Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 119-129.

ÉLDISZJUNKT ÚTRENDSZER KITERJESZTÉSE

SZABÓ JÁCINT[1]

A dolgozatban egy újfajta problématípussal, az úgynevezett kiterjesztési problémával foglalkozunk. Az *off-line kiterjesztési problémában* adott egy G hálózat egész élkapacitásokkal, valamint egy H_1 és egy H_2 igénygráf egységnyi igényekkel ugyanazon a ponthalmazon. Feladatunk meghatározni az olyan $F \subseteq E(H_1) \cap E(H_2)$ élhalmazok méretének maximumát, amelyeknek van olyan G-beli egész útkiosztása, amely kiterjeszthető H_1, valamint H_2 egy-egy egész G-beli útkiosztásává. Az *online kiterjesztési problémában* adott egy G hálózat egész élkapacitásokkal, egy H igénygráf egy G-beli útkiosztással, valamint egy H_2 igénygráf egységnyi igényekkel, amelyre $E(H) \subseteq E(H_2)$ teljesül. Kérdés, mekkora az olyan $F \subseteq E(H)$ élhalmazok méretének maximuma, amelyekre az adott útkiosztás F-re való megszorítása kiterjeszthető H_2 egy egész útkiosztásává? Attól függően, hogy a gráfok irányítottak vagy irányítatlanok, négy különböző feladatot kapunk. Mind a négy NP-teljes, de e dolgozatban teljes megoldást adunk e feladatokra abban az esetben, amikor G egy gyűrű és az igénygráfok csillagok.

1. Bevezetés

A következő fogalmakat irányított és irányítatlan gráfokra is értjük. Egy $c : E \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ kapacitás-függvénnyel ellátott $G = (V, E)$ gráfot *hálózatnak* hívunk. Legyen adott egy G hálózat és egy H igénygráf ugyanazon a V ponthalmazon. H-nak lehetnek párhuzamos élei, de feltesszük, hogy H semely éle nem hurok. $E(H)$-nak egy $\mathcal{P}$ leképezését H egy G-beli *útkiosztásának* hívjuk, ha minden s és t közötti $f \in E(H)$ élre $\mathcal{P}(f)$ egy st-út G-ben, és minden $e \in E$ élt legfeljebb $c(e)$ ilyen út használ. Az e-t használó $\mathcal{P}$-beli utak száma az e *terhelése*, ezt $l_{\mathcal{P}}(e)$-vel jelöljük. $F \subseteq E(H)$ esetén azt mondjuk, hogy H-nak a $\mathcal{P}$ útkiosztása *kiterjeszti* F-nek a $\mathcal{P}_F$ útkiosztását, ha $\mathcal{P}_F = \mathcal{P}|_F$.

1.1. Definíció. Az OFF-LINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMÁBAN adott egy $G = (V, E)$ hálózat a $c : E \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ kapacitásfüggvénnyel, valamint $i = 1, 2$-re egy H_i igénygráf ugyanazon a V ponthalmazon egy-egy G-beli útkiosztással. Jelölje $\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2)$ azon $F \subseteq E(H_1) \cap E(H_2)$ élhalmazok méretének maximumát, amelyeknek létezik egy olyan G-beli útkiosztása, amely kiterjeszthető H_1 és H_2 egy-egy G-beli útkiosztásává. Feladat meghatározni $\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2)$-t.

[1]A kutatás a France Telecom R & D, az OTKA K60802 és TS049788 pályázatai, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatásával folyt.

1.2. Definíció. Az ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMÁBAN adott egy $G = (V, E)$ hálózat a $c : E \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ kapacitásfüggvénnyel, egy H igénygráf egy G-beli $\mathcal{P}$ útkiosztással és egy másik H_2 igénygráf egy G-beli útkiosztással úgy, hogy $E(H) \subseteq E(H_2)$ teljesül. Jelölje $\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2)$ azon $F \subseteq E(H)$ élhalmazok méretének maximumát, amelyekre $\mathcal{P}|_F$ kiterjeszthető H_2 egy G-beli útkiosztásává. Feladat meghatározni $\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2)$-t.

Ezen feladatokat távközlési hálózatok útkiosztási problémái motiválják. Tegyük fel, hogy adott egy ilyen hálózat, és egymás után különböző igénygráfok váltják egymást, amelyeknek azonnal útkiosztást kell biztosítani. Ezt lehetőleg úgy akarjuk, hogy egy igénygráf-váltásnál minél kevesebb a váltást túlélő igénynek kelljen új utat kiosztani. Ez épp az ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMA. Figyeljük meg, hogy egy igénygráf-váltásra koncentrálva feltehetjük, hogy a korábbi igénygráf részgráfja az újnak. Az OFF-LINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMA akkor merül fel, ha például valamilyen napszaktól függő struktúrája van az igénygráfoknak, így elég számítási kapacitásunk van arra, hogy előre kiszámítsuk igénygráfok egy sorozatának útkiosztását. Ezt szintén lehetőleg úgy szeretnénk, hogy minél kevesebb megmaradó igénynek kelljen új utat kiosztani. Bevezethetnénk tehát az OFF-LINE k-KITERJESZTÉSI PROBLÉMÁT is, ahol egy k igénygráfból álló sorozatnak kell útkiosztást adni, ebben a cikkben azonban csak a $k = 2$ esettel foglalkozunk. Távközlési hálózatokról bővebben [6]-ban olvashatunk.

A kiterjesztési problémák fenti definíciójában azért tettük fel, hogy H_1-nek és H_2-nek adott egy-egy G-beli útkiosztása, hogy a kiterjesztési probléma ne tartalmazza az útkiosztás keresésének NP-teljes feladatát. Bebizonyítható, hogy még így is NP-teljes a kiterjesztési probléma mind a négy változata

Ebben a dolgozatban a kiterjesztési problémát egy speciális esetben oldjuk meg.

1.3. Definíció. Az *oda-vissza irányított kör* egy irányított gráf a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n = v_0\}$ $(n \geq 3)$ ponthalmazon a $\{v_i v_{i+1}, v_{i+1} v_i : 0 \leq i \leq n-1\}$ élhalmazzal (azaz két ellentétesen irányított kör ugyanazon a ponthalmazon). *Gyűrű* alatt irányítatlan vagy oda-vissza irányított kört értünk.

A 2. fejezetben az irányított esettel foglalkozunk. Mind az off-line, mind az online változatra egy minimax formulát mondunk ki abban a speciális esetben, amikor G egy oda-vissza irányított kör és az igénygráfok minden élének ugyanaz a pont a forráspontja. Az off-line esetben bizonyítást is adunk, az online eset bizonyítása pedig a [5] dolgozatban található.

A 3. fejezetben az irányítatlan esetet tárgyaljuk azon feltételezés mellett, hogy G egy irányítatlan kör, és az igénygráfok éleinek egyik végpontja közös. Bizonyítás nélkül kimondunk egy minimax formulát az off-line változatra, és egy polinomiális algoritmust adunk az online esetre. Itt az a meglepő helyzet áll elő, hogy úgy tűnik, a másik három esettől eltérően az irányítatlan online változatban nem létezik szép minimax formula.

Vegyük észre, hogy ha csak egy csillag igénygráfunk volna, akkor a maximális folyam – minimális vágás tétel miatt a jól ismert vágásfeltétel szükséges és elégséges egy útkiosztás létezéséhez. A kiterjesztési problémában viszont a válasz jóval bonyolultabb abban az egyszerű esetben is, amikor a hálózat egy gyűrű.

A távközlési hálózatokban betöltött fontos szerepe miatt számosan vizsgálták az útkiosztási problémát gyűrűn, egy igénygráf feltételezése mellett. Ha a kapacitások egészek, az igények egységnyiek, és a $\mathcal{P}$ útkiosztás tört st-folyamokból áll st-utak helyett, akkor tört útkiosztásról beszélünk. A vágásfeltétel nem elegendő tört útkiosztás létezéséhez oda-vissza irányított kör hálózat esetén, ami megmagyarázza azt, hogy erre a problémára az egyetlen ismert módszer egy lineáris program megoldása. Irányítatlan kör esetében viszont a vágásfeltétel elegendő tört útkiosztás létezéséhez, és az első kombinatorikus algoritmus vázlatát Schrijver, Seymour és Winkler [4] adták. Módszerüket később Király [3] javította.

Az útkiosztás e cikkben használt fogalmára térve, Wilfong és Winkler [7] leírtak egy elegáns algoritmust útkiosztás keresésére egész élkapacitású oda-vissza irányított kör hálózatban, feltéve, hogy tört útkiosztás létezik. Az irányítatlan esetben Frank [2] egy módszerével adható polinomiális idejű algoritmus.

Ha az igények egészek, de nem feltétlenül egységnyiek, és megköveteljük, hogy az útkiosztás osztatlan legyen, azaz minden d_f igényű s és t közti f igényélre az útkiosztásnak egy d_f értékű st-utat kell tartalmaznia, akkor NP-teljes problémát kapunk abban az egyszerű esetben is, ha a hálózat egy gyűrű (Cosares és Saniee [1]). Az irányítatlan esetben Schrijver, Seymour és Winkler [4] egy olyan kombinatorikus közelítő algoritmust adtak, amely tört útkiosztás létezése esetén egy olyan osztatlan útkiosztást ad, amely legfeljebb $\frac{3}{2}D$-vel sérti a kapacitásokat, ahol D az igények maximuma. Megoldásuk könnyen kiterjeszthető az irányított esetre is.

A „kiterjesztés" gondolata más érdekes kérdéseket is felvet a kombinatorikus optimalizálás témakörében. Például, egy páros gráf élei pirosra, zöldre és piros-zöldre vannak színezve. Határozzuk meg a maximális méretű piros-zöld élhalmazt, ami kiterjeszthető piros, ill. zöld teljes párosítássá is. A szerző tudomása szerint ezen probléma komplexitása nyitott.

2. Az irányított eset

Legyen $G = (V, E)$ egy oda-vissza irányított kör. Egy irányított igénygráf egy $s \in V$ középpontú *csillag*, ha minden élének forráspontja s. Ebben a fejezetben H, H_1 és H_2 ilyen irányított gráfokat fognak jelölni. A fejezetben mind az OFF-LINE, mind az ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMÁRA kimondunk egy minimax formulát abban a speciális esetben, amikor G egy oda-vissza irányított kör és H_1, valamint H_2 egy-egy $s \in V$ középpontú csillag. A rövidség kedvéért az online eset bizonyítását kihagyjuk, ez megtalálható [5]-ben.

2.1. Definíció. A G oda-vissza irányított kör két lehetséges iránya közül az egyik legyen az *előre*, a másik pedig a *hátra* irány. Ennek megfelelően, egy $e \in E$ él lehet előre- vagy hátraél, és az $u, v \in V$ pontokra a két lehetséges $u \to v$-út közül $[u, v]$ jelöli az előre-, és $\overleftarrow{[u, v]}$ a hátrautat (ha $u = v$, akkor mindkét út egyetlen pontból áll). Legyen $(u, v] = [u, v] - u$. Végül legyen $\overleftarrow{e} \in E$ az $e \in E$ él ellentétesen irányított párja.

Mint látni fogjuk, csillag igénygráfok útkiosztása speciális alakúnak választható.

2.2. Definíció. A H igénygráf $\mathcal{P}$ útkiosztása *sima*, ha létezik egy $z \in V - s$ pont, hogy minden $t \neq z$ nyelőpontú $f \in E(H)$ igényre, ha $t \in V[s, z]$ ($t \in V[z, s]$), akkor $\mathcal{P}(f)$ az előre (hátra) $s \to t$-út. A z nyelőpontú igényeknek bármely út ki lehet osztva. z-t a $\mathcal{P}$ egy *ellenpontjának* hívjuk.

2.1. Lemma. *A G oda-vissza irányított körön egy H csillag igénygráf minden $\mathcal{P}$ útkiosztásához létezik H-nak egy $\mathcal{P}'$ sima útkiosztása úgy, hogy $l_{\mathcal{P}'} \leq l_{\mathcal{P}}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $t_1 \neq t_2$ nyelőpontú f_1, f_2 igényekre $\mathcal{P}(f_i)$ tartalmazza t_{3-i}-t $i = 1, 2$-re. Ekkor mindkét igénynek az ellentétesen irányított utat kiosztva, semely él terhelését nem növeljük, sőt valamelyik élét még csökkentjük is. Vagyis véges sok lépés után a módosított $\mathcal{P}'$ útkiosztásban már nem lesz ilyen f_1, f_2 igénypár, és így $\mathcal{P}'$ sima. $\square$

2.3. Definíció. Az s középpontú H csillag igénygráfra és az $u, v \in V$ pontokra legyen

$$d_H(u, v) = |\{f : \ f \in E(H) \text{ nyelőpontja } [u, v]\text{-beli}\}|.$$

Azt mondjuk, hogy a t_1 nyelőpontú $e_1 \in E$ előreél és a t_2 nyelőpontú $e_2 \in E$ hátraél *szembenéznek*, ha $t_1 \in V(s, t_2]$. Legyen $d_H(e_1, e_2) = d_H(t_1, t_2)$. Végül $e \in E$-re legyen

$$r_H(e) = \min\{c(\overleftarrow{e}) + c(e') - d_H(\overleftarrow{e}, e') : \ e' \in E \text{ szembenéz } \overleftarrow{e}\text{-vel}\}.$$

Először az off-line esetre bizonyítunk egy minimax formulát.

2.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy oda-vissza irányított kör, H_1, H_2 pedig $s \in V$ középpontú csillag igénygráfok, egy-egy G-beli útkiosztással. H-val jelöljük a V ponthalmazon az $E(H_1) \cap E(H_2)$ élhalmazú gráfot. Ekkor*

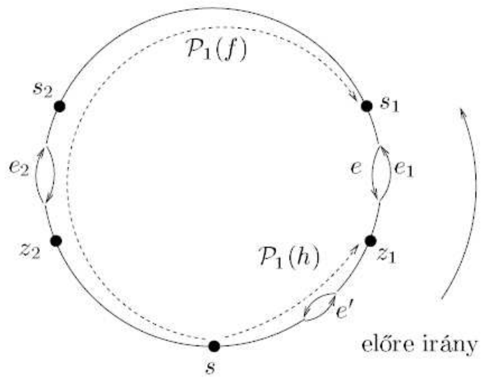
$$\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2) \leq |E(H)| - \max\left\{d_H(e_1, e_2) - r_{H_1}(e_1) - r_{H_2}(e_2)\right\},$$

ahol a maximum szembenéző $e_1, e_2 \in E$ párokon fut. Továbbá vagy egyenlőség áll egy szembenéző $e_1, e_2 \in E$ élpárra, vagy $\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2) = |E(H)|$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy H minden $\mathcal{P}$ útkiosztásában $l_{\mathcal{P}}(e) \leq r_H(e)$ teljesül minden $e \in E$ élre. Az egyenlőtlenség tehát nyilvánvaló.

A másik állításhoz hívjuk egy $F \subseteq E(H)$ élhalmaz egy kiterjeszthető $\mathcal{P}$ útkiosztását *szép*nek, ha minden $E(H) - F$-beli igény nyelőpontja $\mathcal{P}$-nek ellenpontja. $F = \emptyset$ üres útkiosztása szép, ezért tekintsünk egy maximális méretű $F \subseteq E(H)$ halmazt, amelynek van szép kiterjeszthető $\mathcal{P}$ útkiosztása. Jelöljük $H_i - F$ kiterjesztő útkiosztását $\mathcal{P}_i$-vel, $i = 1, 2$-re. A 2.1. lemma miatt feltehetjük, hogy $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ simák a z_1, z_2 ellenpontokkal. Feltehetjük, hogy $z_1 \in V(s, z_2]$ és válasszuk meg z_1-et és z_2-t úgy, hogy az $[s, z_1]$ és $[z_2, s]$ utak a lehető legrövidebbek legyenek. Lásd az 1. ábrát.

Ha $|F| = |E(H)|$, akkor készen vagyunk. Egyébként $s_1 \in V(s, s_2]$ mellett legyen $[s_1, s_2]$ az a minimális gráf, amely tartalmazza az összes $f \in E(H) - F$ igény nyelőpontját. Ha $\mathcal{P}_1(f) = \mathcal{P}_2(f)$ előreút egy s_1 nyelőjű $f \in E(H) - F$ igényre, akkor $F + f$-nek létezne szép kiterjeszthető útkiosztása, ellentmondásban F maximalitásával. Hasonlóan érvelhetünk s_2 esetén, ahonnan az $[s_1, s_2] \subseteq [z_1, z_2]$ összefüggés adódik. További következmény, hogy $z_1 \neq z_2$ esetén $\mathcal{P}_1(f)$ hátraút és $\mathcal{P}_2(f)$ előreút minden $f \in E(H) - F$ igényre. A $z_1 = z_2$ esetben pedig, ha léteznek olyan f_1, $f_2 \in E(H) - F$ igények, hogy $\mathcal{P}_1(f_1)$ előreút és $\mathcal{P}_1(f_2)$ hátraút, akkor $\mathcal{P}_1$-ben mindkét igényt a másik úton elvezetve F-et megnövelhetnénk $\{f_1, f_2\}$-vel, ami nem lehetséges. Vagyis H_1 és H_2 szerepét esetleg felcserélve a $z_1 = z_2$ esetben is feltehetjük, hogy $\mathcal{P}_1(f)$ hátraút és $\mathcal{P}_2(f)$ előreút minden $f \in E(H) - F$ igényre.



1. ábra. Az off-line változat az irányított esetben.

Legyen $f \in E(H) - F$ egy s_1 nyelőjű igény, mint az 1. ábrán látható. Ha f-et elvezethetnénk $\mathcal{P}_1$-ben az előreúton, akkor $F + f$-nek volna egy szép kiterjeszthető útkiosztása, ellentmondásban F maximalitásával. Vagyis létezik egy $e' \in E[s, s_1]$ előreél, hogy $l_{\mathcal{P}_1}(e') + l_{\mathcal{P}}(e') = c(e')$. Vegyük észre, hogy $l_{\mathcal{P}_1}(e') > 0$, mivel $\mathcal{P}_2(f)$ terheli e'-t. Következésképp $e' \in E[s, z_1]$, és választhatunk egy $h \in E(H_1) - F$ igényt z_1 nyelővel, amire $\mathcal{P}_1(h)$ előreút. $\mathcal{P}_1(g)$ hátraút minden $g \in E(H) - F$ igényre, ezért $h \in E(H_1) - E(H)$. F maximalitása miatt nem lehet f és h mindegyikét a másik úton elvezetni, ezért létezik egy $e \in E\overleftarrow{[s_1, z_1]}$ hátraél, hogy $l_{\mathcal{P}_1}(e) + l_{\mathcal{P}}(e) = c(e)$. Mivel s_1 ellenpontja $\mathcal{P}$-nek, $l_{\mathcal{P}}(e) = 0$ teljesül. Legyen $e_1 = \overleftarrow{e}$. Összefoglalva, s_1 ellenpontja $\mathcal{P}$-nek, z_1 ellenpontja $\mathcal{P}_1$-nek, $e' \in E[s, z_1]$ és $e \in E\overleftarrow{[s_1, z_1]}$, vagyis

$$r_{H_1}(e_1) \leq c(e) + c(e') - d_{H_1}(e, e') = (l_{\mathcal{P}_1}(e) + l_{\mathcal{P}_1}(e')) + l_{\mathcal{P}}(e') - d_{H_1}(e, e') =$$
$$= d_{H_1 - F}(e, e') + (d_F(e, e') + l_{\mathcal{P}}(e_1)) - d_{H_1}(e, e') = l_{\mathcal{P}}(e_1).$$

Így $l_{\mathcal{P}}(e_1) = r_{H_1}(e_1)$. Hasonlóan, létezik egy $e_2 \in \overleftarrow{E[z_2, s_2]}$ hátraél az $l_{\mathcal{P}}(e_2) = r_{H_2}(e_2)$ tulajdonsággal. Mivel s_1 és s_2 ellenpontjai $\mathcal{P}$-nek,

$$d_F(e_1, e_2) = l_{\mathcal{P}}(e_1) + l_{\mathcal{P}}(e_2)$$

teljesül. Végezetül,

$$d_H(e_1, e_2) - r_{H_1}(e_1) - r_{H_2}(e_2) =$$
$$d_{H-F}(e_1, e_2) + d_F(e_1, e_2) - l_{\mathcal{P}}(e_1) - l_{\mathcal{P}}(e_2) = d_{H-F}(e_1, e_2) = |E(H) - F|,$$

és készen vagyunk. □

A fenti bizonyítás algoritmikus. $F = \emptyset$-nek az üres $\mathcal{P}$ útkiosztásából indulva minden lépésben növeljük F méretét, míg az el nem éri a 2.1. tételbeli korlátot.

Az irányított ONLINE KITERJESZTÉSI PROBLÉMA speciális esetére vonatkozó alábbi tétel bizonyítása megtalálható [5]-ben.

2.2. TÉTEL. *Legyen $G = (V, E)$ egy oda-vissza irányított kör és H_2 egy $s \in V$ középpontú csillag igénygráf egy G-beli útkiosztással. Legyen H a H_2 egy részgráfja egy G-beli $\mathcal{P}$ útkiosztással. Ekkor*

$$\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P};\ H_2) \leq$$
$$\leq |E(H)| - \max\left\{d_{H_2 - E(H)}(e_1, e_2) + l_{\mathcal{P}}(e_1) + l_{\mathcal{P}}(e_2) - c(e_1) - c(e_2)\right\},$$

ahol a maximum szembenéző $e_1, e_2 \in E$ párokon fut. Továbbá vagy egyenlőség áll egy szembenéző $e_1, e_2 \in E$ élpárra, vagy $\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P};\ H_2) = |E(H)|$.

3. Az irányítatlan eset

Az irányítatlan H gráfot egy $s \in V$ középpontú *csillag*nak hívjuk, ha H minden éle illeszkedik s-re. Ebben a fejezetben a kiterjesztési probléma azon speciális esetét vizsgáljuk, amikor $G = (V, E)$ egy irányítatlan kör, H_1, valamint H_2 pedig $s \in V$ középpontú csillagok. Bizonyítás nélkül kimondunk egy minimax formulát az off-line változatra, valamint algoritmust adunk az online esetre, amely egy maximális kiterjeszthető útkiosztást keres meg.

Az előre és hátra irány, simaság és ellenpont fogalmát ugyanúgy definiáljuk, mint az irányított esetben. Az st-út előre (hátra), ha s-ből t-be irányítva egy előre- (hátra-) utat kapunk. Az irányított eset (2.1. lemma) bizonyításában szereplő elgondolás alapján belátható a következő lemma.

3.1. LEMMA. *A G körön egy H csillag igénygráf minden $\mathcal{P}$ útkiosztásához létezik H-nak egy $\mathcal{P}'$ sima útkiosztása úgy, hogy $l_{\mathcal{P}'} \leq l_{\mathcal{P}}$.*

3.1. Definíció. Az s középpontú H igénygráfra és az $u, v \in V$ pontokra legyen

$$d_H(u, v) = |\{f : f \in E(H) \text{ egy } [u, v]\text{-beli pont és } s \text{ között fut}\}|\,.$$

Az $e_i = u_iv_i \in E$ $(i = 1, 2)$ élekre azt mondjuk, hogy a rendezett (e_1, e_2) pár *szembenéz*, ha ezen pontok sorrendje az előre irányban s, u_1, v_1, u_2, v_2 (néhány közülük egybeeshet). Ez esetben legyen $d_H(e_1, e_2) = d_H(v_1, u_2)$. Végül $u \in V[s, v]$ mellett az $e = uv \in E$ élre legyen

$$r^+_H(e) = \min\{c(e) + c(e') - d_H(e', e) : e' \in E[s, u]\}, \text{ és}$$
$$r^-_H(e) = \min\{c(e) + c(e') - d_H(e, e') : e' \in E[v, s]\}.$$

Könnyen látható, hogy az $F \subseteq E(H_1) \cap E(H_2)$ élhalmaz minden olyan útkiosztásában, amely kiterjeszthető H_i egy G-beli útkiosztásává $i = 1, 2$-re, az $e \in E$ élt legfeljebb $\lfloor r^+_{H_i}(e)/2\rfloor$ előre-, és legfeljebb $\lfloor r^-_{H_i}(e)/2\rfloor$ hátraút terheli. Az off-line változatra a következő minimax formula bizonyítható [5].

3.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan kör, H_1 és H_2 pedig csillag igénygráfok $s \in V$ középponttal és egy-egy G-beli útkiosztással. Legyen H az a gráf, amelynek ponthalmaza V és élhalmaza $E(H_1) \cap E(H_2)$. Ekkor*

$$\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2) \le |E(H)| - \max\left\{d_H(e_1, e_2) - \left\lfloor\frac{r^+_{H_1}(e_1)}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{r^-_{H_2}(e_2)}{2}\right\rfloor\right\},$$

ahol a maximum szembenéző (e_1, e_2) párokon fut. Továbbá vagy egyenlőség áll egy szembenéző (e_1, e_2) párra, vagy $\varphi_{\text{off}}(G; H_1, H_2) = |E(H)|$.

Most az online kiterjesztési probléma irányítatlan változatára térünk. Azt mondjuk, hogy $F \subseteq E(H)$ *kiterjeszthető*, ha $\mathcal{P}|_F$ kiterjeszthető H_2 egy G-beli útkiosztásává. A következő tétel bizonyításának magva egy polinomiális algoritmus, amely egy maximális méretű kiterjeszthető $F \subseteq E(H)$ halmazt keres. A 3.2. tételben előfordulhat, hogy semely szembenéző (e_1, e_2) pár nem ad egyenlőséget, emiatt nem tudunk itt szép minimax formulát bizonyítani, a többi három esettel meglepő ellentétben. Azonban, mint látni fogjuk, ha $\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P}; H_2) < |E(H)|$, akkor a különbség az egyenlőtlenség két oldala között legfeljebb 1.

3.2. Definíció. e_1, $e_2 \in E$-re jelölje $\mathcal{P}_{e_1,e_2}$ azon $f \in E(H)$ igények halmazát, amelyekre $\mathcal{P}(f)$ tartalmazza e_1-et és e_2-t is.

3.2. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan kör és H_2 egy $s \in V$ középpontú igénygráf egy G-beli útkiosztással. Legyen H a H_2 egy részgráfja egy G-beli $\mathcal{P}$ útkiosztással. Ekkor*

$$\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P};\ H_2) \le \mu := |E(H)| - \max\left\{|\mathcal{P}_{e_1,e_2}| - \left\lfloor\frac{c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2)}{2}\right\rfloor\right\},$$

ahol a maximum szembenéző (e_1, e_2) párokon fut. Továbbá

$$\varphi_{\text{on}}(G; \mathcal{P};\ H_2) \in \{|E(H)|,\ \mu,\ \mu - 1\}.$$

Polinomiális időben található egy maximális méretű kiterjeszthető $F \subseteq E(H)$ élhalmaz.

Bizonyítás. H_2 minden útkiosztásában azon utak száma, amelyek e_1-et és e_2-t is tartalmazzák, legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{c(e_1)+c(e_2)-d_{H_2}(e_1,e_2)}{2} \right\rfloor .$$

Az egyenlőtlenség ezért világos. Az alábbi algoritmus egy $\varphi_{\text{on}} := \varphi_{\text{on}}(G;\mathcal{P};\,H_2)$ méretű kiterjeszthető $F \subseteq E(H)$ halmazt talál, és egyben arra is bizonyítékot szolgáltat, hogy $\varphi_{\text{on}} \in \{|E(H)|, \mu, \mu-1\}$. Az algoritmus nyilvántart egy $F \subseteq E(H)$ kiterjeszthető halmazt, valamint $H_2 - F$-nek egy $\mathcal{P}_2$ kiterjesztő útkiosztását. Legyen $\mathcal{P}' = \mathcal{P}|_F$. Minden lépésben vagy növeljük F méretét, vagy bizonyítékot nyerünk, hogy F maximális méretű.

Start. Legyen $F = \emptyset$ és $\mathcal{P}_2$ a H_2 adott útkiosztása. Menjünk az **1. lépés**re.

1. lépés. A 3.1. lemma alapján tegyük $\mathcal{P}_2$-t simává, majd minden olyan $f \in E(H) - F$ igényt, amelyre $\mathcal{P}_2(f) = \mathcal{P}(f)$, adjunk F-hez és töröljük $\mathcal{P}_2(f)$-et $\mathcal{P}_2$-ből. Ha $F = E(H)$ akkor megállunk. Egyébként ha $\mathcal{P}_2(f)$ előreút minden $f \in E(H) - F$ igényre, akkor lépjünk az *1. eset*re, ha $\mathcal{P}_2(f)$ hátraút minden $f \in E(H)-F$ igényre, akkor cseréljük át az irányt és lépjünk az *1. eset*re, különben lépjünk a *2. eset*re.

$\mathcal{P}_2$-t módosítani fogjuk a továbbiakban, de amennyiben $\mathcal{P}_2$ sima, z_1 és z_2 olyan ellenpontokat fognak jelölni, amelyekre $[s, z_1]$ és $[z_2, s]$ a lehető legrövidebbek.

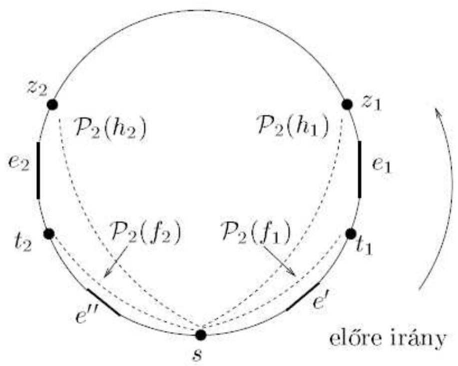
1. eset. $\mathcal{P}_2(f)$ előreút minden $f \in E(H) - F$ igényre. Amíg lehetséges, válasszunk egy leghosszabb $\mathcal{P}_2$-beli P előreutat, és irányítsuk át hátraúttá. Ha P egy $f \in E(H) - F$ igényhez tartozott, akkor megállunk, f-et F-hez adjuk, és az **1. lépés**re lépünk. Ha ez az eset soha nem fordul elő, akkor $E(H) - F$ nemüressége miatt egyszer megakadunk, aminek az oka egy $e_2 \in E[z_1, s]$ él az $l_{\mathcal{P}_2}(e_2) + l_{\mathcal{P}'}(e_2) = c(e_2)$ tulajdonsággal. Tekintsünk egy $f \in E(H) - F$ igényt s és t között, amire $[t, z_1]$ minimális. $\mathcal{P}(f)$ mutatja, hogy valójában $e_2 \in E[z_2, s]$, és hogy választhatunk egy $h \in E(H_2) - E(H)$ igényt s és z_2 között, amire $\mathcal{P}_2(h)$ hátraút. Ha mind f-et, mind h-t át tudjuk irányítani $\mathcal{P}_2$-ben, akkor adjuk f-et F-hez és menjünk az **1. lépés**re. Ha nem tudjuk, akkor találhatunk egy $e_1 \in E[t, z_2]$ élt, hogy $l_{\mathcal{P}_2}(e_1) + l_{\mathcal{P}'}(e_1) \geq c(e_1) - 1$. Az f él választása miatt $E(H) - F \subseteq \mathcal{P}_{e_1,e_2}$ teljesül. Vagyis

$$\begin{aligned}
c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2) \leq& \\
\leq (l_{\mathcal{P}_2}(e_1) + l_{\mathcal{P}_2}(e_2)) &+ (l_{\mathcal{P}'}(e_1) + l_{\mathcal{P}'}(e_2)) - d_{H_2}(e_1, e_2) + 1 = \\
= d_{H_2-F}(e_1, e_2) + (2|F \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| &+ d_F(e_1, e_2)) - d_{H_2}(e_1, e_2) + 1 = \\
&= 2|F \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + 1, \quad (1)
\end{aligned}$$

azaz $|F| = \mu$, és készen vagyunk.

2. eset. Léteznek olyan f_1, $f_2 \in E(H) - F$ igények s, valamint t_1 és t_2 között, amelyekre $\mathcal{P}_2(f_1)$ előreút és $\mathcal{P}_2(f_2)$ hátraút. Lásd a 2. ábrát. Azt mondjuk, hogy $F' \subseteq E(H)$ ***szép***, ha nem léteznek olyan $f' \in F'$, $f'' \in E(H) - F'$ igények, hogy $\mathcal{P}(f'')$ valódi részútja $\mathcal{P}(f')$-nek. Ha F nem szép, akkor helyettesítsük F-et $F - f' + f''$-vel, és $\mathcal{P}'$-t $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}|_{F-f'+f''}$-vel, amely nyilván kiterjeszthető H_2 útkiosztásává. Mivel $\mathcal{P}''$ terheléseinek összege kevesebb $\mathcal{P}'$-énél, ez az eljárás előbb-utóbb egy szép kiterjeszthető F halmazt eredményez.

Válasszuk most f_1-et úgy, hogy minimalizálja $[t_1, z_1]$-et, és f_2-t úgy, hogy minimalizálja $[z_2, t_2]$-t. Legyen $h_i \in E(H_2) - F$ egy s és z_i közti igény $i = 1, 2$-re úgy, hogy $\mathcal{P}_2(h_1)$ előreút és $\mathcal{P}_2(h_2)$ hátraút ($h_i = f_i$ elképzelhető). Ha mind f_1, mind h_2 átirányítható $\mathcal{P}_2$-ben, akkor adjuk f-et F-hez és menjünk az **1. lépés**re. Ha ez nem lehetséges, akkor létezik egy $e_1 \in E[t_1, z_2]$ él, hogy $l_{\mathcal{P}_2}(e_1) + l_{\mathcal{P}'}(e_1) \geq c(e_1) - 1$. Mind $\mathcal{P}(f_1)$, mind $\mathcal{P}(f_2)$ terhelik $[z_1, z_2]$ éleit, ezért $e_1 \in E[t_1, z_1]$. Hasonlóan, vagy növelhető F, vagy létezik egy $e_2 \in E[z_2, t_2]$ él, hogy $l_{\mathcal{P}_2}(e_2) + l_{\mathcal{P}'}(e_2) \geq c(e_2) - 1$. Ha e_1 vagy e_2 megválasztható úgy, hogy itt szigorú egyenlőtlenség áll, akkor készen vagyunk, mivel $E(H) - F \subseteq \mathcal{P}_{e_1, e_2}$ az f_1 és az f_2 választása miatt, így érvelhetünk úgy, mint (1)-nél.



2. ábra. Az online változat az irányítatlan esetben.

Maradt tehát az az eset, amikor

$$l_{\mathcal{P}_2}(e) + l_{\mathcal{P}'}(e) \leq c(e) - 1 \text{ minden } e \in E[t_1, z_1] \cup E[z_2, t_2]$$

élre. $\mathcal{P}(f_1)$ és $\mathcal{P}(f_2)$ miatt ez minden $e \in E[z_1, z_2]$ élre is áll. Ha ez minden $e \in E[t_2, s]$ élre is teljesül, akkor $\mathcal{P}_2$-ben f_1 átirányítható, és így F növelhető. Ez esetben menjünk az **1. lépés**re. Feltehetjük tehát, hogy létezik egy $e'' \in E[t_2, s]$ él, hogy $l_{\mathcal{P}_2}(e'') + l_{\mathcal{P}'}(e'') = c(e'')$, és hasonlóan, egy $e' \in E[s, t_1]$ él, hogy

$$l_{\mathcal{P}_2}(e') + l_{\mathcal{P}'}(e') = c(e').$$

3.2. Lemma. *F maximális méretű kiterjeszthető halmaz.*

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint (1)-ben kapjuk, hogy

$$c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2) \leq 2|F \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + 2. \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy létezik egy $F^* \subseteq E(H)$ kiterjeszthető halmaz az $|F^*| = |F| + 1$ tulajdonsággal. Persze feltehetjük, hogy F^* szép. Legyen $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}|_{F^*}$ és legyen $\mathcal{P}_2^*$ a $H_2 - F^*$ egy kiterjesztő útkiosztása. Felhasználva, hogy $E(H) - F \subseteq \mathcal{P}_{e_1,e_2}$, kapjuk

$$\begin{aligned}
2|F^* \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| \geq^1 2|F \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + 2 \geq c(e_1) + c(e_2) - d_{H_2}(e_1, e_2) \geq^2 \\
\geq^2 (l_{\mathcal{P}_2^*}(e_1) + l_{\mathcal{P}_2^*}(e_2)) + (l_{\mathcal{P}^*}(e_1) + l_{\mathcal{P}^*}(e_2)) - d_{H_2}(e_1, e_2) \geq^3 \\
\geq^3 d_{H_2 - F^*}(e_1, e_2) + (2|F^* \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}| + d_{F^*}(e_1, e_2)) - d_{H_2}(e_1, e_2) = 2|F^* \cap \mathcal{P}_{e_1,e_2}|,
\end{aligned}$$

vagyis végig egyenlőség áll. $\geq^1$ miatt $E(H) - F^* \subseteq \mathcal{P}_{e_1,e_2}$. $\geq^2$-ből kapjuk, hogy

$$l_{\mathcal{P}_2^*}(e_i) + l_{\mathcal{P}^*}(e_i) = c(e_i) \text{ áll } i = 1, 2\text{-re},$$

és emiatt $l_{\mathcal{P}_2}(e_i) = l_{\mathcal{P}_2^*}(e_i)$, hiszen $l_{\mathcal{P}^*}(e_i) = l_{\mathcal{P}'}(e_i) + 1$. Végül $\geq^3$ szerint semely $f' \in E(H_2) - F^*$ igényre nem tartalmazza a $\mathcal{P}_2^*(f')$ út e_1 és e_2 mindegyikét. A

$$\mathcal{P}_- = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}_2)|_{E(H_2) \setminus \mathcal{P}_{e_1,e_2}} \text{ és a } \mathcal{P}_-^* = (\mathcal{P}^* \cup \mathcal{P}_2^*)|_{E(H_2) \setminus \mathcal{P}_{e_1,e_2}}$$

jelölésekkel tehát $l_{\mathcal{P}_-}(e) = l_{\mathcal{P}_-^*}(e)$ minden $e \in E[s, t_1] \cup E[t_2, s]$ élre. Ha

$$|\{f \in F^* : \mathcal{P}(f) \text{ előreút}\}| - |\{f \in F : \mathcal{P}(f) \text{ előreút}\}| = g > 0,$$

akkor szükségképpen

$$|\{f \in F : \mathcal{P}(f) \text{ hátraút}\}| - |\{f \in F^* : \mathcal{P}(f) \text{ hátraút}\}| = g - 1.$$

Mivel F és F^* szép, ebből az következik, hogy

$$l_{\mathcal{P}^* \cup \mathcal{P}_2^*}(e') \geq l_{\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}_2}(e') + g - (g - 1) = c(e') + 1,$$

ami ellentmondás. Hasonlóan érvelhetünk, ha

$|\{f \in F^* : \mathcal{P}(f) \text{ hátraút}\}| - |\{f \in F : \mathcal{P}(f) \text{ hátraút}\}| > 0.$ □

(2) szerint $|F| \geq \mu - 1$, vagyis készen vagyunk a *2. eset*ben is. □

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Csizmadia Zsoltnak a probléma felvetéséért, valamint Szegő Lászlónak a hasznos megbeszélésekért.

Hivatkozások

[1] S. Cosares, I. Saniee: *An optimization problem related to balancing loads on SONET rings.* Telecom. Systems (1994) **3** 165–181.

[2] A. Frank: *Edge-disjoint paths in planar graphs.* J. Combin. Theory, Ser. B. (1985) **38** 164–178.

[3] Z. Király: *An $O(n^2)$ algorithm for ring routing.* EGRES Technical Report TR-2005-10, `www.cs.elte.hu/egres`

[4] A. Schrijver, P. Seymour, P. Winkler: *The ring loading problem.* SIAM J. Discrete Math. (1998) **11** 1–14.

[5] J. Szabó: *Upgrading edge-disjoint paths in a ring.* EGRES Technical Report TR-2005-17, `www.cs.elte.hu/egres`, beküldve

[6] A. Tanenbaum: *Computer Networks*, Prentice Hall, New Jersey, 2003

[7] G. Wilfong, P. Winkler: *Ring routing and wavelength translation.* Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (San Francisco, CA), (1998) 333–341.

(Beérkezett: 2007. január 30.)

SZABÓ JÁCINT
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet, Operációkutatási Tanszék, MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
1117 Budapest, Pázmány P. s. 1/C
jacint@elte.hu

UPGRADING EDGE-DISJOINT PATHS IN A RING

Jácint Szabó

In this paper we introduce the **upgrading problem** of edge-disjoint paths. In the **off-line upgrading problem** a supply graph G with integer capacities and two demand graphs H_1 and H_2 with unit demands are given on the same vertex set. Our task is to determine the maximum size of a set $F \subseteq E(H_1) \cap E(H_2)$ such that F has an integer routing in G which can be extended both to an integer routing of H_1 and to an integer routing of H_2. In the **online upgrading problem** we are given a supply graph G with integer capacities, a demand graph H with an integer routing and another demand graph H_2 with unit demands such that $E(H) \subseteq E(H_2)$. Our task is to determine the maximum size of a set $F \subseteq E(H)$ such that the restriction of the given routing to F can be extended to an integer routing of H_2. Thus, depending on whether the graphs are directed or undirected, we have four different versions. We give algorithmic proofs to minimax formulas for the case when G is a ring and the demand graphs are stars with the same center. All four versions are NP-complete for general graphs.