Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 163-171.

MARTOS BÉLA (1920–2007)[1] SZABÁLYOZÁSELMÉLETI MUNKÁSSÁGA[2]

SIMONOVITS ANDRÁS

1. Bevezetés

Martos Béla 1960 és 1975 között a nemlineáris programozás terén ért el világra szóló sikereket (vö. Rapcsák, 2006). Kornai János (1971) Anti-equilibriumának megjelenésével párhuzamosan Martos érdeklődése fokozatosan áttevődött a szabályozáselméletre, bár már az Andorka – Dányi – Martos (1967) kötet is ebbe az

[1] Martos Béla optimalitáselméleti munkásságának méltatása az Alkalmazott Matematikai Lapok 23(2006) kötetében található. (*A szerkesztő megjegyzése.*)

[2] Martos Béla halála alkalmával felkért az Alkalmazott Matematikai Lapok szerkesztősége, hogy írjak szabályozáselméleti munkásságáról. Hálával tartozom Vizvári Bélának a tanulmány előző változatához fűzött értékes megjegyzéseiért.

irányba mutatott. Kornai (1971) megjelenésével szinte párhuzamosan jelent meg Kornai – Martos (1971) cikk a vegetatív szabályozásról. Martos a hetvenes évek közepén kezdett el foglalkozni a szabályozások ekvivalenciájával. Kornai (1980) *A hiány*ával szinte egy időben jelent meg Kornai és Martos (1981) szerkesztésében a vegetatív szabályozás addigi modelljeinek egységesített tárgyalása. Végül a kutatás koronájaképpen készült el Martos (1990), amelyben az ekvivalencia mellett a működőképesség is teret kapott. Bár a 75. születésnap alkalmával már írtam egy hasonló visszatekintést, most célszerűnek tartottam egy újat írni, ahol a modellek leegyszerűsítése révén nemcsak tételeket, hanem bizonyításvázlatokat is adhatok. E rövid visszatekintésben e nevezett kérdésekkel a következő felosztásban foglalkozom: 2. A vegetatív szabályozás alapmodellje. 3. Ekvivalens szabályozások. 4. A szabályozások működőképessége. 5. Szubjektív megjegyzések.

2. A vegetatív szabályozás alapmodellje

Folytonos idejű statikus *szabályozási rendszer*ről beszélünk, ha az n-dimenziós $x(t)$ állapotvektor és az m-dimenziós $u(t)$ szabályozási vektor között a következő összefüggések teljesülnek:

Állapotegyenlet

$$\dot{x} = f(x, u),$$

Statikus szabályozási egyenlet

$$u = g(x),$$

ahol a jelöletlen t időváltozó a $[0, \infty)$ félegyenesen fut végig, a változó feletti pont az idő szerint deriváltat jelzi, f és g megfelelően definiált függvény, és adott az x_0 kezdeti állapot.

A neoklasszikus közgazdaságtant bírálva vezette be Kornai (1971) a *vegetatív* szabályozást, amely a piaci és a tervszabályozás alatt működik. Lényege: a termelők elsősorban saját információjukra támaszkodva döntenek: *decentralizáció*. A *készletjelzéses* szabályozás alapmodelljét a következőképpen írhatjuk le. Legyen n a gazdaság ágazatainak száma, és legyen az n-dimenziós $A = (a_{ij})$ négyzetes mátrix az ágazati kapcsolatok mátrixa (egykorú részletes elemzést lásd Bródy, 1969, 1970). Azaz a j-edik ágazat egységnyi kibocsátásához közvetlenül a_{ij} egységre van szükség az i-edik termékből. Ha az n-dimenziós $y(t) = (y_j(t))$ és a $c = (c_j)$ vektor az időben változó kibocsátás, illetve az időben változatlan végső fogyasztás vektora, és $v(t) = (v_i(t))$ az időben változó n-dimenziós készletvektor, akkor definíció szerint fennáll a következő készletváltozási egyenlet:

$$\dot{v} = y - Ay - c,$$

és a v_0 kezdeti készletvektor adott.

Feltesszük, hogy a termelést a lehető legegyszerűbben szabályozzák:

$$y = \bar{y} - \eta v,$$

ahol $\bar{y}$ az n-dimenziós kapacitásvektor és $\eta > 0$ a visszacsatolási együttható. Szóban: minél nagyobb a készlet adott időpontban, arányosan annál kevésbé használják ki a kapacitásokat.

Normál változókról beszélünk, és a v^*, y^* jelölést alkalmazzuk, ha a rendszer időben változatlan marad, azaz

$$v = v^*, \quad \text{azaz} \quad y^* - Ay^* - c = 0, \quad \text{azaz} \quad y^* = (I - A)^{-1}c.$$

A közgazdasági alkalmazásokban (de a matematikai programozásban is) fontos szerepet játszik a *működőképesség,* azaz sem a termelési-, sem a készletvektor nem lehet negatív. Ehhez a mindenkori készletvektornak, v-nek kisebbnek kell lennie, mint $\bar{v} = \bar{y}/\eta$: $0 < v < \bar{v}$. Emellett a normális kibocsátásnak kisebbnek kell lennie, mint a kapacitás: $0 < y^* < \bar{y}$.

Szokás szerint feltesszük, hogy $A \geq 0$, A irreducíbilis, és A spektrálsugara kisebb, mint 1. (Ezek a feltételek természetesek, és ha nem teljesülnének, akkor a rendszer részekre esne szét vagy felrobbanna.) Ekkor az ún. Leontief-inverz, vagy a matematikában ismert kifejezéssel élve, a rezolvens mátrix 1 helyen vett értéke (elemenként) pozitív: $(I - A)^{-1} > 0$, tehát $y^* > 0$. Mi a helyzet a stabilitással, azaz mikor tart aszimptotikusan a készlet a $v^* = (\bar{y} - y^*)/\eta$ normálkészlethez és az y kibocsátás az y^* normál kibocsátáshoz? (Közgazdaságtanban az aszimptotikus jelzőt gyakran elhagyják a stabilitás mellől.) Vezessük be a normától való eltérések vektorát:

$$\hat{v} = v - v^* \quad \text{és} \quad \hat{y} = y - y^*.$$

Ekkor az inhomogén lineáris készletváltozási és termelési egyenlet homogénná válik:

$$\dot{\hat{v}} = (I - A)\hat{y} \quad \text{és} \quad \hat{y} = -\eta\hat{v}.$$

Behelyettesítéssel

$$\dot{\hat{v}} = -\eta(I - A)\hat{v}.$$

Jól ismert, hogy e kezdetiérték-feladat megoldása

$$\hat{v}(t) = e^{-\eta(I-A)t}\hat{v}_0.$$

A korábbi feltevések szerint A minden sajátértéke a nyílt komplex egységkörbe esik, ezért a $-\eta(I - A)$ mátrix összes sajátértékének a valós része negatív, azaz a szabályozás lokálisan stabil, tehát működőképes.

Érdekes módon az úttörő Kornai – Martos cikk jóval bonyolultabb modellt vizsgált. A készleteket felosztotta output és input készletekre, és a termelés mellett megjelent a vétel is. Az A mátrix és c vektor időben tág tartományban változhatott, és a szabályozás is sokkal bonyolultabb volt. Az itt leírt szabályozás csak később, Bródy (1973)-ban, majd Martos (1990)-ben jelent meg. A megértés szempontjából azonban az itt bemutatott szabályozás is elegendő.

3. Ekvivalens szabályozások

Bródy (1973) visszatért a hagyományos ár–profit–termelés-szabályozáshoz, de az árakat a készletektől tette függővé. Legegyszerűbb változatban legyen $p(t) = (p_i(t))$ az időben változó n-dimenziós árvektor, és az időegységre jutó árváltozás legyen egyenlő a profit ellentettjével:

$$\dot{p} = -(I - A)y.$$

A kibocsátás változása pedig a profittal egyezik:

$$\dot{y} = (I - A')p,$$

ahol a $'$ a mátrixtranszponálás jele. Belátható, hogy az egyesített rendszer ciklikusan ingadozik a (p^*, y^*) normálállapot körül.

Érdemes megfigyelni, hogy míg a készletjelzés *decentralizált*, azaz az i-edik vállalat termelési döntése csak saját készletállapotától függ, addig az árszabályozás *centralizált*: az i-edik vállalatnak minden piaci árat ismernie kell, holott azok mindegyikéről más és más vállalat dönt.

A pár éve elhunyt, inkább gyakorlati gazdaságpolitikusként (sőt, később politikusként) ismert Tardos Márton vetette fel annak idején a kérdést egy Közgazdaságtudományi Intézeti vitán: mikor *ekvivalensek* egymással a készlet- és az árszabályozások? Martos Béla 1975 és 1990 között számos tanulmányban vizsgálta e kérdést. Anélkül, hogy teljes definíciót adnánk, két szabályozási rendszert akkor tekinthetünk ekvivalensnek, ha azonos bemenőjelekhez azonos kimenőjelek tartoznak.

Feladva Bródy centralizált árszabályozását, Martos decentralizált árszabályozást is modellezett. Itt csak azt mondhatjuk el, hogy a decentralizált készlet- és árszabályozás nem lehet egymással ekvivalens. Tágabb értelemben viszont hasonlók egymáshoz.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az ekvivalenciavizsgálatot Martos a műszaki irányításelméletben jól ismert Laplace-transzformációra építette. Ez nemcsak magyar, de nemzetközi tekintetben is úttörő kezdeményezés volt; sajnos nem akadtak követői.

4. A szabályozások működőképessége

Eddig a szabályozás működőképességét a szabályozás lokális stabilitásából vezettük le. Martos (1990), (1998) és (2000) azonban nem elégedett meg ezzel a kerülő úttal, hiszen egyrészt ciklikus vagy akár kaotikus szabályozás is adhat működőképes pályát, másrészt a lokális stabilitás adós marad a működőképes induló állapotok meghatározásával. Ellentétben Simonovits (1996)-tal, a rövidség kedvéért ezúttal saját, diszkrét idejű, absztraktabb, de lineáris modellemet idézem (Simonovits, 1998). Legyen $t = 0,\ 1,\ 2\dots,$ az időváltozó, x_t és u_t a t-edik időszak állapot- és szabályozási vektora, azonos n-dimenzióval. Legyen B olyan n-dimenziós négyzetes mátrix, amelyre az állapotegyenlet

$$x_{t+1} = x_t + Bu_t, \qquad x_0 \text{ adott.}$$

Skálázással elérhető, hogy B minden átlós eleme egységnyi legyen: $b_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Jelölje a B mátrix főátlón kívüli elemeinek, az ún. kereszthatásoknak a mátrixát $-N$, azaz $B = I - N$, és tegyük fel, hogy $N \geq 0$, N spektrálsugara kisebb, mint 1. (Ezek a feltevések teljesülnek az általunk vizsgált speciális modellekre.) Vezessük be az

$$u_t = -\langle k \rangle x_t$$

decentralizált visszacsatolást, ahol $\langle k \rangle$ egy n-dimenziós k vektorú diagonális mátrix.

Egyszerű számolással belátható, hogy az egymás utáni állapotvektorokra a következő rekurzió igaz:

$$x_{t+1} = x_t - B\langle k \rangle x_t = [I - (I - N)\langle k \rangle]x_t = [I - \langle k \rangle + N\langle k \rangle]x_t = Mx_t.$$

Ha $0 < k \leq \mathbf{1}$, akkor $M \geq 0$ és $k > Nk$. Bevezetve az x vektor $||\mathrm{x}||$ oszlopösszeg-normáját és a hozzá tartozó $||M||$ mátrixnormát, adódik az $||x_{t+1}|| < ||M||\ ||x_t||$ egyenlőtlenség. Ennek az egyenlőtlenségnek a segítségével már könnyű explicit kifejezést találni a működőképes induló állapotok résztartományára.

5. Szubjektív megjegyzések

Miután felvillantottam néhány eredményt Martos Béla gazdag és jelentős szabályozáselméleti munkásságából, szeretnék néhány szubjektív megjegyzést tenni.

A Kornai Jánossal közösen írt úttörő cikke hamarosan a matematikai közgazdaságtan vezető lapjában, az Econometricában jelent meg (Kornai – Martos, 1973). A gazdasági mechanizmusok összehasonlításáról szóló Martos (1979) cikk is neves szerkesztők által jegyzett kötetben jelent meg. A Kornai – Martos (1981a, b) szerkesztette kötetet a magyar kiadással egy időben angolul is kiadták. Martos (1990) monográfiája is egy rangos nemzetközi kiadónál jelent meg. Dinamikus modellekről szóló saját tankönyvemben (Simonovits, 1998) is bőségesen hivatkoztam a vegetatív szabályozásra, és azon belül is Martos munkáira. Azonban az igazságnak tartozunk azzal, hogy a szabályozáselméleti siker elmaradt a nemlineáris programozásétól. De ez nem Bélán, hanem a világon múlott.

A Szigma szerkesztőjeként és hazai, valamint külföldi konferenciák állandó vendégeként sokan hallhatták mindig jól felépített és érdekfeszítő előadásait, szellemes kommentárjait. Mindenki becsülte eredményeit, és szerette közvetlen modorát. Kár, hogy csak külföldön taníthatott!

Nem szerencsés, ha másokról írva az ember saját magáról kezd el írni. De e megemlékezés végére érve nem hallgathatom el, hogy Béla munkáit nemcsak, sőt nem elsősorban kinyomtatott cikkeiből és könyveiből, hanem kéziratból (gépiratból) ismertem meg. Bélával személyesen 1969-ben találkoztam először, és haláláig tartott a kezdetben szakmai, később barátivá bővülő kapcsolat. Amíg bejárt az MTA Közgazdaságtudományi Intézetébe, addig rendszeresen megbeszéltük közös dolgainkat: először a szabályozáselmélet, majd a nyugdíjrendszer kérdéseit. Születésük folyamatában láttam eredményeit, gyakran mint baráti vagy felkért lektor.

Emléked megőrizzük.

Hivatkozások

[1] ANDORKA, R. – D+NYI, D – MARTOS, B. (1967): *Dinamikus népgazdasági modellek,* Budapet, KJK.

[2] BRÓDY, A. (1969): *Érték és újratermelés*, Budapest, KJK.

[3] BRÓDY, A. (1970): *Planning, Proportions and Prices*, Amsterdam, North Holland.

[4] BRÓDY, A. (1973): *„Szabályozási modellekről”*, Szigma **6**, 93–103.

[5] KORNAI, J. (1971A): *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó.

[6] KORNAI, J. (1971B): *Anti-Equilibrium*, Amsterdam, North-Holland.

[7] KORNAI, J. (1980A): *A hiány*, Budapest, KJK.

[8] KORNAI, J. (1980B): *The Economics of Shortage*, Amsterdam, North-Holland.

[9] KORNAI, J. – MARTOS, B. (1971): *„Gazdasági rendszerek vegetatív működése”* Szigma **4**, 34–50.

[10] KORNAI, J. – MARTOS, B. (1981A) SZERK: *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémia.

[11] KORNAI, J. AND MARTOS, B., EDS. (1981B): *Non-Price Control*, Amsterdam, North-Holland.

[12] KORNAI, J. AND MARTOS, B. (1973): *„Autonomous Functioning of the Economic System”* Econometrica **41**, 509–28.

[13] MARTOS, B. (1976): *„Öt mechanizmus”* Szigma **9**, 213–226.

[14] MARTOS, B. (1979): *„Comparison of economic mechanisms”* JANSSEN, J. M. – PAU, L. F. – SZTRASZAK, A. (1979): *Models and Decision Making in National Economies*, Amszterdam, North-Holland, 193–200.

[15] MARTOS, B. (1984): *„Nem walrasi szabályozási mechanizmusok”* Szigma **17**, 123–145.

[16] MARTOS, B. (1990): *Economic Control Structures*, Amsterdam, North Holland.

[17] MARTOS, B. (1998): *„Működőképes irányítások tartományai”* GÁCS, J. – KÖLLŐ, J. (1998) SZERK: *A túlzott központosítástól az átmenet stratégiájáig*, 27–36.

[18] MARTOS, B. (2000): *„Viable domains in the control space”* MASKIN, E. – SIMONOVITS, A. (2000) EDS. *Planning, Shortage and Transformation: Essays in honor of János Kornai*, Cambridge MA, MIT Press, 47–56.

[19] RAPCSÁK, A. (2006): *Martos Béla optimalitáselméleti munkásságának méltatása az Egerváry-emlékplakett alkalmából*, Alkalmazott Matematikai Lapok **23**, 1–4.

[20] SIMONOVITS, A. (1996): *„Martos Béla szabályozáselméleti munkássága"* Szigma **27**, 11–17.

[21] SIMONOVITS, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Budapest, KJK.

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA KTI, BME Matematikai Intézet, CEU, Department of Economics

Martos Béla publikációinak jegyzéke

MARTOS B.: *Hyperbolic programming.* (Hungarian. English, Russian summaries), Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Ser. B **5**, (1960), 383–406.

MARTOS B. – VARGA D. – BALLA J.: *Az operációkutatás szakkifejezései öt nyelven.* Budapest, MTA KTI, (MTA KTI Tájékoztatós Közleményei; 5.), (1963), 80 p.

MARTOS B.: *Hyperbolic programming.* (English) Nav. Res. Logist. Q. **11**, (1964), 135–155.

MARTOS B.: *Optimierungsprobleme mit Betragssummen linearer Formen.* (German), Colloq. Appl. Math. Econom., Budapest, (1965), 279–284.

MARTOS B.: *The direct power of adjacent vertex programming methods.* (English), Manage. Sci., Ser. A **12**, (1965), 241–252.

MARTOS B.: *Nem-lineáris programozási módszerek hatóköre.* Budapest, MTA KTI, (MTA KTI Közlemények, 20.), (1966), 104 p.

MARTOS B.: *Quasi-convexity and quasi-monotonicity in nonlinear programming.* (English), Stud. Sci. Math. Hung. **2**, (1967), 265–273.

ANDORKA R. – DÁNYI D. – MARTOS B.: *Dinamikus népgazdasági modellek.* Budapest, KJK, (1967), 410 p.

MARTOS B.: *Subdefinite matrices and quadratic forms.* (English), SIAM J. Appl. Math. **17**, (1969), 1215–1223.

MARTOS B.: *Tegnapi és mai ideák a matematikai programozásban. Gazdasági fejlődés és tervezés.* Budapest, KJK, (1969), 90-107.

MARTOS B.: *Quadratic programming with quasiconvex objective function.* (Hungarian), Szigma **2**, (1969), 199–212.

MARTOS B.: *Quadratic programming with a quasiconvex objective function.* (English), Oper. Res. **19**, (1971), 87–97.

KORNAI J. – MARTOS B.: *Gazdasági rendszerek vegetatív működése*, Szigma **4**, (1971), 34–50.

KORNAI J. – MARTOS B.: *Autonomous control of the economic system.* (English), Econometrica **41**, (1973), 509–528.

MARTOS B.: *Nonlinear programming. Theory and methods.* (English) Amsterdam – Oxford: North-Holland Publishing Company; New York: American Elsevier Publishing Co., (1975), Inc. 279 p.

MARTOS B.: *Öt mechanizmus*, Szigma **9**, (1976), 213–225.

MARTOS B.: *Gazdasági szabályozási rendszerek összehasonlítása.* Budapest, MTA KTI, (1976), 100 p. (Melléklet: Opponensi vélemény: Tardos Márton 12 p.) MARTOS B.: *Comparison of economic mechanisms*, JANSSEN, J. M. – PAU, L. F. – SZTRASZAK A.: *Models and Decision Making in National Economies*, Amsterdam, North-Holland, (1979), 193–200.

MARTOS B.: *Szabályozás árjelzések nélkül.* Szerk.:Kornai J. – Martos B., Budapest, Akadémiai Kiadó, (MTA KTI), (1981), 302 p.

KORNAI J. – MARTOS B.: *Non-price control.* (Contributions to Economic Analysis; Vol.**133**.) Amsterdam, North-Holland, (1981), 334 p.

MARTOS B.: *Nonlinear programming. Theory and methods.* (Programowanie nieliniowe. Teoria i metody). (Polish). Transl. from the English by Józef Wdowiak. (English) Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. (1983), 252 p.

MARTOS B.: *Nem walrasi szabályozási mechanizmusok*, Szigma **17**, (1984), 123–145.

MARTOS B.: *Economic control structures: A non-Walrasian approach.* Amsterdam, North-Holland, (Contributions to Economic Analysis; Vol.**188**), (1990), 250 p.

MARTOS B.: *Viable control trajectories in linear system.* (English) Probl. Control Inf. Theory **20**, (1991), 267–280.

MARTOS B.: *A nyugdíjak egyenlőtlensége és dekompozíciója: Résztanulmány.* Budapest, MTA KTI, (MT–DP **16**.), (1993), 47 p.

MARTOS B.: *A nyugdíjak egyenlőtlensége és dekompozíciója.* Közgazdasági Szemle **41**, (1994), 26–48.

AUGUSZTINOVITS M. – MARTOS B.: *Számítások és következtetések nyugdíjreformra.* Közgazdasági Szemle **42**, (1995), 993–1023.

MARTOS, B.: *Point system of individual pension: Setup and operation. Human resources and social stability during transition in Hungary.* San Franciso, ICEG, (1995).

MARTOS B.: *Az egyéni nyugdíjak pontrendszere: indulás és működés. Nyugdíjrendszer és nyugdíj-reform.* Budapest, MTA Világgazdasági Kutató Intézet, (1995), 96–112.

MARTOS B.: *Nyugdíjformulák öt európai országban.* Közgazdasági Szemle **44**, (1997), 521–530.

AUGUSZTINOVITS M. – MARTOS B.: *Calculations and conclusions.* Acta Oeconomica **48**, (1997).

MARTOS B.: *Működésképes irányítások tartományai. A „túlzott központosítástól” az „átmenet stratégiájáig”: Tanulmányok Kornai Jánosnak.* Budapest, KJK, (1998), 27–36.

MARTOS B.: *Viable dominans in the control space. Planning, Shortage, and Transformation: Essays in honor of János Kornai*, London, MIT Press, (2000), 47–56.

BÉLA MARTOS – CONTRIBUTION TO CONTROL THEORY

András Simonovits

Between 1960 and 1975 Béla Martos obtained results on nonlinear programming which made him worldwide-known (cf. Rapcsák, 2006). In parallel with János Kornai's Anti-equilibrium (1971), Martos's interest step-by-step shifted to control theory, although the Volume by Andorka–Dányi–Martos (1967) already overshadowed this change. Kornai–Martos (1971) on the autonomous functioning of economic systems was published at the same time as Kornai (1971). Martos started to study the equivalence between different control mechanisms around 1975. Another parallelism: In 1981 Kornai and Martos edited a volume on the autonomous functioning simultaneously with Kornai's The Economics of Shortage (1980). Finally, Martos synthesized his control-theoretic works in Martos (1990), in which he studied both equivalence and viability. The present article surveys this path-breaking contribution.