*Alkalmazott Matematikai Lapok* **26** (2009), 255-272.

# OPERÁTORSZELETELÉSI ELJÁRÁSOK ÉS VIZSGÁLATUK

FARAGÓ ISTVÁN

Az operátorszeletelés (angolul "operator splitting") egy olyan széleskörűen elterjedt és sikeresen alkalmazott eljárás, amelynek segítségével a bonyolult szerkezetű feladatokat egyszerűbb feladatok sorozatára vezetjük vissza. Ebben a dolgozatban ismertetjük a legfontosabb operátorszeletelési eljárásokat, kitérve azok algoritmikus realizálásának kérdéseire is. Megvizsgáljuk az eljárás numerikus viselkedését, továbbá a szeletelt feladatok numerikus megoldása esetén az így nyert módszereket. Végezetül kapcsolatot teremtünk ezen kombinált módszerek és számos, az irodalomban ismeretes eljárás között.

## 1. Bevezetés

A matematikai modellalkotás során az összetett, időfüggő fizikai folyamatok folytonos modelljeként gyakran olyan parabolikus típusú parciális differenciálegyenleteket hozunk létre, amelyeknek stacionárius (időtől nem függő) elliptikus része egyszerűbb struktúrájú operátorok összegeként áll elő.

*1.1. Példa.* Tekintsük a $d$ darab szennyezőanyag terjedését leíró légszennyeződési folyamat matematikai modelljét [18]:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}c_i) + \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla c_i) - \sigma_i c_i + g_i(\mathbf{x}, t) + R_i(\mathbf{x}, c_1, \dots, c_d). \tag{1}$$

A fenti képletben $i = 1, 2, \dots d$, és $c_i = c_i(\mathbf{x}, t)$ jelöli az $i$-edik szennyezőanyag koncentrációját. A képlet jobb oldalán szereplő tagok rendre az egyes fizikai részfolyamatokat leíró tagok, nevezetesen, az advekció, a turbulens diffúzió, az ülepedés, a szennyezőanyag kibocsátása és a kémiai reakciók. Feltételezzük, hogy a koncentráció-eloszlás a kezdeti időpontban ($t = 0$) ismert.

A továbbiakban az ilyen típusú feladatokat egységesen, ún. operátoralakban a következő módon adjuk meg:

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} = Aw(t) \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{d} A_i w(t), \quad t \in (0, T) \\ w(0) = w_0, \end{cases} \tag{2}$$

ahol $w$ az ismeretlen függvény, $w_0$ adott elem, $A_i$, $(i = 1, 2, \ldots d)$ adott operátorok. (Megjegyezzük, hogy amennyiben vannak peremfeltételek, akkor azok az operátorok értelmezési tartományában szerepelnek.)

A (2) feladat (az ún. absztrakt Cauchy-feladat) pontos megoldása speciális esetben formálisan közvetlenül is felírható. Amikor $A$ olyan lineáris operátor, amely egy $C_0$-félcsoportot generál, akkor

$$w(t) = \exp(tA)w(0), \tag{3}$$

ahol $\exp(tA)$ az $A$ operátor által generált félcsoport. (Ha az $A$ operátor korlátos, akkor $\exp(tA)$ előállítása az exp függvény sorából közvetlen behelyettesítéssel adódik. A további részleteket lásd [7] könyvben.)

Mivel a fenti megoldás előállítása (ha az egyáltalán lehetséges) többnyire csak formális, ezért a numerikus módszerek alkalmazása többnyire elkerülhetetlen. Ennek lényege, hogy az exponenciális függvényt approximáljuk valamilyen (általában) racionális függvénnyel, azaz

$$\exp(z) \sim r(z). \tag{4}$$

Ekkor a numerikus módszer algoritmusa

$$y^{n+1} = r(\tau A)y^n, \tag{5}$$

ahol $\tau > 0$ a diszkretizációs paraméter, és $y^n$ jelenti az approximációt a $t = n\tau$ időrétegen.

*1.2. Példa.* Legyen

$$r(z) = \frac{1 + (1-\theta)z}{1 - \theta z}$$

az ún. $\theta$-módszer, és $d = 2$. Ekkor:

$$y^{n+1} = r_\theta(\tau(A_1 + A_2))y^n,$$

ahol

$$r_\theta(\tau(A_1 + A_2)) = (\,I - \theta\tau(A_1 + A_2))^{-1}(\,I + (1-\theta)\tau(A_1 + A_2))$$

és $I$ az identitásoperátor.

A fenti megközelítés hiányossága, hogy nem használjuk fel az $A$ operátor speciális szerkezetét, nevezetesen, hogy több, egyszerűbb struktúrájú operátor összege. A továbbiakban célunk olyan eljárás definiálása, amely alkalmas a fenti sajátosság kihasználására.

*Megjegyzés.* Az (5) módszer ténylegesen időbeli diszkretizálást jelent az $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \ldots N; N\tau = T\}$ rácshálón. Így ha parciális differenciálegyenletekre közvetlenül alkalmazzuk, akkor (5) időrétegenként egy-egy elliptikus típusú feladat megoldását jelenti, azaz további numerikus módszer alkalmazása szükséges. Ugyanakkor, ha (5) alkalmazása előtt már térben diszkretizáljuk a feladatunkat (pl. véges differenciák vagy véges elemek módszerével), és $A_h$ jelenti a diszkretizált operátort, akkor az így nyert

$$y^{n+1} = r(\tau A_h) y^n \tag{6}$$

egylépéses iteráció már közvetlenül alkalmas a számítások elvégzésére. Ekkor ugyanis $A_h$ mátrixként reprezentálható, és így (6) időrétegenként lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldását jelenti.

## 2. Operátorszeletelés

Ebben a szakaszban feltételezzük, hogy $A_i : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ egész téren értelmezett lineáris operátorok, ahol $\mathbf{X}$ valamely rögzített Banach-tér, és operátornormán az indukált szuprémum normát értjük. A (2) absztrakt Cauchy-feladat megoldásának azon $w : (0, T) \to \mathbf{X}$ függvényt nevezzük, amely folytonosan differenciálható $(0, T)$-n és kielégíti a (2) feladatot. Így az $\mathbf{X}$ tér megválasztásától függően egyaránt tárgyalható a klasszikus, illetve a gyenge megoldás. (Ha gyenge megoldásról beszélünk, akkor az előforduló deriváltak is általánosított értelemben értendők és ez a tárgyalásmódot bonyolultabbá teheti.) Fontos megjegyeznünk, hogy az időfüggő parciális differenciálegyenletek esetén általában nem teljesül az $A_i$ operátorokra tett feltétlezésünk, mint például (1) feladatban sem. Ilyenkor szokásos módon az $A_i$ operátorok a már térben diszkretizált (továbbá, nemlineáris operátorok esetén a már linearizált) operátorokat jelentik, azaz (2) absztrakt Cauchy-feladat ténylegesen a szemidiszkretizált lineáris feladatot jelenti.

Megjegyezzük, hogy általában homogén peremfeltételeket tételezünk fel. Amennyiben a peremfeltétel inhomogén, akkor a szokásos módon homogenizálhatjuk a feladatot, illetve a szemidiszkrét feladatot ennek figyelembe vételével írhatjuk fel.

Amikor a (4) típusú approximációt alkalmazzuk a (2) feladatra, akkor valójában az $\exp\left(\sum_1^d z_i\right)$ függvényt kell közelítenünk. Ennek egy lehetséges módja a (4) approximáció, amikor is előbb approximáljuk az exponenciális függvényt, és utána helyettesítjük be összegként az operátort. Ezzel természetesen nem tudjuk kihasználni az operátor speciális alakját.

Az operátorszeletelés alapötlete, hogy a (4) approximáció során az $\exp\left(\sum_1^d z_i\right)$ függvényt első lépésben nem racionális, hanem az egyes részoperátorok exponenciálisainak segítségével approximáljuk.

*2.1. Példa.* A legkézenfekvőbb az

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{d} z_i\right) \sim \prod_{i=1}^{d} \exp\left(z_i\right) \tag{7}$$

típusú közelítés.

*2.2. Példa.* Bevezethetjük az

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{d} z_i\right) \sim \prod_{i=1}^{d-1} \exp\left(\frac{z_i}{2}\right) \exp(z_d) \prod_{i=1}^{d-1} \exp\left(\frac{z_{d-i}}{2}\right) \tag{8}$$

típusú közelítést is.

*2.3. Példa.* Vegyük észre, hogy a (7) közelítésben lényeges a sorrend a jobb oldalon. Ezért célszerűnek látszik az

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{d} z_i\right) \sim \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{d} \exp(z_i) + \prod_{i=1}^{d} \exp\left(z_{d+1-i}\right)\right] \tag{9}$$

típusú közelítés is.

Nyilvánvalóan, skalárok esetén (7), (8) és (9) egyenlőséget jelent, de tetszőleges korlátos operátorokra az egyenlőség nem áll fenn. Ugyanakkor, ha az operátorok páronként kommutálnak, akkor ismételten igaz az egyenlőség.

A fenti közelítéseket alkalmazhatjuk a (2) feladat közelítő megoldására a következő módon. Tegyük fel, hogy $A_i$ operátorok szintén generátorok, és vezessük be a következő operátorfüggvényeket:

$$r_{\text{szek}}(A) := \prod_{i=1}^{d} \exp(A_i);$$

$$r_{\text{SM}}(A) := \prod_{i=1}^{d-1} \exp\left(\frac{1}{2}A_i\right) \exp(A_d) \prod_{i=1}^{d-1} \exp\left(\frac{1}{2}A_{d-i}\right)$$

és

$$r_{\text{szim}}(A) := \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{d} \exp(A_i) + \prod_{i=1}^{d} \exp(A_{d+1-i})\right].$$

Ezen operátorok segítségével definiálhatók az új numerikus módszerek, nevezetesen

$$w_{\text{szel}}^N((n+1)\tau) = r_{\text{szel}}(\tau A) w_{\text{szel}}^N(n\tau), \quad n = 0, 1, \dots N, \tag{10}$$

ahol szel $\in \{\text{szek}; SM; \text{szim}\}$ és $w_{\text{szel}}^N(n\tau)$ az adott szeleteléshez tartozó numerikus megoldás az $\omega_\tau$ rácshálón. A fenti operátorszeletelési eljárásokat rendre *szekvenciális, Strang–Marcsuk* és *szimmetrikus szekvenciális szeleteléseknek* nevezzük.

A (10) algoritmus realizálásának lényeges pontja az $\exp(A_i)$ kiszámítása, pontosabban, $\exp(\tau A_i)v$ meghatározása valamely adott $v$ elem esetén. Mivel ez nem más, mint egy $\tau$ hosszúságú intervallumon értelmezett, $v$ kezdeti vektorú, $A_i$ operátorú homogén Cauchy-feladat megoldása, ezért a fenti módszerek algoritmikus relizálása a következő.

1. *Szekvenciális szeletelés [1].* Valamennyi rögzített $n = 1, 2, \dots N$ értékre rendre megoldjuk a következő $d$ darab Cauchy-feladatot:

$$\frac{dw_i^n}{dt}(t) = A_i w_i^n(t), \qquad (n-1)\tau < t \le n\tau,$$
$$w_i^n((n-1)\tau) = w_{i-1}^n(n\tau),$$

ahol $i = 1, 2, \dots d$. A szeletelt megoldás

$$w_{\text{szek}}^N(n\tau) = w_d^n(n\tau)$$

és az algoritmusban $w_0^n(n\tau) = w_{\text{szek}}^N((n-1)\tau)$, továbbá $w_{\text{szek}}^N(0) = w(0)$ a (2) kezdeti feltételből ismert $w_0$ elem. Tehát az algoritmus:

$$\underbrace{A_1 \to A_2 \to \cdots A_d}_{\text{1. lépés}} \Rightarrow \underbrace{A_1 \to A_2 \to \cdots A_d}_{\text{2. lépés}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{A_1 \to A_2 \to \cdots A_d}_{\text{N. lépés}}.$$

2. *Strang–Marcsuk-szeletelés [16], [13]* . A rögzített $n = 1, 2, \dots N$ értékekre rendre megoldjuk a következő, öszességében $2d-1$ darab Cauchy-feladatot.

Először $i = 1, 2, \dots d-1$ értékekre megoldjuk a

$$\frac{dw_i^n}{dt}(t) = A_i w_i^n(t), \qquad (n-1)\tau < t \le (n-0,5)\tau,$$
$$w_i^n((n-1)\tau) = w_{i-1}^n((n-0,5)\tau)$$

feladatokat. Ezután megoldjuk a

$$\frac{dw_d^n}{dt}(t) = A_d w_d^n(t), \qquad (n-1)\tau < t \le n\tau,$$
$$w_d^n((n-1)\tau) = w_{d-1}^n((n-0,5)\tau)$$

feladatot. A rögzített $n$ mellett végezetül $i = d+1, d+2, \dots 2d-1$ értékekre megoldjuk a

$$\frac{dw_i^n}{dt}(t) = A_{2d-i} w_i^n(t), \qquad (n-0.5)\tau < t \le n\tau,$$
$$w_i^n((n-0.5)\tau) = w_{i-1}^n(n\tau)$$

feladatokat.

A szeletelt megoldás
$$w^N_{\mathrm{SM}}(n\tau) = w^n_{2d-1}(n\tau)$$
és az algoritmusban
$$w^n_0((n-0,5)\tau) = w^N_{\mathrm{SM}}((n-1)\tau),$$
továbbá
$$w^N_{\mathrm{SM}}(0) = w(0)$$
a (2) kezdeti feltételből ismert $w_0$ elem. Tehát az algoritmus:

$$\underbrace{\frac{1}{2}A_1 \to \frac{1}{2}A_2 \to \cdots \frac{1}{2}A_{d-1}}_{\text{1a. lépés}} \to \underbrace{A_d}_{\text{1b. lépés}} \to \underbrace{\frac{1}{2}A_{d-1} \to \frac{1}{2}A_{d-2} \to \cdots \frac{1}{2}A_1}_{\text{1c. lépés}} \Rightarrow$$

.........

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}A_1 \to \frac{1}{2}A_2 \to \cdots \frac{1}{2}A_{d-1}}_{\text{Na. lépés}} \to \underbrace{A_d}_{\text{Nb. lépés}} \to \underbrace{\frac{1}{2}A_{d-1} \to \frac{1}{2}A_{d-2} \to \cdots \frac{1}{2}A_1}_{\text{Nc. lépés}}.$$

3. *Szimmetrikus szekvenciális szeletelés [15], [5].* Rögzített $n = 1, 2, \dots N$ értékekre rendre megoldjuk a következő $2d$ darab Cauchy-feladatot:
$$\begin{aligned} &\frac{dv^n_i}{dt}(t) = A_i v^n_i(t), \qquad (n-1)\tau < t \le n\tau, \\ &v^n_i((n-1)\tau) = v^n_{i-1}(n\tau), \end{aligned}$$
és
$$\begin{aligned} &\frac{du^n_i}{dt}(t) = A_{d+1-i} u^n_i(t), \qquad (n-1)\tau < t \le n\tau, \\ &u^n_i((n-1)\tau) = u^n_{i-1}(n\tau), \end{aligned}$$
ahol $i = 1, 2, \dots d$. A szeletelt megoldás
$$w^N_{\mathrm{szim}}(n\tau) = \frac{v^n_d(n\tau) + u^n_d(n\tau)}{2}.$$
A fenti algoritmusban
$$v^n_0(n\tau) = u^n_0(n\tau) = w^N_{\mathrm{szek}}((n-1)\tau),$$
továbbá
$$w^N_{\mathrm{szim}}(0) = w(0)$$
a (2) kezdeti feltételből ismert $w_0$ elem.

Tehát az algoritmus:

$$\left.\begin{array}{r} A_1 \to A_2 \to \cdots A_d \\ A_d \to A_{d-1} \to \cdots A_1 \\ \text{(1. lépés)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} A_1 \to A_2 \to \cdots A_d \\ A_d \to A_{d-1} \to \cdots A_1 \\ \text{(N. lépés)} \end{array}\right\}.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti három szeletelési eljárás mellett még számos egyéb, sikeresen alkalmazott eljárás is létezik. Ugyanakkor dokgozatunkban a továbbiakban mi a felsoroltakat (elsősorban azok elterjedtsége miatt) elemezzük részletesebben.

## 3. A lokális szeletelési hiba

Az operátorszeletelés, mint a numerikus módszerek általában, nem eredményeznek pontos megoldást, azaz tetszőleges operátorok esetén a szeletelt megoldás nem egyezik meg a (2) feladat pontos megoldásával az $\omega_\tau$ rácsháló pontjaiban. Az első időlépés utáni eltérést kiemelten kezelve vezessük be a következő meghatározást.

*3.1. Definíció.* Az $Err_{\text{szel}} = w(\tau) - w_{\text{szel}}^N(\tau)$ kifejezést az adott szeletelési eljárás *lokális szeletelési hibájának* nevezzük.

Természetes elvárás, hogy $\tau$ nullához tartása mellett a lokális szeletelési hiba is nullához tartson. Mivel ezen konvergencia rendje jellemzi a szeletelés minőségét, célszerű bevezetni az alábbi definíciót.

*3.2. Definíció.* Azt mondjuk, hogy az adott szeletelési eljárás $p$-ed rendű, ha $Err_{\text{szel}} = \mathcal{O}\left(\tau^{p+1}\right)$. Egy adott szeletelést konzisztensnek nevezünk, ha rendje $p > 0$.

A továbbiakban korlátos operátorok esetén meghatározzuk az egyes szeletelések rendjét.

*3.1. Példa.* Vizsgáljuk meg a szekvenciális szeletelés rendjét! A (3) összefüggés alapján a pontos megoldás a $t = \tau$ pontban

$$w(\tau) = \exp(\tau A) w(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tau^n A^n w_0 = \left(I + \tau A + \frac{1}{2}\tau^2 A^2\right) w_0 + \mathcal{O}(\tau^3).$$

Figyelembe véve, hogy $A = \sum_{i=1}^{d} A_i$, könnyen láthatón

$$w(\tau) = \left(I + \tau \sum_{i=1}^{d} A_i + \frac{\tau^2}{2} \sum_{i,j=1}^{d} A_i A_j\right) w_0 + \mathcal{O}(\tau^3). \tag{11}$$

A szekvenciálisan szeletelt közelítő megoldás az első lépés után

$$w^N_{\mathrm{szek}}(\tau) = \prod_{i=1}^{d} \exp(\tau A_i) w_0 = \prod_{i=1}^{d} \left( I + \tau A_i + \frac{\tau^2}{2} A_i^2 \right) w_0 + \mathcal{O}(\tau^3).$$

Ezért tehát

$$w^N_{\mathrm{szek}}(\tau) = \left( I + \tau \sum_{i=1}^{d} A_i + \frac{\tau^2}{2} \sum_{i=1}^{d} A_i^2 + \tau^2 \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{d} A_i A_j \right) w_0 + \mathcal{O}(\tau^3). \tag{12}$$

A (11) és (12) képletek alapján a lokális szeletelési hiba tehát

$$\begin{aligned} Err_{szek} &= \frac{\tau^2}{2} \left( \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{d} A_i A_j - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{d} A_i A_j \right) w_0 + \mathcal{O}(\tau^3) = \\ &= \frac{\tau^2}{2} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{d} (A_i A_j - A_j A_i) \, w_0 + \mathcal{O}(\tau^3). \end{aligned} \tag{13}$$

Mivel általános esetben a jobb oldal $\mathcal{O}(\tau^2)$, ezért a szekvenciális szeletelés elsőrendű módszer.

*3.2. Példa.* Vizsgáljuk meg a szimmetrikus szekvenciális szeletelés rendjét! Az előző számítások alapján nyilvánvaló, hogy ebben az esetben

$$\begin{aligned} w^N_{\mathrm{szim}}(\tau) &= \left( I + \tau \sum_{i=1}^{d} A_i + \frac{\tau^2}{2} \sum_{i=1}^{d} A_i^2 + \frac{\tau^2}{2} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{d} (A_i A_j + A_j A_i) \right) w_0 + \\ +\mathcal{O}(\tau^3) &= \left( I + \tau \sum_{i=1}^{d} A_i + \frac{\tau^2}{2} \sum_{i,j=1}^{d} A_i A_j \right) w_0 + \mathcal{O}(\tau^3). \end{aligned} \tag{14}$$

A (11) és (14) képletek alapján a lokális szeletelési hiba tehát

$$Err_{\mathrm{szek}} = \mathcal{O}(\tau^3),$$

azaz a szimmetrikus szekvenciális szeletelés másodrendű.

Megjegyezzük, hasonló módon megmutatható, hogy a Strang–Marcsuk-szeletelés is másodrendű. (Ennek belátását az Olvasóra bízzuk.)

## 4. A lokális szeletelési hiba elemzése

A továbbiakban a szeletelések lokális hibájára vonatkozóan teszünk néhány megjegyzést.

1. Fontos kérdés a lokális szeletelési hiba eltűnésének vizsgálata, azaz megadni azt a feltételt, amely mellett a szeletelt megoldás és a pontos megoldás megegyezik. A lokális szeletelési hiba megjelenésének oka, hogy általában $\exp(A_1 + A_2) \neq \exp(A_1)\exp(A_2)$. Mint ismeretes, az egyenlőség csak akkor érvényes, amikor az operátorok kommutálnak, azaz az $[A_1, A_2] := A_1A_2 - A_2A_1$ kommutátorra $[A_1, A_2] = 0$ érvényes. Ez egyrészt összhangban van a szekvenciális szeletelés lokális hibájára nyert (13) kifejezéssel: a másodrendű hibatag eltűnik, ha mindegyik operátorpár kommutál. Emellett azt is jelenti, hogy nem csak a másodrendű, hanem valamennyi rendű hibatag eltűnik.
2. Az előző észrevétel azt jelenti, hogy páronként kommutáló operátorok esetén a szeletelések pontosak. (Természetesen feltételezve, hogy a szeletelt rész-feladatokat pontosan, azaz numerikus módszer alkalmazása nélkül oldjuk meg.) Felmerül a kérdés: vajon a páronkénti kommutálás szükséges feltétele-e a lokális szeletelési hiba eltűnésének?

A következő egyszerű példa választ ad erre a kérdésre [10].

*4.1. Példa.* Tekintsük a következő $2 \times 2$-es mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bontsuk fel három mátrix összegére, azaz írjuk fel $A_1 + A_2 + A_3$ alakban, ahol

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{4t} & 2e^{3t}(e^t - 1) \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$e^{tA_1} = e^{tA_3} = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{2t}(e^t - 1) \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \text{ és } e^{tA_2} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ebben a példában $A_1$ és $A_2$ nem kommutálnak, mivel

$$[A_1, A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ugyanakkor,

$$e^{\tau A_1} e^{\tau A_2} e^{\tau A_3} = e^{\tau A},$$

ami azt jelenti, hogy a szekvenciális szeletelés pontos. Tehát a szekvenciális szeletelés esetén a páronkénti kommutálás nem szükséges feltétele a lokális szeletelési hiba eltűnésének. Megjegyezzük, hogy $d = 2$ (azaz két operátor) esetén a lokális szeletelési hiba (v.ö. (13) képlettel):

$$Err_{\text{szek}} = \frac{\tau^2}{2}\left(A_1A_2 - A_2A_1\right)w_0 + \mathcal{O}(\tau^3) = \frac{\tau^2}{2}[A_1, A_2]w_0 + \mathcal{O}(\tau^3), \quad (15)$$

amely azt mutatja, hogy két operátor esetén a kommutálás szükséges feltétel is.

Mivel $d = 2$ esetén könnyen láthatóan a Strang–Marcsuk-szeletelés nem más, mint egy három operátoros szekvenciális szeletelés (ahol az operátorok rendre $A_1/2$, $A_2$ és $A_1/2$), az előzőekből következik, hogy a páronkénti kommutálás a Strang–Marcsuk-szeletelés esetén sem szükséges feltétel. (Hasonlóan belátható az állítás a szimmetrikus szekvenciális szeletelésre is.)

3. Egy adott numerikus módszer esetén ismeretes fogalom a konzisztencia. Érdekes kapcsolat áll fenn az operátorszeletelés konzisztenciája (lásd 3.2. Definíció), illetve az operátorszeletelésnek mint numerikus módszernek a konzisztenciája között. A numerikus módszer konzisztenciájához az szükséges, hogy bármilyen időpontban is vesszük a pontos megoldást, onnan egy időlépést téve a numerikus módszerrel, a pontos megoldástól való eltérés (lokális hiba) nullához tarson. Vagyis azt követeljük meg, hogy

$$\sup_t \frac{1}{\tau}\left(r_{\text{szel}}(\tau A)u(t) - \exp(\tau A)u(t)\right) \quad (16)$$

tartson nullához $\tau \to 0$ esetén. Mivel $t = 0$-ban ez éppen a lokális szeletelési hiba nullához tartását jelenti, ezért a szeletelés mint numerikus módszer konzisztenciájából következik a lokális szeletelési hiba nullához tartása, és így a szeletelés 3.2. Definíció szerinti konzisztenciája is. Ugyanakkor ez megfordítva nem feltétlenül érvényes.

4. Fontos kitérnünk a nemkorlátos operátorok konzisztenciájának vizsgálatára, természetesen továbbra is feltéve, hogy ezek az operátorok $C_0$-félcsoportok generátorai. Bár ekkor nem értelmezhető a félcsoport a generátorának hatványsoros előállításával, a Taylor-sor maradéktaggal való megadásával az analízis mégis elvégezhető. Megmutatható, hogy kellően sima kezdeti függvény esetén a korlátos operátorokra kimutatott rend ebben az esetben is érvényben marad. (A szekvenciális szeletelésre a [2], míg a Strang–Marcsuk, illetve a szimmetrikus szekvenciális szeletelésekre a [9] cikkben található a bizonyítás.)

5. A lokális szeletelés hibájában a rend azt fejezi ki, hogy megfelelően kicsiny $\tau$ mellett érvényes csak a becslés. Például $d = 2$ esetén a szekvenciális szeletelés hibájából (lásd (15)) arra következtethetnénk, hogy általában

a kommutátor normája egyértelműen meghatározza a lokális hiba nagyságát, a $\tau$ szeletelési lépésköz megválasztásától függetlenül. A következő példa [8] megmutatja, hogy ez általában nem érvényes.

*4.2. Példa.* Legyenek

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$A = A_1 + A_2$, $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges, nemnulla állandó, $B_1 = pA_1$, $B_2 = \frac{1}{p}A_2$, $B = B_1 + B_2$, $e = (1,1,1,1)$ és $\tau = 1$. Tekintsük a következő problémákat:

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \quad t \in (0,1] \\ u(0) &= e \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

és

$$\left.\begin{aligned} w'(t) &= Bw(t), \quad t \in (0,1] \\ w(0) &= e \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Könnyen látható, hogy

$$\|[A_1, A_2]\|_\infty = \|[B_1, B_2]\|_\infty = \frac{1}{6},$$

azaz a kommutátorok normája megegyezik.

Legyen most $p = 1000$, és alkalmazzuk a szekvenciális szeletelést a (17) és a (18) feladatokra. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a lokális szeletelési hibák

$$\left\|Err^A_{Sp}(\tau = 1)\right\|_\infty = \left\|e^{(A_1+A_2)} - e^{A_2}e^{A_1}\right\|_\infty = 0,125$$

és

$$\left\|Err^B_{Sp}(\tau = 1)\right\|_\infty = \left\|e^{(B_1+B_2)} - e^{B_2}e^{B_1}\right\|_\infty = 20,8334.$$

Látható, hogy a második esetben lényegesen nagyobb (166,67-szoros) hibát kaptunk. Megjegyezzük, hogy $p$ növelésével ez az eltérés tetszőlegesen naggyá tehető. A jelenség oka, hogy a fenti $\tau$ mellett a magasabb rendű tagok szerepe még jelentős. Természetesen $\tau$ megfelelő csökkentésével a kommutátor normája már meghatározza a lokális szeletelési hibát.

6. Felmerülhet a kérdés: ha a (2) homogén egyenlet helyett a

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} = Aw(t) + f(t) \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{d} A_i w(t) + \sum_{i=1}^{d} f_i(t), \quad t \in (0,T) \\ w(0) = w_0, \end{cases}$$

inhomogén feladatot tekintjük, akkor lehetséges-e a rend megtartásával szeletelni a feladatokat? Például a

$$\frac{dw_i^n}{dt}(t) = A_i w_i^n(t) + f_i(t), \qquad (n-1)\tau < t \le n\tau,$$
$$w_i^n((n-1)\tau) = w_{i-1}^n(n\tau),$$

szekvenciális szeletelés (avagy az értelemszerűen átfogalmazott Strang–Marcsuk, illetve szimmetrikus szekvenciális szeletelések) esetén megőrződik-e a homogén feladatra korábban belátott rend? A válasz pozitív, azaz megfelelően sima forrástagok ($f_i(t)$) esetén megmarad a rend. (Lásd [4]. )

7. Mi az eddigiekben a lokális hibát vizsgáltuk. Ugyanakkor a gyakorlat szempontjából a globális hiba fontos, vagyis az, hogy egy rögzített $t \in (0,T)$ pontban a $w_{\text{szel}}^N(n\tau)$ szeletelt megoldás (ahol $n\tau = t$, azaz $\tau \to 0$ miatt $n \to \infty$) tart-e, és ha igen, milyen rendben a $w(t)$ pontos megoldáshoz? A válasz megadása előtt az operátorszeletelésre mint numerikus eljárásra megfogalmazzuk a jól ismert stabilitásfogalmat.

*4.1. Definíció.* Egy operátorszeletelést stabilnak nevezünk, ha a (10) iterációban szereplő $r_{\text{szel}}(\tau A)$ operátorra az

$$\{\|r_{\text{szel}}^n(\tau A)\|, \quad n\tau \le t, \quad \tau > 0\}$$

operátorsereg egyenletesen korlátos.

A Lax-féle ekvivalenciatétel (pld. [12]) korrekt kitűzésű absztrakt Cauchy-feladatok esetén egy numerikus módszer esetén kapcsolatot teremt a konzisztencia, a stabilitás és a konvergencia között. Nevezetesen, konzisztencia esetén a stabilitás és a konvergencia ekvivalens egymással. Következésképpen, ha az operátorszeletelés stabil, akkor a globális hiba nullához tart. Emellett a konvergencia rendje általában $p$, azaz megegyezik a módszer rendjével. A gyakorlatban a stabilitás belátása nem könnyű, de kontraktív esetben, azaz amikor

$$\|r_{\text{szel}}(\tau A)\| \le 1,$$

a stabilitás nyilvánvalóan igaz. Így tehát ha az $A_i$ operátorok kontrakciós félcsoportok generátorai, akkor a szeletelés mint numerikus módszer konvergens.

## 5. Numerikus módszerek alkalmazása a szeletelt feladatokra

Az eddigiekben azzal a feltételezéssel éltünk, hogy a szeleteléssel nyert egyes részfeladatokat pontosan oldjuk meg. Ugyanakkor ez általában nem lehetséges: bár feltételezéseink szerint az egyes $A_i$ részoperátorok egyszerűbb struktúrájúak, a valós feladatokra nem reális feltételezni, hogy a szeletelt problémák pontosan megoldhatók. (Az egyszerűbb struktúra „csak" azt eredményezi, hogy a szeletelt feladatokra többnyire az irodalomból ismert, megbízható és hatékony numerikus eljárást tudunk alkalmazni.) Jelölje a továbbiakban $\Delta t$ a szeletelt feladatra alkalmazott numerikus diszkretizáció lépésközét. (Nyilvánvalóan $\Delta t \leq \tau$.) Ez meghatároz egy $\omega_{\Delta t} = \{t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots N; N\Delta t = T\}$ rácshálót. Természetes elvárás, hogy $\omega_{\Delta t}$ a szeletelésre használt rácsháló finomítása legyen, azaz teljesüljön a $\omega_{\Delta t} \supset \omega_\tau$ tartalmazás. Ezért célszerű a $\Delta t = \tau/K$ megválasztást alkalmazni, ahol $K$ adott természetes szám. ($K = 1$ esetén a szeletelési lépésköz és a numerikus lépésköz megegyezik, tehát mindegyik részfeladat numerikus megoldása során egyetlen lépést hajtunk végre.)

Az egyes szeletelt részfeladatokra valamely numerikus módszert alkalmazva a teljes feladatra egy globális diszkretizációt nyerünk az $\omega_{\Delta t}$ rácshálón. (Fontos kiemelni, hogy a választott numerikus módszerek eltérőek is lehetnek, hiszen gyakran éppen ez a szeletelés alkalmazásának célja.) Ezért a teljes diszkretizációs operátor függ a választott szeleteléstől, a szeletelési lépésköztől, az alkalmazott numerikus módszertől és ennek lépésközétől. Legyen például $d = 2$, és alkalmazzuk a $\tau$ lépésközű szekvenciális szeletelést. Válasszuk az első szeletelt feladatra az NM1 numerikus módszert a $\Delta t_1 = \tau/K_1$ lépésközzel, a második feladatra az NM2 numerikus módszert a $\Delta t_2 = \tau/K_2$ lépésközzel. Ekkor a teljes diszkretizációs operátor felírható $C_{\rm tot} = C_{\rm tot}(\tau, NM1, K_1, NM2, K_2)$ alakban. (Amikor $NM1, K_1, NM2$ és $K_2$ rögzítettek, akkor az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a $C(\tau)$ jelölést alkalmazzuk.)

*5.1. Példa.* Legyen $d = 2$ a (2) feladatban, és alkalmazzuk a szekvenciális szeletelést. Válasszuk az explicit Euler (EE) módszert mindkét szeletelt feladatra $\Delta t = \tau$ megválasztással. (Azaz, $C_{\rm tot} = C_{\rm tot}(\tau, EE, 1, EE, 1)$). Ha $y_1^n$ és $y_2^n$ jelöli az $w_1^n(n\tau)$ és $w_2^n(n\tau)$ szeletelt pontos megoldások közelítéseit, akkor a numerikus séma a következő:

$$\frac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\tau} = A_1 y_1^n, \qquad \frac{y_2^{n+1} - y_2^n}{\tau} = A_2 y_2^n$$

és $y_2^n = y_1^{n+1}$. Ezért

$$y_2^{n+1} = (I + \tau A_2)(I + \tau A_1) y_1^n, \tag{19}$$

azaz a teljes diszkretizáló operátor

$$C(\tau) = (I + \tau A_2)(I + \tau A_1).$$

Korlátos operátorokra, korlátos időintervallumon könnyen megmutatható a fenti módszer konvergenciája.

5.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy a* $[0,T]$ *intervallumon értelmezett (2) feladatban* ($d=2$) *az* $A_1$ *és* $A_2$ *korlátos operátorok. Ekkor a (19) módszer konvergens.*

*Bizonyítás.* Először a konzisztenciát látjuk be, azaz megmutatjuk, hogy $r_{\mathrm{szel}}(\tau A) = C(\tau)$ megválasztással (16) érvényes. Mivel

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\tau}\left(C(\tau)u(t) - \exp(\tau A)u(t)\right)\right\| &\leq \frac{1}{\tau}\left\|(C(\tau) - \exp(\tau A))\right\|\|u(t)\| = \\ &= \left[\frac{\tau}{2}\|(A_1 - A_2)^2\| + \mathcal{O}(\tau^2)\right]\ \|\exp(tA)w_0\| \leq \\ &\leq \left[\frac{\tau}{2}\|(A_1 - A_2)^2\| + \mathcal{O}(\tau^2)\right]\ \exp(T\|A\|)\|w_0\| = const\cdot\tau + \mathcal{O}(\tau^2),\end{aligned}$$

és az utolsó tag $t$-től függetlenül tart nullához $\tau \to 0$ esetén.

A stabilitás a

$$\begin{aligned}\|C(\tau)^n\| = \|\left((I+\tau A_2)(I+\tau A_1)\right)^n\| &\leq (1+\tau\|A_2\|)^n\,(1+\tau\|A_1\|)^n \leq \\ &\leq \exp(T\|A_2\|)\exp(T\|A_1\|) = const\end{aligned}$$

relációból nyilvánvalóan következik. □

Megjegyezzük, hogy ha $A_i$ nem korlátos (és az időintervallum sem az), de kontrakciós félcsoportot generál, akkor is érvényes marad az állítás. (A bizonyítás önállóan elvégezhető.)

## 6. Néhány ismert eljárás mint kombinált módszer

Az 5. szakaszban definiáltuk a szeleteléssel és a numerikus módszer megválasztásával nyerhető teljes diszkretizációt.

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a szeletelés a szeletelt feladatok numerikus megoldási módszerének alkalmas megválasztásával több, az irodalomból jól ismert módszer nyerhető.

### 6.1. A Crank–Nicolson-módszer

Tekintsük a

$$\begin{aligned}&\frac{dw}{dt} = Aw(t), \quad 0 < t \leq T\\ &w(0) = w_0\end{aligned} \tag{20}$$

Cauchy-feladatot és alkalmazzuk a triviális $A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A$ szeletelést! Ekkor az (20) feladatot a szekvenciális szeleteléssel diszkretizálva a következő szeletelt feladatokat kapjuk:

$$\begin{aligned} &\frac{dw_1^1(t)}{dt} = \frac{1}{2}Aw_1^1(t), \quad 0 < t \leq \tau, \\ &w_1^1(0) = w_0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dw_2^1(t)}{dt} = \frac{1}{2}Aw_2^1(t), \quad 0 < t \leq \tau, \\ &w_2^1(0) = w_1^1(\tau). \end{aligned} \tag{22}$$

(Az egyszerűség kedvéért csak az első lépést írtuk le.) Ha az explicit Euler-módszert alkalmazzuk az első (21) feladatra és az implicit Euler-módszert a második (22) feladatra a $\triangle t = \tau$ megválasztással, akkor a következő teljes diszkretizációt nyerjük:

$$\begin{aligned} \frac{y_1^1 - y_1^0}{\tau} &= \frac{1}{2}Ay_1^0; \quad y_1^0 = w_0, \\ \frac{y_2^1 - y_2^0}{\tau} &= \frac{1}{2}Ay_2^1; \quad y_2^0 = y_1^1. \end{aligned}$$

Így a teljes diszkretizációs operátor $C_{\text{tot}} = C_{\text{tot}}(\tau, EE, 1, IE, 1)$ alakja

$$C(\tau) = (I - \frac{\tau}{2}A)^{-1}(I + \frac{\tau}{2}A),$$

amely a jól ismert Crank–Nicolson-módszer.

*Megjegyzés.* Ez a példa is jól tükrözi, hogy a teljes diszkretizáció rendjének meghatározása bonyolult feladat. Intuitív módon azt gondolnánk, hogy a „leggyengébb láncszem" elve alapján a szeletelés, illetve az alkalmazott numerikus eljárások rendszámának kisebbike hatarozza meg a teljes diszkretizáció rendjét, azaz, ha $rend_{\text{szel}}$ a szeletelés rendje és $rend_{\text{numi}}$ az $i$-edik szeletelt feladat megoldására alkalmazott numerikus módszer rendje, akkor a teljes diszkretizáció rendje

$$rend_{\text{tot}} = \min\{rend_{\text{szel}}, rend_{\text{num1}}, \dots rend_{\text{numd}}\}. \tag{23}$$

Ebben az esetben $rend_{\text{szel}} = 0$, mivel a szeletelt operátorok kommutálnak. Továbbá $rend_{\text{num1}} = rend_{\text{num2}} = 1$. Így (23) esetén a teljes rend egy lenne. Ugyanakkor, mint az jól ismert, a Crank–Nicolson-módszer másodrendű.

### 6.2. Másodrendű Yanenko-módszer

Tekintsük az eredeti (2) Cauchy-feladatot $d = 2$ esetén. A szekvenciális szeletelés és a középponti módszer (trapézszabály) szerinti numerikus integrálással, valamint a $\tau = \Delta t$ megválasztással ekkor a

$$\begin{aligned} \frac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\tau} &= A_1(\frac{y_1^{n+1} + y_1^n}{2}) \\ y_1^n &= y_2^{n-1} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_2^{n+1} - y_2^n}{\tau} &= A_2(\frac{y_2^{n+1} + y_2^n}{2}) \\ y_2^n &= y_1^{n+1}, \end{aligned} \tag{25}$$

feladatokat nyerjük, ahol $y_2^{-1} = w_0$ és $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Ez az eljárás a másodrendű Yanenko-módszerként ismeretes [19]. Gyakran az $A_i$ operátorok az irányok szerinti felbontásból adódnak. Például amikor $A$ a $d$-dimenziós Laplace-operátor, akkor $A_i$ az $x_i$ változó szerinti második derivált. Ekkor a fenti algoritmus realizálása egyszerű, mivel lépésenként tridiagonális mátrixú lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldását igényli csak. Ezért az irányok szerinti szeletelés elnevezés is használatos.

### 6.3. Szekvenciális, alternáló Marcsuk-módszer

Jelölje az (24)–(25) Yanenko-módszert $y^{n+1} = \Phi_{A_1A_2}(y^n)$. A szimmetria megőrzése céljából lépésenként cseréljük meg az $A_1$ és $A_2$ operátorok sorrendjét! Ez a

$$y^{n+1} = \Phi_{A_1A_2}(y^n);\; y^{n+2} = \Phi_{A_2A_1}(y^{n+1}),\; n = 0, 2, 4\ldots$$

módszerhez vezet, amelyet az irodalomban szekvenciális, alternáló Marcsuk-módszernek neveznek [14]. Ez tehát megfelel a Strang–Marcsuk-szeletelesű, trapézszabályú numerikus módszert alkalmazó, $\tau = \Delta t$ megválasztású teljes diszkretizáló numerikus módszernek.

### 6.4. Párhuzamos alternáló módszer

Tekintsük az

$$y^{n+1} = \frac{1}{2}\Phi_{A_1A_2}(y^n) + \frac{1}{2}\Phi_{A_2A_1}(y^n)$$

numerikus módszert, amely az irodalomban Swayne-módszerként ismeretes [17]. Könnyen láthatóan ez a módszer megfelel a szimmetrikusan súlyozott szekvenciális szeletelésnek, a középponti numerikus integrálást és $\tau = \Delta t$ lépésközöket választva.

### 6.5. Lokális egydimenziós sémák

Tekintsük a háromdimenziós hővezetési egyenletet. Ekkor a Yanenko-módszer a következő alakot ölti:

$$\frac{y_1^{n+1} - y^n}{\tau} = \Lambda_{xx} y_1^{n+1}, \qquad \frac{y_2^{n+1} - y_1^{n+1}}{\tau} = \Lambda_{yy} y_2^{n+1},$$
$$\frac{y_3^{n+1} - y_2^{n+1}}{\tau} = \Lambda_{zz} y_3^{n+1}, \quad y^{n+1} = y_3^{n+1},$$

ahol $n = 0, 1 \ldots, y^0 = w_0$. Ebben a sémában $\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}$ és $\Lambda_{zz}$ az egydimenziós Laplace-operátor szokásos diszkretizációját jelöli. Ez a módszer megfelel a szekvenciális szeletelésnek, implicit Euler-módszerrel és $\tau = \Delta t$ megválasztással.

## 7. Összefoglalás

A dolgozatban bevezettük az operátorszeletés fogalmát és definiáltuk a leggyakrabban alkalmazott módszereket. Elemeztük a külöböző tipusú szeleteléseket, mint időbeli diszkretizációs eljárásokat, kitérve azok pontosságára a lokális szeletelési hiba értelmében. Megnéztük, hogy az egyes szeletelt problémákra alkalmazott numerikus eljárások hogyan hatnak ki a teljes diszkretizációra.

A dolgozat terjedelmi okokból nem tér ki a módszer hatékonyságának, illetve a számítógépes realizálásának kérdésére. Itt csak utalunk a légszennyeződési feladatra vonatkozó [3], [6] és [11] dolgozatokra.

## Hivatkozások

[1] K. A. Bagrinovskiĭ, S. K. Godunov: *Difference schemes for multidimensional problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **115**, 431–433 (1957).

[2] M. Bjørhus: *Operator splitting for abstract Cauchy problems*, IMA Journal of Numerical Analysis **18**, 419–443 (1998).

[3] M. Botchev, I. Faragó, Á. Havasi: *Testing weighted splitting schemes on a one-column transport-chemistry model*, Int. J. Environmental Pollution, **22**, 3–16 (2004).

[4] M. Botchev, I. Faragó, R. Horváth: *Application of the operator splitting to the Maxwell equations with the source term*, Appl. Num. Math. (közlésre elfogadva)

[5] P. Csomós, I. Faragó, Á. Havasi: *Weighted sequential splittings and their analysis*, Comp. Math. Appl. **50**, 1017–1031 (2005).

[6] P. Csomós, I. Dimov, I. Faragó, Á. Havasi, Tz. Ostromsky: *Computational complexity of weighted splitting scheme on parallel computers*, International Journal of Parallel, Emergent and istributed Systems, **22**, 137–147 (2007).

[7] K.-J. Engel, R. Nagel: *One-parameter semigroups for linear evolution equations, Graduate Texts in Mathematics*, **194**, Springer, New York (2000).

[8] I. Faragó, Á. Havasi: *The mathemathical background of operator splitting and the effect of non-commutativity*, Lect. Notes Comp. Sci., 2179, Springer Verlag, 264–271 (2002).

[9] I. Faragó, Á. Havasi: *Consistency analysis of operator splitting methods for $C_0$-semigroups*, Semigroup Forum, **74**, 125–139, (2007).

[10] I. Faragó, Á. Havasi: *Relationship between vanishing splitting errors and pairwise commutativity*, Applied Math. Letters, **21** (2008), 10–14.

[11] I. Faragó, K. Georgiev, Z. Zlatevev: *Parallelization of advection-diffusion-chemistry modules*, Lect. Notes Comp. Sci., 4818, Springer Verlag, Berlin (2007) 28–39.

[12] P. Lax: *Functional Analysis*, Wiley Interscience, (2002).

[13] G. I. Marchuk: *Some application of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems*. Applik.Mat., **13**, 103–132 (1968).

[14] G. I. Marchuk: *Splitting and alternating direction methods*, North Holland, Amsterdam, (1990).

[15] G. Strang: *Accurate partial difference methods I: Linear Cauchy problems*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **12**, 392–402 (1963).

[16] G. Strang: *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal. **5**, 506–517 (1968).

[17] D. A. Swayne: *Time dependent boundary and interior forcing in locally one-dimensional schemes*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing **8**, 755–767 (1987).

[18] J. G. Verwer, W. Hundsdorfer: *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*, Springer (2003).

[19] N. N. Yanenko: *The method of fractional steps*, Springer, Berlin, (1971).

FARAGÓ ISTVÁN
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/c
faragois@cs.elte.hu

## OPERATOR SPLITTINGS AND THEIR ANALYSIS

István Faragó

Operator splitting is a widely used and successfully applied process, by which a problem of complicated structure can be substituted with a sequence of simpler problems. In this study we present the most important operator splitting methods and touch upon the issues of their computer realisation. We study the numerical behaviour of the procedure and the methods obtained when the split sub-problems are solved numerically. Finally, we set up connections between these combined methods and several other ones known from the literature.