Alkalmazott Matematikai Lapok **25** (2008), 47-59.

A KIVÁLASZTÁSI FÜGGVÉNY RACIONALITÁSA ÉS RACIONALIZÁLHATÓSÁGA AZ OPCIONÁLIS HALMAZRENDSZER FÜGGVÉNYÉBEN

BODÓ BEÁTA

Ebben a dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy egy döntési struktúra opcionális halmazrendszerének bővítése, illetve szűkítése hogyan befolyásolja a döntési struktúra racionáltságát, illetve racionalizálhatóságát. Célunk olyan feltételek megadása, amelyek mellett a döntési struktúra által kinyilvánított preferencia megőrizhető az opcionális halmazrendszer bővítése, ill. szűkítése után kapott döntési struktúrára is. Megmutatjuk, hogy ebben az értelemben bármely ellentmondásos valódi döntési mechanizmus R-racionalizálható.

1. Bevezetés

Életünkben szinte naponta döntések sorozatával kell szembenéznünk. Ha bemegyünk egy ruházati szaküzletbe kabátot venni, akkor előttünk megjelennek alternatívaként a különböző kollekciók elemei különböző színben, fazonban, árban stb. Az azonos szempont szerint elénk rakott kabátokról könnyen el tudjuk dönteni, melyek felelnek meg az ízlésünknek. De ebből következik-e, hogy az összes szempont figyelembevételével is racionálisan döntünk? Egyáltalán, mit jelent a racionalitás? És ha az eladó egy újabb szempont szerint is rak elénk egy kollekciót? Befolyásolhatja ez a korábbi döntésünket?

Hasonló problémák fogalmazhatók meg egy tender elbírálásánál is. A pályázók, akik a lehetséges alternatívákat jelentik, a vállalandó feladat részfeladataiban különböző technológiákat alkalmazhatnak; lehet, hogy a költségek részproblémánként másként oszlanak meg a különböző pályázatokban. Vagyis különböző szempontok szerint lehet csoportosítani a pályázatokat. Lehet, hogy két pályázó az egyik szempont szerint azonos, a másik szempont szerint különböző részcsoportba kerül. Egy adott szempont szerint azonos csoportban lévő alternatívák között viszonylag könnyű eldönteni, hogy az adott szempont szerint melyek az előnyösebbek. De vajon az egyes szempontok szerinti választás meghatározza-e azt a preferenciarendszert, ami eldönti, melyik alternatívá(ka)t kell választanunk? És ha bővítjük a szempontrendszert, vagy elhanyagolunk bizonyos szempontokat, vagy összevonunk bizonyos szempontokat, ez hogyan hat a döntésünkre? Ha nem tudtunk racionális döntést hozni, akkor új szempontok bevezetésével vagy más szempontok elvetésével racionalizálható-e a döntésünk? Ha racionális volt a döntésünk, akkor az mennyire stabil, mennyire érzékeny a szempontrendszer egy-egy elemmel való változtatására?

Az ilyen és az ezekhez hasonló problémák motiválják azt a kutatást, aminek eredményeit e dolgozat következő fejezeteiben tárgyaljuk.

2. Alapvető fogalmak és tételek

Ebben a fejezetben áttekintjük azokat a kiválasztási függvénnyel kapcsolatos fogalmakat és tételeket, amelyekre a következő fejezetekben kutatásainkban szükségünk lesz.

Legyen $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ egy véges *alternatívahalmaz.* Jelölje 2^Ω az Ω részhalmazainak halmazát, és legyen adott egy $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega \backslash \emptyset$ halmazrendszer, amit *opcionális halmazrendszer*nek nevezünk.

Az opcionális halmazrendszer elemei a gyakorlatban az alternatívák olyan részhalmazai, amelyeket a döntéshozatalban azonos szempontok szerint kezelünk.

2.1. Definíció. Az $X \in \mathcal{B}$ halmazokhoz a $C : \mathcal{B} \to 2^\Omega$ $C(X) \subseteq X$ hozzárendeléssel definiált halmaz-halmazfüggvényt a $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega$ halmazrendszer *kiválasztási függvény*ének nevezzük.
Ha $C : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, akkor azt mondjuk, hogy C *injektív.*

A kiválasztási függvény tehát az azonos szempont szerint kezelt alternatívák közül a döntéshozó számára megfelelő alternatívákat választja ki. Meg kell jegyeznünk, hogy ugyanaz a döntéshozó különböző szempontok szerint is értékelhet, azaz az opcionális halmazrendszer különböző elemeihez is rendelhet kiválasztást, ezért nem a döntéshozókkal azonosítjuk az opcionális halmazrendszer elemeit.

2.2. Definíció. A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrát *valódi döntési mechanizmus*nak nevezzük, ha kielégíti a következő feltételeket:

1. $\emptyset \notin \mathcal{B}$;
2. a $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega$ opcionális halmazrendszer lefedi az Ω alternatívahalmazt, azaz
$$\Omega = \bigcup_{X \in \mathcal{B}} X;$$
3. $C(X) \neq \emptyset \quad \forall X \in \mathcal{B}$;
4. a $\mathcal{B} \subseteq 2^\Omega$ opcionális halmazrendszer 2^Ω bármely elemét legfeljebb egyszer tartalmazza.

Ha teljesül továbbá, hogy

5. $\mathcal{B} = 2^\Omega \setminus \emptyset$,

akkor *tökéletes döntési mechanizmus*ról beszélünk.

Ezek a feltételek a reális döntés igényéből adódnak. Ugyanis, ha valamely szempontot egyik alternatíva sem tükrözi, akkor az a szempont a választás szempontjából érdektelen. Ha egy alternatíva a döntés egyetlen szempontja szerint sem értékelhető, akkor ez nem valódi alternatíva, így elhagyható az Ω alternatívahalmazból. A 3. feltétel a döntési kényszer megfogalmazása. A 4. feltétel azt fejezi ki, hogy ha az alternatívák egy részhalmaza több szempont szerint is értékelhető, akkor ezeket a szempontokat összevontan kell kezelni. Végül, a tökéletes döntési mechanizmus egy ideális struktúra, feltételezve, hogy létezik olyan - a valós döntési problémák esetén szinte soha meg nem adható - szempontrendszer, amely minden alternatíva-csoportot tud jellemezni.

2.3. Definíció. Egy $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrát *P-racionális*nak, *normális*nak vagy *P-ellentmondásmentes*nek nevezünk, ha létezik egy olyan P bináris reláció az Ω alternatívahalmazon, hogy minden $X \in \mathcal{B}$ esetén $C(X)$ az X maximális elemeinek $C_P^{MAX}(X)$ halmaza, azaz

$$C(X) = C_P^{MAX}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

ahol

$$C_P^{MAX}(X) = \{x \in X : xPy \quad \forall y \in X\}.$$

Itt és a későbbiekben P-vel mindig egy tetszőleges relációt jelölünk. A későbbiekben, ha speciális tulajdonságú relációval foglalkozunk, akkor a jelölés erre feltétlenül utalni fog.

Megjegyezzük, hogy számos publikáció kizárólag a tökéletes döntési mechanizmussal foglalkozik. Mivel ebben a dolgozatban valós problémák motiválják vizsgálatainkat, és éppen azt vizsgáljuk, hogy a döntési mechanizmus racionálitása hogyan reagál az opcionális halmazrendszer bővítésére, ill. szűkítésére, így kilépünk ebből a kutatási körből.

Minden valódi döntési mechanizmus kinyilvánít két bináris relációt Ω-n, nevezetesen (ld. [7], [8]):

2.4. Definíció. R a C *által* $\mathcal{B}$*-n kinyilvánított Richter-reláció*, ha

$$xRy \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{B} : x \in C(X), \quad y \in X. \tag{1}$$

2.5. Definíció. S a C *által* $\mathcal{B}$*-n kinyilvánított Samuelson-reláció*, ha

$$xSy \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{B} : x \in C(X), \quad y \in X \setminus C(X).$$

A kinyilvánított relációk nagy mértékben függnek a valódi döntési mechanizmust meghatározó $\mathcal{B} \subseteq 2^{\Omega}$ opcionális halmazrendszertől, ill. annak halmazain megadott $C(X)$, $X \in \mathcal{B}$ kiválasztási függvénytől.

Másrészt a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus nem feltétlenül racionális sem a Richter-, sem a Samuelson-relációval. Azonban mindig fennáll a következő tartalmazás (ld. [5]):

2.1. Állítás. *Legyen adott egy $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus. Akkor $\forall X \in \mathcal{B}$ esetén*

$$C_S^{ND}(X) \subseteq C(X) \subseteq C_R^{MAX}(X),$$

ahol

$$C_S^{ND}(X) = \{x \in X : y\overline{S}x \quad \forall y \in X\}, \tag{2}$$

Megjegyezzük, hogy általában bármely P reláció esetén

$$C_P^{ND}(X) = C_{P^d}^{MAX}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

ahol $P^d = \overline{P^{-1}}$ a P reláció duálisa. Így a (2) is felírható az S duálisa szerinti maximális elemek halmazaként.

A Richter- és Samuelson-relációk kinyilvánító ereje abban van, hogy általuk olyan alternatívacsoporthoz is rendelhetünk kiválasztást, amelyek a $\mathcal{B}$ opcionális halmazrendszerben nem szerepelnek. Így fontos szerepük van a racionalitás és a racionálhatóság kérdésében. Ezt a tényt fogjuk a továbbiakban kihasználni, de ebben a dolgozatban kizárólag a Richter-reláció alkalmazásával foglalkozunk.

Számos publikáció foglalkozik a racionálitás kérdésével. Ezek közül, a teljesség igénye nélkül, néhányat említünk: [1], [4], [5], [6], [7], [9], [10] stb.

Ebben a dolgozatban fontos szerepet játszanak az R-racionális döntési mechanizmusok.

A 2.3. definíciónak megfelelően egyaránt fogjuk használni a *R-ellentmondásos* fogalmat mind a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmusra, ha

$$\exists X \in \mathcal{B} \quad \text{hogy} \quad C(X) \subset C_R^{MAX}(X),$$

mind magukra a szigorú tartalmazást realizáló $X \in \mathcal{B}$ halmazokra.

3. Az opcionális halmazrendszer Richter-relációt tartó bővíthetősége

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, milyen hatással van az alternatívahalmaz egy új részhalmazának a $\mathcal{B}$ halmazrendszerhez való kapcsolásának és a hozzákapcsolt halmazon a kiválasztás megválasztásának úgy, hogy a döntési mechanizmusban ne jelenjenek meg újabb ellentmondások, vagyis ha a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus R-racionális volt, akkor $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ is R-racionális maradjon, ha pedig a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus nem volt R-racionális, akkor a $C(X) \subset C_R^{MAX}(X)$ szigorú tartalmazás továbbra is csak azokra az $X \in \mathcal{B}$ halmazokra teljesüljön, amikre a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ esetében is teljesült.

A bővítést illetően általában kétféle követelménnyel élhetünk:

- vagy azt követeljük meg, hogy a $\mathcal{B}$-beli halmazokon ne változzon a kiválasztás,

– vagy, ha a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus P-racionális volt, akkor a $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ valódi döntési mechanizmus P'-racionális legyen, ahol $P = P'$ nem feltétlenül teljesül.

Ezen dolgozatban csak a első típusú bővítés feltételeit vizsgáljuk. Ebben a megközelítésben természetesnek tűnik, hogy az opcionális halmazrendszerbe bevont új halmazhoz az R-szerinti maximális elemek halmazát rendeljük kiválasztásként.

A második típusú bővítés feltételeit [3]-ban vizsgáltuk.

3.1. Definíció. Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, R a C által $\mathcal{B}$-n kinyilvánított Richter-reláció és $\emptyset \neq X' \in 2^\Omega \setminus \mathcal{B}$. A

$$\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cup \{X'\} \tag{3}$$

$$C'(X) = \begin{cases} C(X), & \text{ha} \quad X \in \mathcal{B}, \\ C_R^{MAX}(X), & \text{ha} \quad X \in 2^\Omega \setminus \mathcal{B}. \end{cases} \tag{4}$$

opcionális halmazzal és kiválasztási függvénnyel definiált $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ struktúrát a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus X'-vel való *R-szerinti bővítés*ének nevezzük.

3.1. ÁLLÍTÁS. *Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus. A bővített $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cup \{X'\}$ opcionális halmazrendszeren a (3) és (4) feltételekkel definiált $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ struktúrán kinyilvánított R^+ Richter-reláció megegyezik az eredeti $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán kinyilvánított R Richter-relációval.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $R = R^+$. Valóban, xR^+y pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $Y \in \mathcal{B}^+$, hogy $x \in C(Y)$ és $y \in Y$. Ez kétféleképpen teljesülhet. Az első esetben létezik $Y \in \mathcal{B}$, hogy

$$x \in C(Y) \quad \text{és} \quad y \in Y,$$

vagyis xRy. A második esetben $Y = X'$, azaz

$$y \in X' \quad \text{és} \quad x \in C'(X') = C_R^{MAX}(X').$$

Az utóbbi tartalmazásból viszont következik, hogy $xRy \ \ \forall y \in X'$, ami az állításunkat igazolja. ∎

A fenti állítás azt garantálja, hogy a 3.1. definíció szerinti bővítéssel újabb ellentmondás nem kerül a rendszerbe (vagyis pontosan azokra az $X \in \mathcal{B}$ halmazokra teljesül a $C'(X) \subset C_R^{MAX}(X)$ feltétel, amelyekre a bővítés előtt is teljesült). Ha tehát a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ R-racionális volt, akkor a $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ is az lesz. Ilyenkor a 3.1. definícióban a (4) előállítás helyett egységesen írhatjuk, hogy

$$C'(X) = C_R^{MAX}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}^+.$$

A fenti bővítéssel azonban nem feltétlenül kapunk valódi döntési mechanizmust. Ehhez még az is szükséges hogy a $C_R^{MAX}(X') \neq \emptyset$ feltétel is teljesüljön. Erre ad szükséges és elégséges feltételt a következő állítás.

3.2. ÁLLÍTÁS. *A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus 3.1. definíció szerinti $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ bővítése az X' halmazzal pontosan akkor lesz valódi döntési mechanizmus, ha létezik az opcionális halmazrendszernek olyan $\emptyset \neq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ részrendszere, hogy*

$$X' \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{B}'} X, \tag{5}$$

$$X' \bigcap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X) \right) \neq \emptyset. \tag{6}$$

Bizonyítás.

Szükségesség. Ha a $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ valódi döntési mechanizmus, akkor teljesül a $C'(X) \neq \emptyset \quad \forall X \in \mathcal{B}^+$ feltétel, így $C'(X') = C_R^{MAX}(X') \neq \emptyset$.

Legyen $x^* \in C_R^{MAX}(X')$. Ekkor minden $x \in X'$ esetén fennáll az $x^* R x$ reláció. Az R reláció (1) definíciója szerint minden $x \in X'$ elemhez létezik olyan $X \in \mathcal{B}$, hogy $x^* \in C(X)$ és $x \in X$. Jelölje ezen X halmazok rendszerét $\mathcal{B}'$. Ezek a halmazok együttesen lefedik az X' halmazt, azaz

$$X' \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{B}'} X, \quad \text{másrészt} \quad x^* \in \bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X),$$

tehát teljesül az

$$X' \bigcap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X) \right) \neq \emptyset$$

feltétel is.

Elégségesség. A valódi döntési mechanizmus definíciójában szereplő 1., 2. és 4. feltételek triviálisan teljesülnek, így elegendő belátnunk a 3. feltétel teljesülését az X' halmazra (a többire (4) miatt automatikusan teljesül, mivel $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus).

Tegyük fel, hogy létezik a tételben megkívánt $\emptyset \neq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ halmazrendszer és válasszunk tetszőleges

$$x^* \in X' \bigcap \left(\bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X) \right)$$

alternatívát. Ekkor $x^* \in X'$. Másrészt

$$x^* \in \bigcap_{X \in \mathcal{B}'} C(X), \quad \text{azaz} \quad x^* \in C(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}'.$$

Innét az R reláció (1) definíciója szerint $x^* R x \; \forall x \in X$ és $\forall X \in \mathcal{B}'$ esetén. Vagyis

$$x^* R x \quad \forall x \in \bigcup_{X \in \mathcal{B}'} X.$$

Mivel $X' \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{B}'} X$, így $x^* R x \;\; \forall x \in X'$, vagyis $x^* \in C_R^{MAX}(X')$, következésképpen $C_R^{MAX}(X') \neq \emptyset$. ■

A 3.1. állítást követő megjegyzés szerint a $C'(X') = C_R^{MAX}(X')$ definícióval újabb ellentmondás nem került a rendszerbe, de ha $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ ellentmondásos volt, akkor a $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ is az maradt.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus 3.1. definíció szerinti $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ valódi döntési mechanizmussá való bővítése ekvivalens a $\mathcal{D}'' = (\Omega, \mathcal{B}^+, C'')$ bővítéssel, ahol*

$$C''(X') = \begin{cases} C(X'), & \text{ha} \quad X' \in \mathcal{B} \\ \{x \in X' : \exists \emptyset \neq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \quad \text{melyekre} & \\ x \in \bigcap\limits_{X \in \mathcal{B}'} C(X) \text{ és } X \subseteq \bigcup\limits_{X \in \mathcal{B}'} X\} \neq \emptyset, & \text{ha} \quad X' \in 2^\Omega \setminus \mathcal{B}. \end{cases}$$

Bizonyítás. A jobb és baloldali halmazok közti két irányú tartalmazás a 3.2. állítás szükségességét és elégségességét bizonyító rész következménye. ∎

A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán vezessük be tetszőleges $a \in \Omega$ alternatívához a

$$Z(a) = \bigcup \{Y \in \mathcal{B} : a \in C(Y)\}\,. \tag{7}$$

halmazt.

A következő állítás bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmára.

3.1. LEMMA. *Bármely $a \in \Omega$ alternatíva esetén a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán a (7) szerint értelmezett $Z(a)$ halmazra*

$$C_R^{MAX}(Z(a)) = \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\}, \tag{8}$$

ahol R a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ által kinyilvánított Richter-reláció.

Bizonyítás. Ha $Z(a) = \emptyset$, akkor az állítás triviális. Legyen $Z(a) \neq \emptyset$. Ekkor

$$\begin{gathered} x^* \in C_R^{MAX}(Z(a)) \\ \Leftrightarrow \\ x^* R y \quad \forall y \in Z(a) \\ \Leftrightarrow \\ \forall y \in Z(a) \quad \exists X_y \in \mathcal{B} : x^* \in C(X_y), \quad y \in X_y \\ \Leftrightarrow \\ Z(a) \subseteq \bigcup \{X_y : y \in Z(a)\} \quad \text{ és } \quad x^* \in \bigcap \{C(X_y) : y \in Z(a)\} \\ \Leftrightarrow \\ Z(a) \subseteq \bigcup \{X_y : y \in Z(a)\} \quad \text{ és } \quad X_y \subseteq \bigcup \{Y \in \mathcal{B} : x^* \in C(Y)\} \quad \forall y \in Z(a) \\ \Leftrightarrow \\ x^* \in Z(x^*) \subseteq \{x \in Z(a) : Z(a) \subseteq Z(x)\} \end{gathered}$$

∎

A fenti lemma még nem garantálja, hogy $C_R^{MAX}(Z(a)) \neq \emptyset$ minden $a \in \Omega$.

3.3. ÁLLÍTÁS. *Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy R-racionális valódi döntési mechanizmus. Válasszunk $a \in \Omega$ alternatívát úgy, hogy teljesüljön a*

$$\emptyset \neq Z(a) \notin \mathcal{B} \tag{9}$$

feltétel, ahol $Z(a)$ a (7) szerint definiált. Akkor a $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cup \{Z(a)\}$ opcionális halmazrendszeren a (4) kiválasztási függvénnyel definiált $\mathcal{D}^+ = (\Omega, \mathcal{B}^+, C')$ struktúra szintén valódi döntési mechanizmus lesz.

Bizonyítás. A valódi döntési mechanizmus definíciójában szereplő 1., 2. és 4. feltételek triviálisan teljesülnek, így elegendő belátnunk a 3. feltétel teljesülését az $Z(a)$ halmazra (a többire a 3.1. definíció miatt automatikusan teljesül, mivel $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus).

Mivel $Z(a) \neq \emptyset$, ezért $a \in Z(a)$, így $C_R^{MAX}(Z(a))$ (8) szerinti előállítása miatt $a \in C_R^{MAX}(Z(a))$. ∎

Az (9) feltétel miatt a $\mathcal{B}$ opcionális halmazrendszer legalább két Y halmazának teljesítenie kell az $a \in C(Y)$ feltételt.

4. Az opcionális halmazrendszer Richter-relációt megtartó szűkíthetősége

Az opcionális halmazrendszer szűkítése általában akkor merül fel, ha az opcionális halmazrendszer elemein redundánsnak tűnő kiválasztásokat észlelünk abban az értelemben, hogy a kinyilvánított Richter-reláció definiálásában valamelyik kiválasztás már nem játszik szerepet, vagy ha az ellentmondásos kiválasztásokat akarjuk kiszűrni a mechanizmusból.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, milyen feltételek mellett lehet az opcionális halmazrendszerből elhagyni egy halmazt, hogy a maradék rendszer olyan valódi döntési mechanizmus legyen, amely megőrzi az eredeteti rendszer által kinyilvánított Richter-relációt.

4.1. Definíció. Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus, R a C által $\mathcal{B}$-n kinyilvánított Richter-reláció és $X' \in \mathcal{B}$. A

$$\mathcal{B}^- = \mathcal{B} \setminus \{X'\} \tag{10}$$

$$C'(X) = C(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}^- \tag{11}$$

opcionális halmazzal és kiválasztási függvénnyel definiált $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúrát a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus X'-vel való *R-tartó szűkítésének* nevezzük, ha teljesül az

$$R^- = R,$$

egyenlőség, ahol R^- a C' által $\mathcal{B}^-$-n kinyilvánított Richter-reláció.

4.1. ÁLLÍTÁS. *Az R-tartó szűkítéssel definiált $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúra valódi döntési mechanizmus.*

Bizonyítás. A valódi döntési mechanizmus 2.2. definíciójában szereplő kritériumok közül az 1., 3. és 4. triviálisan teljesül. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\Omega = \bigcup_{X \in \mathcal{B}^-} X.$$

Tegyük fel, hogy $a \in \Omega$, de $a \notin \bigcup_{X \in \mathcal{B}^-} X$. Mivel $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, így

$$a \in \Omega = \bigcup_{X \in \mathcal{B}} X.$$

Innét következik, hogy $a \in X'$, de $a \notin X \quad \forall X \in \mathcal{B}^-$. Minthogy $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ valódi döntési mechanizmus, ezért $C(X') \neq \emptyset$. Legyen $x \in C(X')$. Akkor xRa, de $x\overline{R^-}a$, így $R \neq R^-$, ami ellentmond az R-tartó szűkítés definíciójának. ∎

A (7)-ben a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán definiált $Z(a)$ halmaz mellé, annak analógiájára definiáljuk a $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúrán a

$$Z^-(a) = \bigcup \{Y \in \mathcal{B}^- : a \in C(Y)\}$$

halmazt is.

4.2. Állítás. *Legyen $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus és $X' \in \mathcal{B}$. A (10) és (11) formulákkal adott $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúra pontosan akkor lesz R-tartó szűkítés, ha teljesül a*

$$Z(a) = Z^-(a) \quad \forall a \in C(X') \tag{12}$$

vagy a vele ekvivalens

$$\bigcap_{a \in C(X')} Z^-(a) \supseteq X' \tag{13}$$

feltétel.

Bizonyítás. Először belátjuk a (12) feltétel szükségességét és elégségességét.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{D}^- = (\Omega, \mathcal{B}^-, C')$ struktúra R-tartó szűkítés az X' halmazzal. Legyen $a \in C(X')$ és $y \in Z(a)$ tetszőleges. Felhasználva az R-tartó szűkítés $R = R^-$ feltételét, kapjuk a következő ekvivalenciasort:

$$\begin{aligned} y \in Z(a) &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{B} : a \in C(X),\, y \in X \\ &\Leftrightarrow aRy \\ &\Leftrightarrow aR^-y \\ &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{B}^- : a \in C'(Y),\, y \in Y \\ &\Leftrightarrow y \in Z^-(a). \end{aligned}$$

Tegyük fel hogy $Z(a) = Z^-(a)$ teljesül minden $a \in C(X')$ esetén.

Legyenek $a \in \Omega$ és $y \in \Omega$ tetszőleges alternatívák. Ekkor

$$\begin{aligned} aR^- y &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{B}^- \subset \mathcal{B} : a \in C'(Y) = C(Y) \quad \text{és} \quad y \in Y \\ &\Rightarrow aRy, \end{aligned}$$

vagyis $R^- \subseteq R$.

Másrészt $aR^- y \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{B} : a \in C(Y)$ és $y \in Y$. Ha $Y \neq X'$, akkor $Y \in \mathcal{B}^-$, így $aR^- y$. Ha $Y = X'$, akkor $a \in C(X')$ és $y \in X' \subseteq Z(a) = Z^-(a)$. Ez azt jelenti, hogy $\exists V \in \mathcal{B}^- : a \in C'(V), y \in V$, vagyis $aR^- y$, azaz $R \subseteq R^-$.

A következőkben azt látjuk be, hogy a (12) feltétel ekvivalens a (13) feltétellel. Valóban, figyelembe véve, hogy $\forall a \in C(X') : X' \subseteq Z^-(a)$ és $Z(a) = Z^-(a) \cup X'$, fennállnak a következő állítások közti ekvivalenciák:

$$\begin{gathered} Z(a) = Z^-(a) \quad \forall a \in C(X') \\ \Leftrightarrow \\ X' \subseteq Z(a) = Z^-(a) \quad \forall a \in C(X') \\ \Leftrightarrow \\ X' \subseteq Z^-(a) \cup X' = Z^-(a) \quad \forall a \in C(X') \\ \Leftrightarrow \\ X' \subseteq \bigcap_{a \in C(X')} Z^-(a). \end{gathered}$$

■

5. A döntési mechanizmus Richter-relációt tartó racionalizálása

Az előző fejezetekben bővítési és szűkítési technikák lehetőséget adnak arra, hogy egy nem racionális döntési mechanizmust racionáljunk. A [4] dolgozat ad két racionalizáló algoritmust, de azt nem vizsgálja, hogy ezek az algoritmusok valódi döntési mechanizmushoz vezetnek-e. Nem nehéz olyan döntési struktúrákat konstruálni, amelyek azt mutatják, hogy az ott adott algoritmusokkal a $C_R^{MAX}(X) \neq \emptyset$ feltétel nem mindig teljesíthető.

Legyen adott egy $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ egy valódi döntési mechanizmus a következő tulajdonságokkal:

C-1: A $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrával adott döntési mechanizmusban minden $x \in \Omega$-ra az $x \in C(X)$ tartalmazás legalább két $X \in \mathcal{B}$-ra teljesül;

C-2: $\exists \mathcal{CB} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{CB} \neq \emptyset$ opcionális részrendszer, amelyen az adott kiválasztás R-ellentmondásos, azaz

$$C(X) \subset C_R^{MAX}(X) \quad \forall X \in \mathcal{CB},$$

ahol R a $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$ struktúrán kinyilvánított Richter-reláció.

5.1. ÁLLÍTÁS. *Bármely, a* **C-1** *és* **C-2** *feltételeket teljesítő valós döntési mechanizmus R-tartó szűkítések és R-szerinti bővítések sorozatával egy, az eredeti $\mathcal{B}$ opcionális halmazrendszerrel adott R-racionális valós döntési mechanizmussá alakítható.*

Bizonyítás. Legyen $X' \in \mathcal{CB}$. X' nem lehet egyelemű, mert $C(\{x\}) \neq \emptyset$ miatt $C(\{x\}) = \{x\}$, így xRx, vagyis $C_R^{MAX}(\{x\}) = \{x\} = C(\{x\})$.

Legyen $X' \in \mathcal{CB}$ kételemű halmaz, azaz $X' = \{a, b\}$. Az X' halmaz kiválasztásának R-ellentmondásosságból következik, hogy X' elemei közül pontosan az egyik lehet kiválasztva, és $C_R^{MAX}(X') = \{a, b\} = X'$. Tegyük fel, hogy $\{a\} = C(X')$. Legyen $\mathcal{B}^- = \mathcal{B} \setminus \{X'\}$. A **C-1** feltétel miatt létezik legalább egy olyan $\mathcal{B} \ni Y \neq X'$, vagyis $Y \in \mathcal{B}^-$ halmaz, hogy $a \in C(Y)$. Így

$$Z^-(a) \neq \emptyset \quad \text{és} \quad Z(a) = Z^-(a) \cup X'.$$

Ha $X' \not\subset Z^-(a)$ teljesül, akkor $b \notin Z^-(a)$, azaz $\nexists Y \in \mathcal{B}^-$, melyre $b \in Y$ és $a \in C(Y) \subseteq Y$, vagyis $b\overline{R}a$, ami ellentmond annak, hogy $b \in C_R^{MAX}(X')$. Tehát $X' \subset Z^-(a)$, azaz teljesül az R-tartó szűkíthetőség 4.2. állításban adott feltétele. Legyen $\mathcal{B}'$ a $Z^-(a)$-t előállító halmazrendszer. Az R-tartó szűkítés elvégzése után kapott új döntési mechanizmus, melynek opcionális halmazrendszere már nem tartalmazza az X' halmazt, R-szerinti bővítéssel visszabővíthető az X' halmazzal, mivel teljesülnek a 3.2. állítás feltételei a $\mathcal{B}'$ halmazrendszerrel. $\mathcal{B}$ minden ellentmondásos kételemű halmazával elvégezve a szűkítést-bővítést, a kapott új valós döntési mechanizmust - a jelelölések egyszerűsítése végett - jelöljük újra $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B}, C)$-vel. Ez már nem tartalmaz kételemű R-ellentmondásos halmazt, és az elvégzett szűkítések és bővítések a Richter-relációt nem változtatták meg. Jelölje most is $\mathcal{CB}$ a $\mathcal{B}$ opciós halmazrendszer R-ellentmondásos halmazainak részhalmazrendszerét. Ha $\mathcal{CB} = \emptyset$, akkor készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy $X' \in \mathcal{CB}$ legalább három elemű. Vezessük be a

$$S = \{a \in C(X') : Z(a) \supset Z^-(a)\}$$

halmazt.

Ha $S = \emptyset$, azaz teljesül az R-tartó szűkíthetőség 4.2. állításban adott feltétele, akkor az R-tartó szűkítést ezzel a halmazzal elvégezve, a kapott új döntési mechanizmus, melynek opcionális halmazrendszere már nem tartalmazza az X' halmazt, R-szerinti bővítéssel visszabővíthető az X' halmazzal, mivel teljesülnek a 3.2. állítás feltételei a $\mathcal{B}' = \{Y \in \mathcal{B}^- : C(X') \cap C(Y) \neq \emptyset\}$ halmazrendszerrel.

Ha $S \neq \emptyset$, akkor definiáljuk az Ω kételemű halmazaiból a

$$\mathcal{B}_2 = \big\{X' = \{a, b\} \notin \mathcal{B} : a \in S,\ b \in Z(a) \setminus Z^-(a)\big\}$$

halmazrendszert.

$\mathcal{B}_2$ minden elemével végrehajthatunk egy R-szerinti bővítést, mivel teljesülnek a 3.2. állítás feltételei a $\mathcal{B}' = \{Y \in \mathcal{B}^- : C(X') \cap C(Y) \neq \emptyset\} \cup \mathcal{B}_2$ halmazrendszerrel.

Jelölje az így kapott döntési mechanizmust $D^+ = \{\Omega, \mathcal{B}^+, C'\}$. Vezessük be a

$$Z^{\pm}(a) = \bigcup\{Y \in \mathcal{B}^+ \setminus \{X'\} : a \in C(Y)\}$$

halmazt. Mivel

$$\bigcup_{a \in C(X')} Z^{\pm}(a) \supset X',$$

így a döntési mechanizmusunk szűkíthető az X' halmazzal a Richter-reláció változatlanul hagyásával. Másrészt a $Z^{\pm}(a)$, $a \in C(X')$ halmazok előállításában szereplő halmazok együttese teljesíti a 3.2. állításban a $\mathcal{B}'$ halmazrendszertől megkívánt tulajdonságokat, így a döntési mechanizmusunk visszabővíthető R-szerinti bővítéssel.

Az itt leírt szűkítés-bővítést elvégezve minden R-ellentmondásos $\mathcal{B}$-beli halmazra, egy olyan döntési struktúrát kapunk, amely már R-ellentmondásmentes, de ebben a döntési struktúrában az opcionális halmazrendszer számossága megnőtt mindazoknak a kételemű halmazoknak a számával, amelyeket az ellentmondásos halmazok eltávolítása érdekében vittünk be a rendszerbe. Ezek a halmazok viszont ebből a döntési struktúrából el is távolíthatók R-tartó szűkítéssel, mivel teljesülnek a 4.2. állításban adott feltételek. ∎

Azt a folyamatot, amely egy nem R-racionális valódi döntési mechanizmusból R-racionális valódi döntési mechanizmust konstruál, nevezzük a valódi döntési mechanizmus *R-racionalizálás*ának.

A fenti állítás bizonyításából látszik, hogy az R-racionalizálás gyakorlatilag az ellentmondásos halmazok $C(X)$ kiválasztásának a $C_R^{MAX}(X)$-re való cseréjét jelenti.

Hivatkozások

[1] AIZERMAN M., ALESKEROV F., *Theory of choice.* North Holland, 1995

[2] ARROW K. J., Rational choice functions and orderings. *Economica*, **26**(1959), 121-127.

[3] BODÓ B., KOVÁCS M., On the stability of the R-rational choice function, *Annal. Univ. Sci. Budapst, Sect. Comp.* **28**(2008), 79–95.

[4] KOVÁCS M., RÁDONYI Á. AND RÓZSA K., The application of valued choice functions in group-decision, In: *Proc. MS'2000 Int. Conf. of Modelling and Simulation, Las Palmas de Gran Canaria, 2000.*. 933-940, 2000.

[5] MAGYARKÚTI GY., Note on generated choice and axioms of revealed preferences, *Central European Journal of Operation Research*, **8**(2000), 57-62.

[6] PLOTT C., Path independence, rationality and social choice, *Econometrica*, **41** (6)(1973), 1075–1091.

[7] Richter M., Revealed preference theory, *Econometrica*, **34**(1966), 635-545.

[8] Samuelson P., *Foundation of Economic Analysis*, Harvard University Press,1947.

[9] Sen, A.K., Choice functions and revealed preference, *Review of Economic studies* **38**(1971), 307-317.

[10] Suzumura, K., Rational choice and revealed preference, *Review of Economic studies* **43**(1976), 149-158.

(Beérkezett: 2007. október 8.)

BODÓ BEÁTA
TEMETŐ U. 631,
GABČÍKOVO 93005
SLOVAKIA
Email: bodo.beata@freemail.hu

ON THE RATIONALITY AND RATIONALIZABILITY OF THE CHOICE FUNCTION WITH RESPECT TO THE OPTIONAL SET SYSTEM

Beáta Bodó

In this paper we discuss the following problem: how effect for the rationality or rationalizability of the decision structure the extension or reduction of the optional set system. Our main aim is to find such conditions under which the decision structure preserves the revealed preference after the extension or reduction, too. We will show that any contradicted decision structure can be rationalized.