

EGY MAGAS RENDŰ NEMKONFORM VÉGESELEM CSALÁD A KÉTDIMENZIÓS STOKES-FELADAT MEGOLDÁSÁRA

BARAN ÁGNES

A cikkben a kétdimenziós Stokes-feladat numerikus megoldása kapcsán egy nemkonform, háromszöges végeelem családdal foglalkozunk. Hasonlóan a Scott és Vogelius által definiált konform elempárhoz a nyomást és a sebesség koordinátafüggvényeit itt is háromszögenként $(k - 1)$ -edfokú és k -adfokú polinomokkal approximáljuk. A diszkrét sebességek esetén – eltérően a Scott–Vogelius-elemtől – a folytonosságot a szomszédos háromszögek közös oldalain csak bizonyos pontokban követeljük meg. A végeelem pár tetszőleges k rend esetén definiált és ismert alacsony rendű ($k = 1, 2, 3$) elemek általánosítása. Megmutatjuk, hogy páros k esetén az elem a Scott–Vogelius-elemből származtatható, annak sebességi terét háromszögenként egy nemkonform buborékfüggvénnyel bővítve. A buborékfüggvény megszünteti a Scott–Vogelius-elemekkel való diszkrét megoldás során felmerülő esetleges algebrai szingularitást (az „energiamentes” diszkrét nyomásfüggvények jelenlétét). Belátjuk, hogy páros k esetén az elem pár stabil.

1. Bevezetés

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ egy poligonális tartomány $\Gamma = \partial\Omega$ határral. A viszkózus, összenyomhatatlan folyadékok stacionárius áramlását leíró egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} -\nu \cdot \Delta \vec{u} + \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} P &= \vec{f} \quad \Omega\text{-n,} \\ \text{div} \vec{u} &= 0 \quad \Omega\text{-n,} \\ \vec{u}|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned}$$

ahol ν a kinematikus viszkozitás, \vec{u} a sebességvektor, ρ a sűrűség, P a nyomás, $\rho \vec{f}$ a külső erők vektora. Feltételezve, hogy ρ pozitív konstans, bevezetve a $p = P/\rho$ jelölést és a ν viszkozitást 1-nek választva a fenti egyenletrendszer

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{u} + \text{grad} p &= \vec{f} \quad \Omega\text{-n,} \\ \text{div} \vec{u} &= 0 \quad \Omega\text{-n,} \\ \vec{u}|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

alakba írható, (1)-et stacionárius Stokes-feladatnak nevezzük. Az egyenletekből p csak egy additív konstansból eltekintve határozható meg egyértelműen. Az inhomogén Dirichlet-feltétel az (1)-ben szereplő homogén peremfeltételre visszavezethető.

Jelen cikkben a Stokes-feladat végeelem megoldásával kapcsolatban vizsgálunk magas rendű háromszöges elemeket. A magas rendű véges elemek hasznáról ld. például [7], [13].

Egy adott végeelem diszkretizáció kapcsán mindig felmerül az a kérdés, hogy az egyértelmű, stabil megoldás létezését biztosító inf-sup feltétel teljesül-e (ld. a cikk 2. pontját).

Scott és Vogelius [10] a konform $\mathbb{P}_k/\mathbb{P}_{k-1}$ végeelem párt vizsgálta (háromszögenként k -adrendű polinomok a sebesség, és $k - 1$ -edrendű polinomok a nyomás közelítésére), ahol a diszkrét nyomás függvényekről nem feltételezzük, hogy folytonosak a háromszögek találkozásánál. $k \geq 4$ esetén az elem stabil, de csak egy a rácsra vonatkozó feltétel teljesülése esetén.

Egy másik esetleges probléma a konform $\mathbb{P}_k/\mathbb{P}_{k-1}$ elemek használatánál, hogy a diszkrét gradiens operátor nulltere nagyobb lehet, mint az eredeti problémában a gradiens operátor nulltere, amely csak a konstans függvényeket tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy amíg folytonos esetben a nyomás egy additív konstansból eltekintve egyértelműen meghatározható, addig a végeelem diszkretizáció után kapott lineáris egyenletrendszernek többdimenziós nulltere van.

A ráctól független stabilitás kapcsán kerülnek előtérbe a nemkonform elemek: itt a sebességet approximáló háromszögenként definiált k -adrendű polinomok folytonosságát a szomszédos háromszögek közös oldalain csak bizonyos pontokban követeljük meg. A 3. fejezetben egy tetszőleges k rend esetén definiált, nemkonform végeelem párt írunk le, amely minden páros k esetén stabil, a rácsra vonatkozó feltétel nélkül. Páros rend esetén a diszkrét sebesség tér a k -adrendű konform elem sebesség terének bővítése: annak bázisához háromszögenként egy k -adfokú polinomot, egy úgy nevezett nemkonform buborék függvényt adunk. $k = 2$ esetén az elem megegyezik az ismert Fortin–Soulie-elemmel [6], a $k = 4, 6$ esetekben pedig a [4]-ben vizsgált nemkonform elemekkel. Amíg [4]-ben a sebességi tér leírásánál használt buborékfüggvényt csak a $k = 4, 6$ esetben sikerült képlettel leírni, addig a 3. fejezetben tetszőleges páros k esetén érvényes formulát adunk. [4]-ben a szerzők belátták a negyed-, és hatodrendű elem stabilitását, de a szokásos $b(\cdot, \cdot)$ bilineáris formát (ld. 2. pont) kiegészítették egy stabilizáló taggal.

Matthies és Tobiska [9] egy tetszőleges rend esetén definiált stabil, nemkonform végeelem családot írnak le, de a k -adrendű konform sebességi teret egy háromszögenként $(k + 1)$ -edrendű polinommal bővítik.

Belátjuk, hogy a nemkonform buborék függvény hatására a diszkrét gradiens operátor nulltere egydimenziós lesz, függetlenül a ráctól.

2. Jelölések, alapfogalmak

Az (1) feladat gyenge megfogalmazásához vezessük be az alábbi jelöléseket. Legyen $L^2(\Omega)$ a négyzetesen integrálható függvények tere, továbbá

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p dx = 0 \right\}.$$

A p függvényt – hogy az ne csak egy additív konstans erejéig legyen egyértelmű – az $L_0^2(\Omega)$ térben fogjuk keresni. A négyzetesen integrálható gradienssel rendelkező $L^2(\Omega)$ -beli függvények Szoboljev-terét jelölje $(H^1(\Omega))^2$, és $(H_0^1(\Omega))^2$ legyen azon $(H^1(\Omega))^2$ -beli függvények tere, melyek nyoma eltűnik Γ -n. Ezek után az (1) feladat gyenge megfogalmazása a következő: olyan $\vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^2$ és $p \in L_0^2(\Omega)$ függvényeket keresünk, melyekre

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) &= (\vec{f}, \vec{v}) & \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^2, \\ b(\vec{u}, q) &= 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{aligned} \quad (2)$$

teljesül, ahol (\cdot, \cdot) jelöli az $L^2(\Omega)$ és az $(L^2(\Omega))^2$ tér szokásos belső szorzatát is, továbbá

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad (3)$$

$$b(\vec{v}, p) = -(\operatorname{div} \vec{v}, p). \quad (4)$$

A feladat egyértelműen megoldható, ha $\vec{f} \in (L_2(\Omega))^2$.

Legyen \mathcal{T}_h az Ω tartomány egy triangularizációja, továbbá jelölje E a triangularizáció éleinek halmazát.

A (2) feladat végeelem megoldása során a sebességkomponenseket és a nyomást háromszögenként adott fokszámú polinomokkal közelítjük, jelölje $V_h(\Omega)$, ill. $P_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ a diszkrét sebesség, ill. nyomás tereket. Ha $V_h(\Omega) \subset (H_0^1(\Omega))^2$ teljesül konform, ellenkező esetben nemkonform approximációról beszélünk.

Ekkor a (2) egyenleteknek megfelelő diszkrét feladat: olyan $\vec{u}_h \in V_h(\Omega)$ és $p_h \in P_h(\Omega)$ függvényeket keresünk, melyekre

$$\begin{aligned} a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + b(\vec{v}_h, p_h) &= (\vec{f}, \vec{v}_h) & \forall \vec{v}_h \in V_h(\Omega), \\ b(\vec{u}_h, q_h) &= 0 & \forall q_h \in P_h(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \end{aligned} \quad (5)$$

teljesül, ahol nemkonform esetben az $a(\cdot, \cdot)$ és $b(\cdot, \cdot)$ funkciókat a következő módon definiáljuk:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \int_{\Delta} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad (6)$$

$$b(\vec{v}, p) = - \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \int_{\Delta} p \operatorname{div} \vec{v} dx. \quad (7)$$

Konform esetben (6)–(7) ugyanazokat a funkcionálokat definiálja, mint (3)–(4).
Legyen

$$N_{V_h(\Omega)} := \{p_h \in P_h(\Omega) : b(\vec{v}_h, p_h) = 0 \quad \forall \vec{v}_h \in V_h(\Omega)\}$$

a diszkrét gradiens operátor nulltere.

Ahhoz, hogy az (5) feladat egyértelműen megoldható legyen a $V_h(\Omega)$, $(P_h(\Omega) \setminus N_{V_h(\Omega)})$ terekben szükséges az úgynevezett diszkrét inf-sup feltétel teljesülése, azaz létezzon olyan $\beta_h > 0$ konstans, hogy

$$\sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{b(\vec{v}_h, q_h)}{|\vec{v}_h|_1} \geq \beta_h \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q_h \in P_h(\Omega) \setminus N_{V_h(\Omega)},$$

ahol $|\vec{v}_h|_1 = (a(\vec{v}_h, \vec{v}_h))^{1/2}$. Ha $\beta_h \geq \beta > 0$, ahol β független h -től, akkor a végeelem megoldás stabil (ld. [3]), azaz

$$\|\vec{u}_h\|_1 \leq C_1 \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|p_h\|_0 \leq C_2 \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ebben az esetben a $V_h(\Omega)$, $P_h(\Omega)$ végeelem párt stabilnak (vagy inf-sup stabilnak) nevezzük.

Ha az inf-sup feltétel nem teljesül, akkor tipikusan a sebességek konvergálnak, a nyomás viszont nem.

Ha $|\cdot|_1$ normát definiál a $V_h(\Omega)$ téren, akkor az inf-sup feltétel elegendő is az egyértelmű megoldás létezéséhez.

3. A Gauss–Legendre-elemek

Jelölje $\mathbb{P}_k(\Delta)$ a Δ háromszögen definiált legfeljebb k -adfokú polinomok terét, és tegyük fel, hogy a \mathcal{T}_h triangularizáció reguláris, azaz létezik olyan h -től független κ konstans, hogy

$$h_\Delta \leq \kappa \rho_\Delta \quad \forall \Delta \in \mathcal{T}_h,$$

ahol h_Δ a Δ háromszög átmérője, ρ_Δ pedig a Δ háromszögbe írható körök sugarainak maximuma.

Vizsgálataink kiindulópontja Scott és Vogelius [10] cikke, melyben a konform, háromszöges $\mathbb{P}_k/\mathbb{P}_{k-1}$ elemekkel foglalkoztak: itt a sebességet háromszögenként k -adrendű, a háromszögek között folytonos polinomokkal, míg a nyomást háromszögenként $(k-1)$ -adrendű polinomokkal approximálták (a diszkrét nyomás folytonossága nem feltétel). A megfelelő diszkrét terek:

$$P_h(\Omega) = \{p_h \in L^2(\Omega) : p_h|_\Delta \in \mathbb{P}_{k-1}(\Delta), \Delta \in \mathcal{T}_h\}, \quad (8)$$

$$V_h(\Omega) = \{\vec{v}_h \in (H_0^1(\Omega))^2 : \vec{v}_h|_\Delta \in (\mathbb{P}_k(\Delta))^2, \Delta \in \mathcal{T}_h\}. \quad (9)$$

$k \geq 4$ esetén a (8)–(9) végeelem pár stabilitása és diszkrét gradiens operátor nullterének dimenziója attól függ, hogy a rács tartalmaz-e közel-szinguláris, ill. szinguláris pontokat.

3.1. Definíció. Legyen x_0 a \mathcal{T}_h triangularizáció egy rácspontja. Jelölje Δ_i , $i = 1, \dots, n$, a triangularizáció azon háromszögeit, melyeknek x_0 csúcspontja és legyen Θ_i a Δ_i háromszög x_0 -beli szöge. Tegyük fel, hogy a háromszögek sor-számozása olyan, hogy a Δ_i és Δ_{i+1} háromszögeknek van közös oldala minden $i = 1, \dots, n-1$ esetén. Ekkor az x_0 pontot szinguláris pontnak nevezzük, ha $\Theta_i + \Theta_{i+1} = \pi$, $i = 1, \dots, n-1$, teljesül. Az x_0 szinguláris pont belső szinguláris pont, ha $x_0 \in \Omega \setminus \Gamma$ (ekkor $n = 4$), és perem szinguláris pont, ha $x_0 \in \Gamma$ (ekkor $n \leq 4$).

Szemléletesen, szinguláris pontnak nevezünk egy rácspontot, ha a triangularizáció azon élei, melyek tartalmazzák az adott rácspontot két (egymást a csúcsban metsző) egyenesen fekszenek. A 3. ábrán egy belső szinguláris pont látható, míg a perem szinguláris pont 4 típusát az 1. és 2. ábrán mutatjuk meg. A szinguláris pontot mindhárom ábrán S_0 jelöli, a tartomány peremét vastag vonallal jelöltük.

A [10]-ben leírtak alapján belátható, hogy:

3.1. ÁLLÍTÁS. *Ha $k \geq 4$, akkor a (8)–(9) elem esetén a diszkrét gradiens operátor nulltere, az $N_{V_h(\Omega)}$ halmaz $(\sigma + 1)$ -dimenziós, ahol σ a szinguláris pontok számát jelöli.*

A $k \geq 4$ feltétel lényeges; ha például $k = 2$ és $\Omega = [0, 1]^2$, akkor standard triangularizáció esetén $\dim N_{V_h(\Omega)} = 6$ (azaz $\dim N_{V_h(\Omega)} = \sigma + 4$), míg a jól ismert „criss-cross” rács (ld. [3]) esetén $\dim N_{V_h(\Omega)} = \sigma + 1$ érvényes.

Az állítás szerint szinguláris pontok jelenléte esetén a diszkrét gradiens nulltere nem részhalmaza a folytonos gradiens operátor nullterének, a bevezetésben már említett jelenséggel találkozunk: a megoldandó lineáris egyenletrendszer nulltere többdimenziós, „energiamentes” nem konstans nyomásfüggvények vannak jelen.

[10]-ben a szerzők definiáltak egy függvényt, amely azt méri, hogy egy nem szinguláris x_0 belső rácspont mennyire közel van ahhoz, hogy szinguláris pont legyen. A 3.1. Definíció jelöléseivel az $R(x_0)$ függvényt a következő módon definiáljuk:

$$R(x_0) := \max\{|\Theta_i + \Theta_j - \pi|, \quad \text{ahol } 1 \leq i, j \leq n, i - j = 1 \pmod n\}.$$

Legyen $\{\mathcal{T}_h\}$, $0 < h \leq 1$ triangularizációk egy családja. A (8)–(9) elem $k \geq 4$ esetén csak akkor stabil, ha létezik egy olyan h -tól független δ konstans, hogy

$$\min\{R(x_0) : x_0 \in \Omega \setminus \Gamma \text{ nem szinguláris rácspont } \mathcal{T}_h\text{-ből}\} \geq \delta > 0$$

teljesül (ld. [10]).

Ha a diszkretizációs paraméter csökkenésével egy nem szinguláris pont tart a szinguláris helyzethez, akkor a stabilitás nem teljesül.

A criss-cross rács számos szinguláris pontot tartalmaz, de a standard rács-generáló programok által készített rácsokban is gyakran megfigyelhetők szinguláris, vagy közel-szinguláris pontok, így többen foglalkoztak azzal, hogyan lehetne ezt a rácsra vonatkozó kellemetlen feltételt kiküszöbölni. Egy lehetséges megoldás

a $V_h(\Omega)$ tér nemkonform bővítése: a sebesség folytonosságát a szomszédos háromszögek közös oldalain csak bizonyos pontokban követeljük meg. Ha ezeket a pontokat a k -adrendű esetben az adott oldalon definiált k -adfokú Legendre-polinom gyökeinek (a k -adrendű Gauss-Legendre-pontoknak) választjuk, akkor a (6) bilineáris funkcionállal normát definiálhatunk ezen a kibővített téren.

3.2. Definiáció. A k -adrendű Gauss-Legendre-elem:

$$P_h(\Omega) = \{p_h \in L^2(\Omega), p_h|_\Delta \in \mathbb{P}_{k-1}(\Delta), \Delta \in \mathcal{T}_h\}, \quad (10)$$

$$V_h^{nc}(\Omega) = \{\vec{v}_h \in (L^2(\Omega))^2, \vec{v}_h|_\Delta \in (\mathbb{P}_k(\Delta))^2, \text{ és } \vec{v}_h \text{ folytonos a } \Delta \text{ háromszög összes Gauss-Legendre-pontjában } \Delta \in \mathcal{T}_h\}, \quad (11)$$

$$\text{a norma } V_{h\text{-n}}: |\vec{v}_h|_{1,h,\Omega} := \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} |\vec{v}_h|_{1,\Delta}^2 \right)^{1/2}.$$

Megjegyzés.

1. Ebben az esetben a homogén peremfeltétel helyett a sebesség v_ℓ , $\ell = 1, 2$, koordináta függvényeire

$$\int_{\Gamma_j} qv_\ell ds = 0, \quad q \in \mathbb{P}_{k-1}(\Gamma_j)$$

teljesül $\forall \Gamma_j \subset \partial\Delta \cap \partial\Omega$, $\forall \Delta \in \mathcal{T}_h$ esetén.

2. $V_h^{nc}(\Omega) \not\subset (H^1(\Omega))^2$ (az elem nem konform), de a sebességek folytonosak a Gauss-Legendre-pontokban, ezért az $|\cdot|_{1,h,\Omega}$ szeminorma normát definiál $V_h^{nc}(\Omega)$ -n.
3. A (10)–(11) végeelem család az ismert Crouzeix–Raviart ($k = 1$), Fortin–Soulie ($k = 2$) és Crouzeix–Falk ($k = 3$) elemek általánosítása. A $k = 4, 6$ esetek vizsgálata [4]-ben szerepel.

Páratlan k esetén a $V_h^{nc}(\Omega)$ tér elemei egyértelműen leírhatóak, ha szabadsági fokoknak az alábbi csomópontokban felvett függvényértékeket választjuk: a háromszögek belsejében egyenletesen elosztunk $(k-2)(k-1)/2$ pontot, a maradék $3k$ pontot pedig a háromszög oldalain, a k -adfokú Legendre-polinom zérushelyeinél helyezzük el. Páros k esetén azonban létezik olyan k -adfokú polinom, amely a háromszög oldalain csak a k -adrendű Gauss-Legendre-pontokban tűnik el.

3.3. Definiáció. Páros k esetén a k -adrendű nemkonform buborék függvény olyan (az adott háromszögön) definiált polinom, mely a háromszög minden oldalán a k -adrendű Legendre-polinommal egyenlő:

$$B_{n,\Delta}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 P_k^{(0,0)}(1-2\lambda_i) - 1 \right), \quad (12)$$

ahol $P_k^{(0,0)}$ jelöli az 1 főegyütthatójú, a $[-1, 1]$ -en értelmezett k -adrendű Legendre-polinomot, λ_i , $i = 1, 2, 3$, pedig a Δ -n definiált baricentrikus koordináták.

Megjegyzés.

1. $k \geq 4$ esetén a definícióban leírt tulajdonsággal nem csak a (12) alakú függvények rendelkeznek, hanem minden $B_{n,\Delta}^{(k)} + B_{c,\Delta}^{(k)}$ alakú függvény. Itt $B_{c,\Delta}^{(k)}$ egy k -adrendű konform buborék függvény: $B_{c,\Delta}^{(k)} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 q_{k-3}$, ahol q_{k-3} tetszőleges, a Δ háromszögön definiált $(k-3)$ -adfokú polinom.
2. Páratlan k esetén a (12) függvény a háromszög oldalain azonosan nulla.
3. A $k = 2$ esetben

$$B_{n,\Delta}^{(2)} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 P_2^{(0,0)}(1 - 2\lambda_i) - 1 \right\} = 3 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 - 2,$$

ami éppen a [6]-ban használt buborék függvény, míg $k = 4$ és $k = 6$ esetén $B_{n,\Delta}^{(k)}$ a [4]-ben használt buborék függvényektől csak egy konform tagban különbözik.

3.2. ÁLLÍTÁS. Páros k esetén a (12) segítségével $V_h^{nc}(\Omega)$ a következő módon is leírható:

$$V_h^{nc}(\Omega) = V_h(\Omega) + \left\{ \vec{v}, \vec{v}|_{\Delta} = \begin{pmatrix} \alpha_{\Delta} \\ \beta_{\Delta} \end{pmatrix} B_{n,\Delta}^{(k)}, \alpha_{\Delta}, \beta_{\Delta} \in \mathbb{R}, \Delta \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (13)$$

3.1. TÉTEL. Ha k páros, akkor a (10)–(11) végeselem pár esetén a diszkrét gradiens operátor nulltere egydimenziós, azaz a

$$b(\vec{v}_h, p_h) = 0 \quad \forall \vec{v}_h \in V_h^{nc}(\Omega) \quad (14)$$

összefüggés csak konstans p_h esetén teljesül.

Bizonyítás. Legyen először $k = 2$, és tegyük fel, hogy $p_h \in P_h(\Omega)$ -ra (14) teljesül. Legyen $\Delta \in \mathcal{T}_h$ egy olyan háromszög, melyen p_h nem azonosan nulla. Ekkor $\vec{v}_h|_{\Delta} = (B_{n,\Delta}^{(2)}, 0)$, $\vec{v}_h|_{\Omega \setminus \Delta} \equiv 0$ választással, felhasználva, hogy $\frac{\partial p_h}{\partial x_1}$ konstans, (14)-ből következik, hogy

$$0 = \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \vec{v}_h dx = - \int_{\Delta} \frac{\partial p_h}{\partial x_1} B_{n,\Delta}^{(2)} dx = - \frac{\partial p_h}{\partial x_1} \int_{\Delta} B_{n,\Delta}^{(2)} dx = \frac{\partial p_h}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{4},$$

így $\frac{\partial p_h}{\partial x_1} \equiv 0$. Hasonlóan adódik, hogy $\frac{\partial p_h}{\partial x_2} \equiv 0$, így p_h konstans a Δ háromszög fölött. Annak igazolásához, hogy p_h konstans az egész tartományon, legyen Δ_1 és Δ_2 két közös oldallal rendelkező háromszög, és teljesüljön $p_h|_{\Delta_i} \equiv c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Legyen v a skalár eset Lagrange-bázisának az az eleme, melynek értéke a

két háromszög közös oldalának felezőpontjában nem nulla. A $\vec{v}_{h,1}|_{\Delta_1 \cup \Delta_2} = (v, 0)$, $\vec{v}_{h,1}|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)} \equiv 0$ és $\vec{v}_{h,2}|_{\Delta_1 \cup \Delta_2} = (0, v)$, $\vec{v}_{h,2}|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)} \equiv 0$ függvényekkel felírva a $b(\vec{v}_h, p_h) = 0$ egyenletet kapjuk, hogy $c_1 = c_2$.

$k \geq 4$ esetén a részletesebb bizonyítást lásd [1]-ben és [2]-ben. A bizonyítás vázolata: a 3.2. állítást felhasználva előbb leírjuk az $N_{V_h(\Omega)}$ teret, majd belátjuk, hogy minden $p_h \in N_{V_h(\Omega)}$ -ra

$$b(\vec{v}_h, p_h) \neq 0$$

teljesül a $\vec{v}_h|_{\Delta} = (B_{n,\Delta}^{(k)}, 0)$, $\vec{v}_h|_{\Omega \setminus \Delta} \equiv 0$ vagy $\vec{v}_h|_{\Delta} = (0, B_{n,\Delta}^{(k)})$, $v_h|_{\Omega \setminus \Delta} \equiv 0$ függvények valamelyikével, ahol Δ egy tetszőleges háromszög p_h tartójából.

Az $N_{V_h(\Omega)}$ teret egy olyan bázisával írjuk le, amely a konstans függvény mellett σ darab olyan függvényt tartalmaz, amelyek mindegyike hozzárendelhető a rács egy szinguláris pontjához oly módon, hogy csak a szinguláris pontot tartalmazó háromszögeken vesz fel nullától különböző értékeket.

Vizsgáljuk a $b(\vec{v}_h, p_h) = 0$ egyenletet először olyan \vec{v}_h függvényekre, melyek csak egy rögzített Δ háromszög belsejében vesznek fel nullától különböző értékeket. Ekkor $\vec{v}_h|_{\Delta} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \vec{q}_{k-3}$, ahol λ_i , $i = 1, 2, 3$, a Δ -beli baricentrikus koordináták és \vec{q}_{k-3} a Δ háromszög fölött definiált tetszőleges $(k-3)$ -adfokú polinom. A $b(\vec{v}_h, p_h) = 0$ egyenletből parciális integrálás után kapjuk, hogy $\frac{\partial p_h}{\partial x_1}$ és $\frac{\partial p_h}{\partial x_2}$ olyan $(k-2)$ -adfokú polinomok, melyek a Δ háromszög fölött a $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ súlyfüggvényre nézve ortogonálisak $\mathbb{P}_{k-3}(\Delta)$ -ra. Felhasználva a háromszögek fölött ortogonális polinomrendszer leírását [8] belátható, hogy adott szinguláris pont esetén a hozzátartozó bázis függvény minden olyan Δ háromszögben, melynek a szinguláris pont csúcspontja, a $\mathbb{P}_{k-1}^{(0,2)}(1-2\lambda_i)$ konstansszorosával egyenlő. Itt $\mathbb{P}_{k-1}^{(0,2)}$ a $[-1, 1]$ -en értelmezett $(0, 2)$ paraméterű Jacobi-polinom, λ_i pedig az a baricentrikus koordináta Δ -n, amelynek az értéke a szinguláris pontban 1. Részletesebben, a különböző típusú perem szinguláris pontok és a belső szinguláris pont esetén:

A) Legyen az S_0 I-es típusú perem szinguláris pont. Ekkor a triangularizáció egyetlen háromszögének (legyen ez Δ_1) csúcspontja S_0 (ld. 1. ábra, itt az $S_0 S_1$ és $S_0 S_2$ szakaszok a tartomány peremén helyezkednek el). Az S_0 szinguláris ponthoz rendelt eleme a bázisnak:

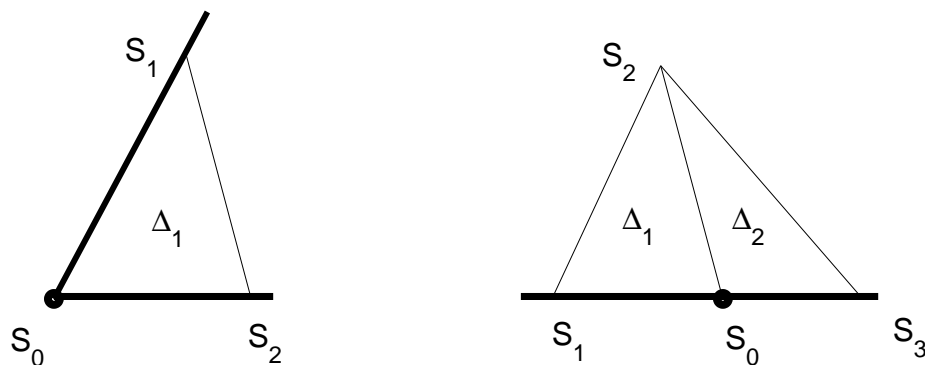
$$q_h|_{\Delta_1} = \mathbb{P}_{k-1}^{(0,2)}(1-2\lambda_3), \quad q_h|_{\Omega \setminus \Delta_1} \equiv 0,$$

ahol λ_3 az a baricentrikus koordináta Δ_1 -ben, amelynek S_0 -ban az értéke 1.

B) Legyen S_0 II. típusú perem szinguláris pont. Ekkor S_0 a triangularizáció két háromszögének (Δ_1 és Δ_2) csúcspontja, és a két háromszög S_0 pontnál lévő szögének összege π (ld. 1. ábra, itt az $S_1 S_3$ szakasz része a tartomány peremének). Az S_0 ponthoz tartozó eleme a bázisnak

$$q_h|_{\Delta_1} = \mathbb{P}_{k-1}^{(0,2)}(1-2\lambda_3^{(1)}), \quad q_h|_{\Delta_2} = -\frac{1}{t_0} \mathbb{P}_{k-1}^{(0,2)}(1-2\lambda_3^{(2)}), \quad q_h|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)} \equiv 0,$$

ahol $S_0 \vec{S}_3 = -t_0 S_0 \vec{S}_1$, $t_0 > 0$, és $\lambda_3^{(1)}$, ill. $\lambda_3^{(2)}$ az a baricentrikus koordináta Δ_1 -ben, ill. Δ_2 -ben, amelynek az értéke S_0 -ban 1.



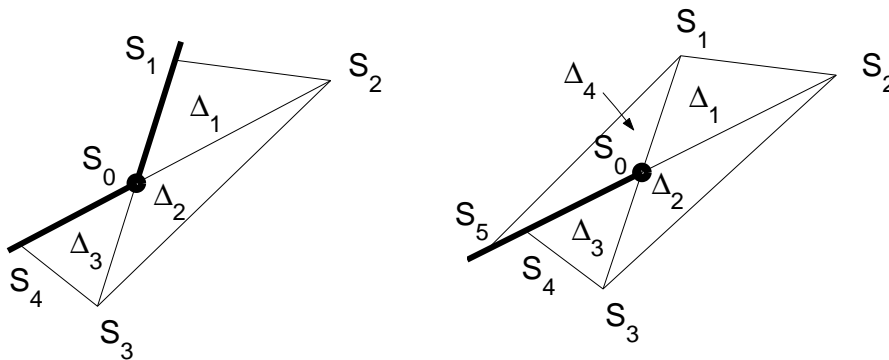
1. ábra. I-es és II-es típusú perem szinguláris pont

C) Legyen S_0 III. típusú perem szinguláris pont. Ekkor S_0 a triangularizáció 3 háromszögének ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$) csúcspontja (ld. 2. ábra, ahol az S_0S_1 és S_0S_4 szakaszok a tartomány peremén vannak). Az S_0 ponthoz rendelt függvény:

$$q_h|_{\Delta_1} = P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), \quad q_h|_{\Delta_2} = -\frac{1}{t_0}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}),$$

$$q_h|_{\Delta_3} = \frac{1}{t_0t_1}P_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), \quad q_h|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)} \equiv 0,$$

ahol $S_0\vec{S}_3 = -t_0S_0\vec{S}_1$, $S_0\vec{S}_4 = -t_1S_0\vec{S}_2$, $t_0, t_1 > 0$, és $\lambda_3^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, az a bari-centrikus koordináta Δ_i -ben, amelynek az értéke S_0 -ban 1.



2. ábra. III. és IV. típusú perem szinguláris pont

D) Legyen S_0 IV. típusú perem szinguláris pont. Ekkor az S_0 pont a triangularizáció 4 háromszögének (Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$) csúcspontja (ld. 2. ábra, ahol az $S_0S_4S_5$

szakasz a tartomány peremén fekszik). Az S_0 ponthoz rendelt függvény:

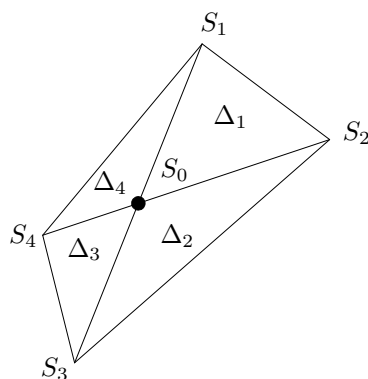
$$\begin{aligned} q|_{\Delta_1} &= \mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), & q|_{\Delta_2} &= -\frac{1}{t_0}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \\ q|_{\Delta_3} &= \frac{1}{t_0 t_1}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), & q|_{\Delta_4} &= -\frac{1}{t_2}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(4)}), \\ q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)} &\equiv 0, \end{aligned}$$

ahol $S_0 \vec{S}_3 = -t_0 S_0 \vec{S}_1$, $S_0 \vec{S}_4 = -t_1 S_0 \vec{S}_2$, $S_0 \vec{S}_5 = -t_2 S_0 \vec{S}_2$, $t_0, t_1, t_2 > 0$, és $\lambda_3^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, az a baricentrikus koordináta Δ_i -ben, amelynek az értéke S_0 -ban 1.

E) Legyen S_0 belső szinguláris pont és Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, az S_0 körüli háromszögek (lásd a 3. ábrát). Ekkor az S_0 ponthoz rendelt függvény:

$$\begin{aligned} q|_{\Delta_1} &= \mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(1)}), & q|_{\Delta_2} &= -\frac{1}{t_0}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(2)}), \\ q|_{\Delta_3} &= \frac{1}{t_0 t_1}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(3)}), & q|_{\Delta_4} &= -\frac{1}{t_1}\mathbf{P}_{k-1}^{(0,2)}(1 - 2\lambda_3^{(4)}), \\ q|_{\Omega \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4)} &\equiv 0, \end{aligned}$$

ahol $S_0 \vec{S}_3 = -t_0 S_0 \vec{S}_1$, $S_0 \vec{S}_4 = -t_1 S_0 \vec{S}_2$, $t_0, t_1 > 0$, és $\lambda_3^{(i)}$, $i = 1, \dots, 4$, azok a baricentrikus koordináták Δ_i -ben, $i = 1, 2, 3, 4$, melyek értéke az S_0 -ban 1.



3. ábra. Egy belső szinguláris pont.

□

4. A páros rendű Gauss–Legendre-elemek stabilitása

Páros $k \geq 2$ értékek esetén a stabilitás a [11]-ben leírt makroelem módszer nemkonform esetre készített módosításával bizonyítható (részletesen lásd [2]-ben).

Itt alapvető szerepet játszik az a tény, hogy a páros rendű Gauss–Legendre-elemek esetén a diszkrét gradiens nulltere – a rács esetleges szingularitásától függetlenül – egydimenziós. Először (ugyanúgy, mint [11]-ben) definiáljuk a makroelemeket, ill. a makroelemek ekvivalenciáját.

4.1. Definíció. Egy makroelem \mathcal{T}_h -beli szomszédos háromszögek uniója. Az M makroelem ekvivalens az \hat{M} referencia makroelemmel, ha létezik olyan $F_M : \hat{M} \rightarrow M$ leképezés, melyre az alábbi feltételek teljesülnek:

1. F_M folytonos és kölcsönösen egyértelmű,
2. $F_M(\hat{M}) = M$,
3. ha $\hat{M} = \bigcup_{j=1}^m \hat{\Delta}_j$, ahol $\hat{\Delta}_j$, $j = 1, \dots, m$, az \hat{M} -et alkotó háromszögek, akkor az M makroelemet a $\Delta_j = F_M(\hat{\Delta}_j)$, $j = 1, \dots, m$, háromszögek alkotják,
4. $F_{M|\Delta_j} = F_{\Delta_j} \circ F_{\hat{\Delta}_j}^{-1}$, $j = 1, \dots, m$, ahol $F_{\hat{\Delta}_j}$ és F_{Δ_j} a referencia háromszöget $\hat{\Delta}_j$ -re, ill. Δ_j -re leképező affin transzformációk.

A stabilitás igazolásához makroelemek olyan $\mathcal{E}_{\hat{M}_i}$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 1$, ekvivalencia osztályait kell definiálnunk, amelyekre a következő két feltétel teljesül:

1. tetszőleges h esetén a \mathcal{T}_h -beli háromszögek összecsoportosíthatóak makroelemekké úgy, hogy az így kapott \mathcal{M}_h makroelem-felosztás minden $M \in \mathcal{M}_h$ eleme besorolható valamelyik $\mathcal{E}_{\hat{M}_i}$, $i = 1, \dots, n$ makroelem-osztályba,
2. minden $M \in \mathcal{E}_{\hat{M}_i}$, $i = 1, \dots, n$ esetén az

$$N_M^{nc} := \{p_h \in P_h(M) : b(\vec{v}_h, p_h) = 0 \quad \forall \vec{v}_h \in V_h^{nc}(M)\}$$

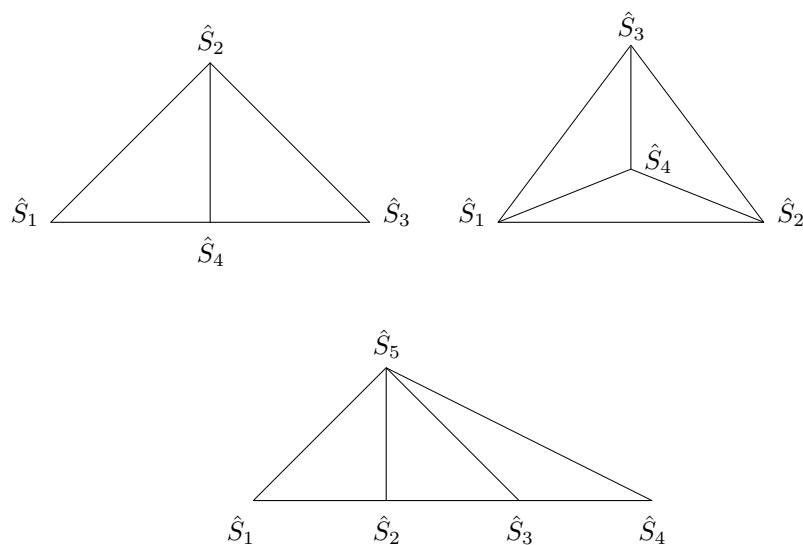
tér egydimenziós.

4.1. TÉTEL. *Ha a fenti két feltétel teljesül, akkor a (10)–(11) elem inf-sup stabil.*

A tétel bizonyítása [2]-ben található.

4.2. TÉTEL. *Páros $k \geq 2$ esetén a (10)–(11) elem inf-sup stabil.*

Bizonyítás. Esetünkben 3 makroelem osztályt definiálunk; $\mathcal{E}_{\hat{M}_1}$ -be tartoznak azok a makroelemek, amelyek két szomszédos (közös oldallal rendelkező) háromszögből állnak, $\mathcal{E}_{\hat{M}_2}$ -be azok a makroelemek, amelyeket 3 olyan háromszög alkot, amelyek közül bármely kettőnek van közös oldala, $\mathcal{E}_{\hat{M}_3}$ -at a 3 szomszédos háromszögből álló, nem az $\mathcal{E}_{\hat{M}_2}$ -be tartozó makroelemek alkotják. Az \hat{M}_1 , \hat{M}_2 , \hat{M}_3 referenciaelemek (melyekre a megfelelő osztályok elemei folytonos, kölcsönösen egyértelmű módon leképezhetőek):



A $\mathcal{E}_{\hat{M}_i}$, $i = 1, 2, 3$ osztályok teljesítik az 1. makroelem feltételt, a 2. feltételben leírt állítás pedig következik 3.1. Tételből. Mivel a két makroelem feltétel teljesül, a (10)–(11) végeelem stabil. \square

Megjegyzés.

1. Itt fontos szerepe van a diszkrét gradiens nulltere dimenziójának. Míg a konform Scott–Vogelius-elemek esetén ha a triangularizációban egy közel szinguláris pont tart a szinguláris helyzethez, a megfelelő nullterek nem folytonos módon változnak (a határhelyzetben a nulltér dimenziója eggyel nagyobb), addig a Gauss–Legendre-elemek esetén a nulltér mindig egydimenziós, csak a konstansfüggvényt tartalmazza.
2. Páratlan rendű Gauss–Legendre-elemek esetén a stabilitás ugyanezen makroelem osztályok választásával nem igazolható. Be lehet látni, hogy a páratlan $k \geq 3$ értékekre az $\mathcal{E}_{\hat{M}_1}$ osztályba tartozó M makroelemek esetén az N_M^{nc} térnek van legalább egy nem konstans eleme (ld. [1]). A $k = 3$ esetet [5]-ben vizsgálták, ott bizonyos triangularizációkra megmutatták az elem stabilitását és sejtésként megemlítik, hogy az elem tetszőleges triangularizáció esetén stabil.

Hivatkozások

- [1] Á. BARAN: *A high-order non-conforming finite element family*, PhD értekezés, Debreceni Egyetem, Informatikai Kar, 2007.
- [2] Á. BARAN, G. STOYAN: *Gauss–Legendre-elements: a stable higher order non-conforming finite element family*, *Computing* **79**, no. 1, 1–21 (2007).
- [3] F. BREZZI, M. FORTIN: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer–Verlag New York, 1991.
- [4] Y. CHA, M. LEE, S. LEE: *Stable nonconforming methods for the Stokes problem*, *Applied Mathematics and Computation* **114**, 155–174 (2000).
- [5] M. CROUZEIX, R. S. FALK: *Nonconforming finite elements for the Stokes problem*, *Mathematics of Computation* **186**, 437–456 (1989).
- [6] M. FORTIN, M. SOULIE: *A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **19**, 505–520 (1983).
- [7] V. JOHN, G. MATTHIES, Higher order finite element discretizations in a benchmark problem for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **37**, 885–903, (2001).
- [8] T. KOORNWINDER, Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials. In: *Theory and Application of Special Functions* (R. Askey ed.), pp 435–495, Academic Press, 1975.
- [9] G. MATTHIES, L. TOBISKA: *Inf-sup stable non-conforming finite elements of arbitrary order on triangles*, *Numerische Mathematik* **102**, 293–309 (2005).
- [10] L.-R. SCOTT, M. VOGELIUS: *Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials*, *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* **19**, 111–143 (1985).
- [11] R. STENBERG: *Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem: a unified approach*, *Math. of Comp.* **165**, 9–23 (1984).
- [12] G. STOYAN, Á. BARAN: *Crouzeix–Velté decompositions for higher-order finite elements*, *Comp. Math. with Appls.* **51**, 967–986 (2006).
- [13] M. SCHÄFER, S. TUREK: *The benchmark problem “Flow around a cylinder”*. In: E. H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II* vol. **52** of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 547–566, (1996).

BARAN ÁGNES

Debreceni Egyetem, Informatikai Kar

Alkalmazott Matematika és Valószínűségyszámítás Tanszék

4010 Debrecen, Pf. 12.

baran.agnes@inf.unideb.hu

A HIGH-ORDER NON-CONFORMING FINITE ELEMENT FAMILY
FOR THE SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL STOKES PROBLEM

ÁGNES BARAN

In this paper we describe a triangular non-conforming finite element family for the two-dimensional Stokes problem. Similarly to the conforming element pair defined by Scott and Vogelius, pressure and velocity are approximated trianglewise by polynomials of order $k - 1$ and k , respectively. The continuity of the discrete velocity on the common sides of the triangles, unlike the Scott-Vogelius element, is required at particular points only. The finite element pair is defined for all $k \geq 1$ and it is a generalization of low order ($k = 1, 2, 3$) cases. We show that for even k the finite element pair can be obtained from the Scott-Vogelius element by adding trianglewise a non-conforming bubble function to the local basis of the velocity space. The bubble function removes the algebraic discontinuity of the Scott-Vogelius elements, i.e. the presence of the "energy-free" discrete pressure. We show that the element pair is stable for even k .