Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 9-15.

EGY KIS KLASSZIKUS DIFFERENCIÁLGEOMETRIA, A GAUSS–BONNET-TÉTEL BIZONYÍTÁSA

SZEMLÉLETES BIZONYÍTÁST ADUNK A FELÜLETELMÉLET FONTOS TÉTELÉRE

FARKAS MIKLÓS

1. Bevezetés

1956 nyarán a Bolyai János Matematikai Társulat kollokviumot tartott Balatonvilágoson. Ezen adtam elő akkor talált új bizonyításomat a *Gauss–Bonnet-tételre*. Sokáig nem publikáltam, majd három éves nigériai vendégtanárságom idején kérésre leközöltem a Nigerian Journal of Science-ben [1]. A folyóirat ma már nem nagyon érhető el, de úgy gondolom, hogy kár lenne a bizonyítást veszni hagyni, annyira szépek és szemléletesek a benne felhasznált klasszikus felületelméleti eszközök. Az a gyanúm, hogy a modern differenciálgeometria mai kiváló művelői körében ezek egy része talán feledésbe is merült.

A több mint 150 éves *Gauss–Bonnet-tétel* (Bonnet, 1848) a felületdarab teljes görbülete és a felületdarabot határoló felületi görbe geodetikus görbülete között állapít meg összefüggést. Általános érvényű tétel, amely n-dimeziós Riemann-tér felületeire is kimondható, mi azonban itt az egyszerű, szemléletes esetre korlátozódunk, felületre a háromdimenziós euklideszi térben. A tételnek számos egyszerű következménye és speciális esete van a sík- és a szférikus geometriában.

Ismertnek tételezzük fel egy korszerű Differenciálgeometria kurzus anyagát, de a következő pontban ismertetjük azokat a szükséges fogalmakat és tételeket, amelyek feltehetőleg már kiestek a mai kurrikulumokból. A 3. pontban mondjuk ki a tételt és végezzük el a bizonyítást.

2. Előzmények

Először is a *Levi-Civita-féle párhuzamos eltolás* fogalmára és tulajdonságaira lesz szükségünk (lásd pl. [2,3]). A fogalmat a 20. század elején vezette be Tullio Levi-Civita azzal a céllal, hogy analízist művelhessünk felületi vektormezőkön. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha egy felületi vektort a beágyazó euklideszi térben, a közönséges értelemben párhuzamosan eltolunk a görbült felület egy másik pontjába, az ott már általában nem lesz felületi vektor.

Legyen F egyszerű, sima felületdarab, g sima felületi görbe, P és Q e görbe két pontja és v felületi vektor a P pontban. Tekintsük a felületnek a g görbe pontjaihoz tartozó érintősíkjait. E síksereg burkolófelülete síkba fejthető vonalfelület [4]. Fejtsük ezt a vonalfelületet síkba, a P-nek megfelelő pontbeli v síkvektort toljuk el párhuzamosan a sík Q-nak megfelő pontjába, majd „fejtsük vissza" a burkolófelületet a g görbére. Ily módon a Q pontban kapunk egy felületi vektort. Azt mondjuk, hogy ez a vektor a P ponbeli v vektorból a g görbe mentén történt Levi-Civita-féle párhuzamos eltolással keletkezett.

Az előbbi geometriai konstrukcióval ekvivalens a következő meghatározás. Legyen $D \subset R^2$ egyszeresen összefüggő, korlátos, mérhető síktartomány, $r : D \longrightarrow R^3$ diffeomorfizmus (C^3 osztálybeli), amely D-t az F felületbe képezi le: $(u^1, u^2) \in D \longrightarrow r\ (u^1, u^2) \in F \subset R^3$, legyen továbbá $m(u^1, u^2)$ a felület egység normálvektora és $g : (u^1(t), u^2(t))$ sima felületi görbe, $t \in [a, b]$.

2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a g görbe pontjaiban értelmezett $v(u^1(t), u^2(t))$ felületi vektormező a *g görbe mentén Levi-Civita-féle értelemben párhuzamos*, ha kielégíti a következő egyenletrendszert:

$$m \times \frac{dv}{dt} = 0, \qquad mv = 0, \tag{1}$$

ahol az első egyenletben vektoriális, a másodikban skalár szorzat szerepel.

(1) első egyenlete azt fejezi ki, hogy ha a vektor a görbe mentén Levi-Civita-értelemben párhuzamos, akkor két „közeli" („szomszédos") pontbeli értékének különbsége első rendben merőleges a felület érintősíkjára, differenciálja párhuzamos a felületi normálissal. A második egyenlet biztosítja, hogy a vektormező értéke minden pontban felületi vektor. Ha az $(u^1(a), u^2(a))$ pontban megadjuk a v_0 felületi vektort, akkor, amint ez könnyen belátható, az (1) rendszer egyértelműen meghatározza azt a $v(t)$ felületi vektormezőt, amely kielégíti a $v(a) = v_0$ kezdeti feltételt. Azt mondjuk ekkor, hogy $v(t)$ a v_0 vektorból a *g görbe mentén történő Levi-Civita értelemben vett párhuzamos eltolással keletkezett.*

Könnyen belátható, hogy a Levi-Civita párhuzamos eltolás rendelkezik a következő tulajdonságokkal. Két ugyanazon görbe mentén eltolt felületi vektor skaláris szorzata állandó. Ebből következik, hogy párhuzamosan eltolt felületi vektor hossza állandó, továbbá két ugyanazon görbe mentén párhuzamosan eltolt felületi vektor által bezárt szög is állandó. Ha az $(u^1(a), u^2(a))$ pontbeli v_0 vektort egy *másik* görbe mentén toljuk el párhuzamosan az $(u^1(b), u^2(b))$ pontba, akkor általában más vektort kapunk: a párhuzamos eltolás függ az úttól. Másképpen kifejezve ugyanezt, ha a g görbe zárt, vagyis $(u^1(a), u^2(a)) = (u^1(b), u^2(b))$ és a v_0 vektort párhuzamosan „körbetoljuk" a görbe mentén, rendszerint nem kapjuk vissza a kiindulási pontban az eredeti vektort. Azokat a felületeket, amelyeken a párhuzamos eltolás független az úttól, *abszolút párhuzamossággal rendelkező felületeknek* nevezzük. Egy felület akkor és csak akkor rendelkezik abszolút párhuzamossággal, ha Gauss-féle szorzatgörbülete zérus.

Legyen most a felületi görbe ívhossz paraméterezéssel adott: $r(s)$, ahol s az ívhossz (valamely pontjából mérve). Jelöljük $\kappa(s)$-sel a görbe görbületét és $n(s)$-sel főnormális egységvektorát. Az első *Frenet-formula* szerint $\frac{d^2r}{ds^2} = \kappa n$. Az utóbbi vektort bontsuk fel egy érintő síkbeli és egy felületi normális irányú komponensre:

$$\kappa n = \gamma m \times \frac{dr}{ds} + \eta m, \tag{2}$$

ahol vektoriális szorzat áll. Az ily módon definiált $\gamma(s)$ mennyiséget a görbe *geodetikus görbületének* nevezzük. A geodetikus görbület azt adja meg, „mennyire görbül a görbe az érintősíkban". Azokat a felületi görbéket, amelyeknek geodetikus görbülete azonosan zérus, *geodetikus vonalaknak* nevezzük. Ezek egyben a két felületi pontot összekötő görbék közül az ívhosszra nézve a stacionáriusak: elegendően rövid szakaszaik a két végpontjukat összekötő felületi görbék közül a legrövidebbek.

2.1. TÉTEL. *Legyen a $v(s)$ felületi vektor párhuzamosan eltolt az ívhossz paraméterezésben adott$r(s)$ egyenletű felületi görbe mentén, jelöljük $\gamma(s)$-sel a görbe geodetikus görbületét és $\theta(s)$-sel a $v(s)$ és a görbe $\frac{dr(s)}{ds}$ egység érintővektora közötti irányított szöget, ekkor érvényes a következő:*

$$\frac{d\theta}{ds} = -\gamma(s). \tag{3}$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $|v(s)| = 1$. Differenciáljuk a $v\frac{dr}{ds} = \cos\theta$ egyenletet:

$$\frac{dv}{ds} \cdot \frac{dr}{ds} + v\frac{d^2r}{ds^2} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Az első tag a bal oldalon zérus, mivel $\frac{dv}{ds}$ (1) szerint párhuzamos a felület normálvektorával. Frenet első formulája szerint $v \cdot \kappa n = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$. Behelyettesítve (2)-ből

$$\gamma v \cdot m \times \frac{dr}{ds} + \eta v \cdot m = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

(1) szerint a második tag a bal oldalon zérus, vagyis

$$\gamma\cos(\pi/2 - \theta) = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds},$$

tehát

$$\gamma\sin\theta = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Innen az állítás következik. (Ha diszkrét pontokban $\sin\theta$ zérus, akkor a folytonosságból, ha egy egész szakaszon zérus, akkor ez a szakasz geodetikus és a szög deriváltja is zérus). □

A (3) formula mutatja, hogy a geodetikus görbület a görbe érintővektora iránya megváltozásának sebessége az ívhosszra vonatkoztatva egy párhuzamosan eltolt vektor irányához (vagyis az „állandónak tekinthető” irányhoz) képest. Ebből az is következik, hogy geodetikus vonal érintővektora a geodetikus vonal mentén párhuzamosan eltolt vektor. (Megjegyezzük, hogy Euklidesz még „definiálta” az egyenest, mint olyan görbét, mely „mindenütt ugyanabba az irányba” halad. A geodetikus vonal ebben az értelemben is az egyenesnek felel meg görbült felületen).

Legyen most g szakaszonként sima, egyszerű, zárt görbe véges sok töréspont-tal: $(u^1(a), u^2(a)) = (u^1(b), u^2(b))$. A töréspontokban az érintővektor törésszögét jelöljük α_i -vel, $(i = 1, 2, \dots, n)$. Osszuk fel a görbét kis részekre úgy, hogy a töréspontok is osztópontok legyenek, és kössük össze az osztópontokat geodetikus ívekkel. Ily módon egy a g görbébe írt zárt g_p „geodetikus poligont” kapunk. Jelöljük g_p töréspontjaiban érintővektorának törésszögeit ψ_k−val, $(k = 1, 2, \dots, N)$. Legyen P a g görbe egy töréspontja és v_0 egy felületi vektor P-ben. Toljuk el v_0-at párhuzamosan g, ill. g_p mentén körbe, míg visszajutunk P-be. Az ilyen módon P-ben kapott vektorokat jelöljük v_g-vel, ill. v_{g_p}-vel. Legyen v_g és v_0, illetve v_{g_p} és v_0 szöge $\Delta\psi_g$, ill. $\Delta\psi_{g_p}$. A (3) formulából azonnal következik, hogy

$$\Delta\psi_g = \int_g \gamma(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \tag{4}$$

$$\Delta\psi_{g_p} = \sum_{k=1}^{N} \psi_k, \tag{5}$$

mivel g_p geodetikus görbülete zérus. Finomítsuk a g görbe felosztását minden határon túl. Ekkor $g_p \longrightarrow g, \quad v_{g_p} \longrightarrow v_g, \quad \Delta\psi_{g_p} \longrightarrow \Delta\psi_g$, ahonnan

$$\lim \sum_{k=1}^{N} \psi_k = \int_g \gamma(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tag{6}$$

következik.

Azok számára, akik differenciálgeometria Ricci-kalkuluson alapuló tárgyalásához szoktak, megjegyezzük, hogy a párhuzamos eltolásra adott definíciónkból levezethető az $(u^1(t), u^2(t))$ görbe mentén párhuzamosan eltolt $v(t)$ vektor differenciálegyenlete:

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}(u^1(t), u^2(t))\frac{du^j(t)}{dt}v^k = 0,$$

ahol Γ a Christoffel-szimbólum, v^i a v vektor kontravariáns koordinátája, és az Einstein-konvenciót használtuk (vagyis összegzés fent és lent lévő egyforma indexekre 1-től 2-ig).

Áttérünk a felület gömbi leképezésének néhány tulajdonságára. Az F felületet párhuzamos normálisok módszerével leképezzük az S egységgömb felületre. Ezen azt értjük, hogy a $P \in F$ pontnak, amelyben a felületi egység normálvektor m, megfeleltetjük a gömbfelület m helyvektorú $\widetilde{P}$ pontját. A leképezésnél, nyilván, egymásnak megfelelő pontokban a felület, illetve a gömb érintősíkja párhuzamos.

Az $r(u^1(t), u^2(t))$ egyenletű g felületi görbe képe a gömbfelületen a $m(u^1(t), u^2(t))$ egyenletű $\widetilde{g}$ gömbfelületi görbe. Toljuk el az $(u^1(a), u^2(a))$ pontbeli v_0 felületi vektort Levi-Civita értelemben párhuzamosan a g görbe mentén. Az érintősíkok párhuzamossága miatt az így kapott $v(t)$ vektormező megegyezik a v_0 vektornak a $\widetilde{g}$ gömbfelületi görbe mentén történt párhuzamos eltolása útján nyert $\widetilde{v}(t)$ vektormezővel: $v(t) = \widetilde{v}(t),\ t \in [a, b]$.

Jelöljük g_{ik}-val az F felület metrikus tenzorának koordinátáit $(i = 1, 2,\ k = 1, 2)$, és legyen $g = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{1/2}$. Ekkor F felszíne:

$$mesF = \iint_D g(u^1, u^2)du^1du^2.$$

Jelöljük F Gauss-féle szorzatgörbületét $K(u^1, u^2)$-vel és F gömbi képének felszínét Σ-val. Ismeretes, hogy ha F a gömbfelületbe egy-egyértelműen képződik le és K előjele állandó, akkor K felszín szerinti integrálja egyenlő a gömbi kép előjeles felszínével:

$$\iint_D K(u^1, u^2)g(u^1, u^2)du^1du^2 = \pm\Sigma, \tag{7}$$

ahol a jobb oldalon a pozitív, ill. a negatív előjelet kell figyelembe venni aszerint, amint $K >$, ill. < 0. A formula az általános esetben is érvényes, ha F-et felbontjuk olyan részekre, amelyek egy-egyértelműen képződnek le, illetve amelyeken a szorzatgörbület előjele állandó. A formula szemléletes jelentése az, hogy minél nagyobb a felület görbülete, annál kisebb a felszíne a gömbi kép felszínéhez viszonyítva.

3. A Gauss–Bonnet-tétel

3.1. Tétel. *Legyen $D \in R^2$ egyszeresen összefüggő, mérhető, korlátos síktartomány, $r : D \longmapsto R^3$ háromszor folytonosan differenciálható diffeomorfizmus, $F := \{r(u^1, u^2) \in R^3 : (u^1, u^2) \in D\}$ egyszeresen összefüggő, sima felületdarab, amelyet az egyszerű, szakaszonként sima, zárt g görbe határol, és használjuk az előző pontban bevezetett jelöléseket, ekkor érvényes a következő:*

$$\iint_D K(u^1, u^2)g(u^1, u^2)du^1du^2 = 2\pi - \int_g \gamma(s)ds - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \tag{8}$$

ahol $\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$az érintővektor (előjeles) törésszögei a görbe töréspontjaiban.

Ez a tétel tehát azt mondja ki, hogy a felületdarabot határoló zárt görbe geodetikus görbülete meghatározza a felületdarab teljes görbületét (a Gauss-féle szorzatgörbület felszín szerinti integrálját).

Alkalmazzuk a tételt az R sugarú gömb egy geodetikus (főkörívek által határolt) H háromszögére. Ekkor $K(u^1, u^2) = 1/R^2$, $\gamma = 0$ és ha a gömbi háromszög belső szögeit λ, μ, ν-vel jelöljük,

$$\frac{1}{R^2} mesH = 2\pi - (\pi - \lambda) - (\pi - \mu) - (\pi - \nu),$$

vagyis $mesH = ((\lambda + \mu + \nu) - \pi))R^2$. Visszakaptuk a gömbháromszögtan ismert formuláját gömbi háromszög felszínére.

Próbáljuk meg alkalmazni a tételt az euklideszi sík háromszögére, bár, mint látni fogjuk, a bizonyítás az euklideszi síkra nem működik. Ekkor $K = 0$, $\gamma = 0$, és ha a háromszög szögeit λ, μ, ν-vel jelöljük, $0 = 2\pi - (\pi - \lambda) - (\pi - \mu) - (\pi - \nu)$, vagyis $\lambda + \mu + \nu = \pi$. Nem kaptuk meg a területet, de visszakaptuk, hogy a háromszög szögeinek összege π.

Bizonyítás. Az F felületet leképezzük a párhuzamos normálisok módszerével az S egységgömb felületre. A g görbe gömbi képét jelöljük $\widetilde{g}$-mal. A $\widetilde{g}$ görbe ugyancsak szakaszonként sima, jelöljük töréspontjaiban érintővektorának törésszögeit β_i–vel $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Írjunk be $\widetilde{g}$-be egy zárt, szférikus poligont és jelöljük e poligon felszínét $mes\widetilde{P}$-mal. Az ismert szférikus geometriai formula szerint

$$mes\widetilde{P} = \sum_{k=1}^{r} \omega_k - (r-2)\pi,$$

ahol ω_k a poligon k-adik szöge. Bevezetve e poligon érintővektorának ψ_k törésszögeit

$$mes\widetilde{P} = 2\pi - \sum_{k=1}^{r} \psi_k. \tag{9}$$

Ha az osztópontok számát $\widetilde{g}$-on minden határon túl növeljük, a szférikus poligon $\widetilde{g}$-hoz tart és $mes\widetilde{P}$ az F felület gömbi képének Σ felszínéhez. Alkalmazzuk most (6)-ot a gömbi képre:

$$\lim \sum_{k=1}^{r} \psi_k = \int_{\widetilde{g}} \widetilde{\gamma}(\widetilde{s}) d\widetilde{s} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i,$$

ahol $\widetilde{\gamma}$ és $\widetilde{s}$ a $\widetilde{g}$ görbe geodetikus görbülete, ill. ívhossza. Egyenlővé téve (9) két oldalának határértékét

$$\Sigma = 2\pi - \left(\int_{\widetilde{g}} \widetilde{\gamma}(\widetilde{s}) d\widetilde{s} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \right). \tag{10}$$

Vegyünk most egy v_0 felületi vektort g egy Q pontjában és jelöljük $\widetilde{v_0}$ -mal a v_0-lal egyenlő gömbfelületi vektort a gömb Q-nak megfelelő $\widetilde{Q} \in \widetilde{g}$ pontjában. Toljuk el g -n körbe Levi-Civita értelemben párhuzamosan v_0-at és $\widetilde{g}$-on körbe $\widetilde{v_0}$-at. Jelöljük az ily módon Q-ban, ill. $\widetilde{Q}$-ban nyert vektorokat v_1-gyel, ill $\widetilde{v_1}$–mal. A

2. pontban mondottakból azonban következik, hogy $v_1 = \widetilde{v_1}$. Ezek szerint v_1 és v_0 szöge megegyezik $\widetilde{v1}$ és $\widetilde{v_0}$ szögével. A (4) formulát és annak $\widetilde{g}$-ra felírt analogonját egyenlővé téve

$$\int_{\widetilde{g}} \widetilde{\gamma}(\widetilde{s}) d\widetilde{s} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \int_{g} \gamma(s) ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Az utóbbi egyenletből (10)-be helyettesítve és (7)-et figyelembe véve kapjuk a (8) formulát. □

Hivatkozások

[1] Farkas, M.: *A proof of Gauss-Bonnet's theorem*, Nigerian Journal of Science I. (1967) No. **2**, 175–178.

[2] Klingenberg, W.: *A Course in Differential Geometry* (Springer-Verlag, New York, 1978)

[3] Norden, A.P.: *Teoria poverchnosztyej* (Gosz. Izd. Tech-Teor. Lit., Moszkva, 1956)

[4] Szőkefalvi-Nagy Gyula: *Differenciálgeometria* (Műszaki K., Budapest, 1979)

(Beérkezett: 2007. február 10.)

FARKAS MIKLÓS
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematikai Intézet
1521 Budapest

LITTLE CLASSICAL DIFFERENTIAL GEOMETRY,
A PROOF OF GAUSS-BONNET THEOREM

Miklós Farkas

A simple proof is given to this classical theorem The proof is based on properties of parallel displacement in the sense of Levi Civita.