!2	−2	−3	2	2	−5	−5	3
0	2	2	2	4	6	−1	−1	−1	−2	3	1	1	2	−3	1	2	−3	2	−3	−5
2	2	2	2	4	6	1	1	−2	2	−3	1	!2	2	−3	−2	2	−3	−3	5	−5
0	0	0	0	4	4	0	0	1	−1	−1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	4	4	0	1	2	−1	−1	2	1	−1	−1	3	−2	−2	−2	−2	1
0	0	0	0	2	2	0	1	1	0	−1	1	1	−1	0	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	2	2	0	1	1	0	−1	1	1	−1	1	1	−1	0	−1	0	−1
0	0	0	2	2	2	0	1	0	−1	−1	1	−1	1	1	−1	0	0	−1	−1	1
0	0	0	2	2	2	0	0	−1	1	1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	0	2	4	0	0	1	1	−1	1	2	−1	−1	2	−1	−1	−1	−2	0
0	0	0	0	2	4	0	1	1	0	−1	1	1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	0
0	0	0	2	2	4	0	1	−1	−1	1	1	1	1	−2	0	0	−1	1	−2	−2
0	0	0	2	4	4	0	1	1	−1	−1	2	−1	−1	−1	−1	−2	−2	0	0	1
0	0	0	0	2	6	0	1	1	−1	−1	1	1	1	−2	1	0	−2	0	−2	−1
0	0	0	0	2	6	0	1	1	0	−1	1	1	−1	−2	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	0	0	6	6	0	1	1	−1	−2	1	1	!2	−1	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	0	2	2	2	1	1	0	−1	1	1	−1	−1	2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	1	−1	−1	−1	2	1	1	−2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	0	0	1	−1	−1	−1	−1	1	1	0	−1	−1	−1	−1	1
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	2	1	−1	−1	2	−1	−1	1	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	−1	−1	0	−1	1	−1	1	−1	1	0
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	1	−1	−1	0	2	1	−1	−2	−1	−2	1
0	0	2	2	2	2	1	0	1	−1	−1	1	0	−1	−1	0	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	2	2	4	0	0	1	−1	−1	1	−1	2	−1	−1	2	−1	−2	0	−1
0	0	2	2	2	4	0	1	1	−1	−1	−1	−1	2	−1	1	−2	0	−2	0	−1
0	0	0	2	2	4	1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	0	0
0	0	2	2	2	4	0	0	−1	−1	1	−1	1	1	−2	−1	−1	2	1	−2	−2
0	0	2	2	2	4	0	1	1	−1	−2	−1	−1	2	1	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	2	2	2	4	1	−1	−1	2	−1	−1	−1	2	−2	1	−2	2	−2	2	−3
0	0	2	2	2	4	1	0	−1	−1	−1	1	−1	−1	−2	−1	−1	−2	1	2	2
0	0	2	2	2	4	1	0	0	−1	−1	1	1	−1	−2	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	2	2	2	4	1	0	0	−1	−1	−1	−1	0	1	1	−1	−2	−1	−2	2
0	0	0	2	2	6	1	1	−1	1	−2	1	−1	2	−2	−1	2	−2	−2	2	−3

d_{11}	d_{22}	d_{33}	d_{44}	d_{55}	d_{66}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}	d_{34}	d_{35}	d_{36}	d_{45}	d_{46}	d_{56}
0	0	0	2	2	6	1	1	0	−1	−1	1	−1	0	−2	−1	0	−2	−1	2	−1
0	0	0	2	2	6	1	1	0	−1	−2	1	−1	−1	−2	−1	−1	−2	1	1	2
0	0	0	2	2	6	1	1	0	−1	−2	1	0	−1	−2	−1	0	−2	−1	1	1
0	0	0	2	2	6	1	1	0	−1	−2	1	0	−1	−2	1	−1	−2	−1	−1	2
0	0	0	2	2	6	1	1	0	1	−2	1	−1	2	−2	−1	2	−2	−2	1	−3
0	0	0	2	4	6	1	2	−1	−1	−2	2	−1	−1	!2	−1	−2	−3	0	2	1
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	−1	2	0	1	1	−1	1	1	−2	1	−2	−2
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	2	2	1	1	−1	!2	1	−2	−2	−2	−2	3
0	2	2	2	2	2	0	−1	−1	−1	2	0	−1	−1	1	1	1	−2	1	−2	−2
0	2	2	2	2	2	0	0	−1	−1	1	1	−1	1	!2	−1	1	−2	0	1	−2
0	2	2	2	2	4	0	−1	−1	2	−1	−1	−1	1	!2	1	−2	2	−2	2	−3
0	2	2	2	2	4	1	−1	−1	2	−2	−1	−1	1	!2	1	−2	2	−2	2	−3
0	0	2	2	2	6	1	−1	−1	2	−2	−1	−1	2	!2	1	−2	1	−2	2	−3
0	2	2	2	4	6	−1	−1	2	−2	3	1	−2	2	−3	−2	2	−3	−3	5	−5
2	2	2	2	2	2	0	1	1	−1	−2	1	1	!2	−1	1	−2	−2	−2	−2	3
0	0	0	0	0	4	0	0	1	1	−1	1	0	1	−1	1	0	−1	0	−1	−1
0	0	0	0	2	2	0	0	1	−1	1	1	0	1	−1	1	0	−1	−1	0	−1
0	0	0	0	2	4	0	0	1	−1	−1	1	0	1	−1	1	0	−1	−1	−1	0
0	0	0	2	2	2	0	0	−1	−1	1	1	0	1	−1	1	0	−1	0	−1	−1
0	0	0	2	2	2	0	1	0	−1	1	1	−1	0	−1	−1	−1	0	1	0	−1
0	0	0	2	2	2	0	1	0	1	−1	1	−1	−1	1	−1	0	0	0	−1	−1
0	0	0	2	2	2	1	1	0	−1	−1	1	−1	0	−1	−1	−1	−1	0	1	1
0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	−1	1	0	−1	−1	−1	−1	0	1	−1	0
0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	−1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	−1	1	0	−1	0	−1	0	−1	−1	1	−1
0	0	0	2	2	2	1	1	0	0	−1	1	0	−1	0	1	−1	−1	−1	−1	0
0	0	0	2	2	4	0	0	−1	1	−1	1	0	−1	−1	1	−1	−1	−1	0	0
0	0	0	2	2	4	0	1	0	−1	−1	1	−1	0	−1	−1	−1	−1	1	0	0
0	0	0	2	2	4	0	1	0	−1	−1	1	−1	1	−1	−1	0	−1	−1	0	0
0	0	0	2	2	4	0	1	0	−1	1	1	−1	1	!2	−1	0	−1	−1	2	−2
0	0	0	2	2	6	0	1	0	−1	−1	1	−1	1	!2	−1	0	−2	−1	2	−1
0	0	2	2	2	2	0	0	−1	1	−1	−1	0	−1	1	1	0	−1	−1	0	−1
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	−1	−1	0	−1	−1	−1	0	1	1	0	1
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	1	−1	0	−1	2	−1	1	−2	0	1	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	2	−1	−1	−1	2	0	1	−1	1	−2	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	−1	−1	2	−1	0	−1	2	−1	0	−1	1	−1	−2
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	−1	−1	0	0	1	0	−1	−1	−1	1
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	−1	1	−1	−1	−1	0	1	−1	−1	1
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	0	−1	0	−1	−1	−1	−1	0	1	1
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	0	−1	0	−1	1	−1	−1	−1	0	1
0	0	2	2	2	2	1	0	0	−1	−1	1	−1	0	−1	−1	0	−1	−1	0	1
0	0	2	2	2	4	1	0	−1	2	−1	1	−1	2	−2	−1	1	−2	−2	2	−3
0	0	2	2	2	6	1	0	−1	1	−2	−1	−1	2	−2	1	−2	1	−2	2	−3
0	2	2	2	2	2	−1	−1	−1	2	2	0	1	−1	−2	1	−2	−1	−2	−2	3
0	2	2	2	2	2	0	−1	−1	−1	2	0	−1	1	−1	1	1	−2	0	−1	−2

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki Hujter Mihálynak a kézirat alapos átnézéséért, hasznos észrevételeiért, valamint tanácsaiért, melyekkel segítette a dolgozat végső formájának kialakítását.

Hivatkozások

[1] Kotz, S., Balakrishnan, N. and Johnson, N. L.: *Continuous Multivariate Distributions Volume I: Models and Applications, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000, pp. 434, 442–443, 458–459.

[2] Prékopa, A.: *Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[3] Prékopa, A.: *Stochastic programming*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.

[4] Prékopa, A. és Szántai, T.: *„Egy új, többdimenziós gamma eloszlás és annak illesztése empirikus adatokhoz”*, Alkalmazott Matematikai Lapok **1** (1975) 299–318.

[5] Rényi, A.: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, 1966.

[6] Szántai, T.: *„Új algoritmus a többdimenziós gamma eloszlás empirikus adatokhoz történő illesztésére”*, Alkalmazott Matematikai Lapok **10** (1984) 35–60.

[7] Fukuda, K.: *„cdd and cddplus homepage”*, http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/cdd_home/index.html.

(Beérkezett: 2006. szeptember 4.)

KÉRI GERZSON
MTA SZTAKI
Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport
keri@sztaki.hu

SZÁNTAI TAMÁS
BME TTK
Matematikai Intézet, Differenciálegyenletek Tanszék
szantai@math.bme.hu

COMBINATORIAL PROBLEMS ACCORDING TO CONDITIONS ON FITTING A CONSTRUCTIVELY DEFINED MULTIVARIATE GAMMA DISTRIBUTION TO EMPIRICAL DATA

G. Kéri and T. Szántai

The main goal of this paper is to give new results according to fitting the multivariate gamma distribution introduced in paper [4] to empirical data. This problem was investigated before also in paper [6]. More details of the multivariate gamma distribution and its applications can be found in the books [1], [2], [3] and [5]. The authors of paper [4] proved that the new multivariate gamma distribution not always can be fitted to empirical data when the empirical covariance matrix has all nonnegative components. In paper [6] necessary conditions of the fitting were given and the sufficiency of these conditions was proved for dimension 4. For higher dimensions the question of sufficiency of the necessary conditions remained an open question. In this paper we formulate further necessary conditions. This way we prove that the necessary conditions given earlier are not sufficient. Using the more efficient computation tools we are able now to give the sufficient conditions for dimensions 5 and 6 as well. However, for higher dimensions we have only necessary conditions and the sufficiency of these conditions remains an open question.