Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 81-96.

EGY ADALÉK A NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS TÖRTÉNETI ELŐZMÉNYEIHEZ[1]

SZABÓ PÉTER GÁBOR

A két világháború közötti magyar matematikai élet egyik szép elismerésének számított az, ha valaki megkaphatta a Kőnig Gyula-jutalmat. Az 1922 és '44 között kétévente kiadott díjat 1938-ban Lipka Istvánnak a M. Kir. Ferencz József Tudományegyetem magántanárának adták. A Kőnig Gyula-jutalmat odaítélő bizottság, annak egyik tagját – és vele egyszemélyben az előző díjazottat – Kalmár Lászlót kérte fel arra, hogy szegedi kollégájának addigi munkásságát egy összefoglaló dolgozatban ismertesse. Kalmár sorra vette Lipka matematikai írásait – számszerint 17 munkát – és a 6. sz. cikk bemutatását az alábbiakkal kezdte [2]:

„Az analízisnek egy a mechanikával is összefüggő, végeredményben azonban egy algebrai kérdésre visszavezethető problémájával foglalkozik LIPKA 6. sz. dolgozatában. A feltételes szélsőérték-feladatoknál csak azt az esetet szokás tárgyalni, amikor a feltételi relációk mind egyenletek; pedig bizonyos mechanikai kérdések, pl. egy természetes konzervatív rendszer egyensúlya stabilitásának kérdése, ha a kényszerfeltételek részben egyenlőtlenségek, olyan szélsőérték-feladatra vezetnek, amelynél egyenlőtlenség-feltételek is vannak. LIPKA az ilyen feladatokat a következő kérdésre vezeti vissza: adva van egy quadratikus alak; eldöntendő, vajjon ez a változók pozitív értékeinél pozitív-e. Ez az algebrai kérdés PÓLYA egy kritériumának segítségével is megoldható; LIPKA egy másik, a kérdés quadratikus természetének jobban megfelelő megoldást ad."

A szóban forgó dolgozat a berlini Crelle's Journalban jelent meg [4]: S. Lipka, Ein Extremalproblem, nebst Anwendung auf eine Stabilitätsfrage, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 166(1931), 9–15. A németül írt cikket Csendes Tibor fordította magyarra, amelyet ebben a formájában most először teszünk közzé.

Elsősorban a témaválasztása miatt tartjuk fontosnak, hogy felhívjuk a figyelmet erre a dolgozatra. A szerző a hagyományos egyenlőség-feltételes szélsőértékszámítás helyett már egyenlőtlenség-feltételekkel foglalkozik, ezért úgy gondoljuk, hogy jó számon tartanunk adalékként ezt a cikket is, mint a nemlineáris programozás történeti előzményeinek egy hazai vonatkozású eredményét.

A nemlineáris programozásnak, mint önálló diszciplínának a megindulását H.W. Kuhn és A.W. Tucker 1951-ben megjelent 'Nonlinear Programming' c. dolgozatától [1] szokás eredeztetni. Persze voltak már korábban is olyan eredmények

[1]Elhangzott a XXVII. Magyar Operációkutatási Konferencián, Balatonőszödön (2007. június 7–9.).

(mint például a Newton-módszer (1669), a Lagrange-féle multiplikátoros módszer (1788) vagy a Cauchy által felfedezett gradiens módszer (1847)), amelyeket ma a nemlineáris programozás témaköréhez is szoktunk sorolni. Kuhn és Tucker munkájának novuma azonban az volt, hogy éppen az egyenlőtlenség-feltételes nemlineáris optimalizálási feladatra közölték az optimalitás szükséges feltételeit.

Amint azt Prékopa Andrásnak az optimalizálás elméletének kialakulásáról írott dolgozataiból [5, 6] tudjuk, az analitikus mechanika keretein belül lényegében már Farkas Gyula is eljutott az egyenlőtlenség-feltételes nemlineáris optimalizálás szükségességi kritériumához az ún. Fourier-féle mechanikai elv duálisának vizsgálatakor. Szintén ismeretes, hogy Kuhnt és Tuckert megelőzve 1939-ben a diplomamunkájában W. Karush [3] is megfogalmazta az ún. KKT-feltételeket.

Lipka István írása, amely 1932-ben jelent meg – de amint az a dolgozatból is kiderül már 1929. december 1-én elkészült – szintén az egyenlőtlenség-feltételes nemlineáris optimalizálási feladatok tárgyalásának egy korai munkája. Erről a dolgozatról azért is szólunk most, mivel semmilyen az optimalizással vagy az optimalizálás elméletének történetével kapcsolatos szakmunkában még megemlítve sem láttuk ezt a cikket. Úgy gondoljuk, hogy bár Lipka a Kuhn-Tucker tételhez nem jut el, mindenesetre ott a helye a magyar vonatkozású nemlineáris optimalizálás történeti előzményeit tárgyaló irodalomban legalább a megemlítés szintjén.

Lipka egy mechanikai feladattól motiválva foglalkozik optimalizálással. A konzervatív rendszerek stabilitási problémájában a Lagrange–Dirichlet-tétel alkalmazása a potenciális energiafüggvény minimalizálását igényli, mivel ha az előbbi függvénynek egy adott helyen izolált minimuma van, akkor a rendszer ott stabil egyensúlyi helyzetben van. A szerző általános kényszerfeltételek (egyenlőtlenségek) mellett tárgyalva a kérdést jut el az egyenlőtlenség-feltételes optimalizáláshoz.

A tekintett dolgozat alapvetően három problémát vizsgál:

1. Határozzuk meg, hogy milyen feltételek mellett lesz a

$$\begin{aligned} &\min V(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \text{f.h. } &f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geq 0 \\ &\vdots \\ &f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geq 0 \\ &0 < k < n \end{aligned}$$

feladatnak a $\underline{q}^0$ olyan lokális optimális megoldása, amelyre minden feltétel aktívvá válik, ahol

a) $V, f_1, \ldots, f_k$ kétszer folytonosan differenciálható valós függvények,

b) a feltételrendszerbeli függvények alkotta Jacobi-mátrixnak a $\underline{q}^0$ helyen a rangja k (vagyis teljes sorrangú a mátrix),

c) és a Jacobi-mátrix első k oszlopa által meghatározott mátrix determinánsa nem 0.

Érdekes, hogy a vizsgálat bár úgy indul, hogy a tekintett szélsőérték feladat feltételei „nem csak egyenleteket, hanem egyenlőtlenségeket is tartalmazhat”, ezután Lipka csak egyenlőtlenség-feltételekkel dolgozik tovább. Azt írja, hogy az egyenlőség-feltétel „csak a független változók számának csökkenését jelenti”.

A feladatból új $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordináták bevezetésével egy olyan új optimalizálási problémát készít, amelyben az első k változóra nemnegativitási feltétel van előírva, a többi változó előjelkötetlen. Meglepő, hogy bár néven nem nevezi, de az implicit függvény tételt próbálja explicit módon használni. Ez ritka esetben valóban véghezvihető, de gyakorlati szempontból ez a tárgyalási mód nem megfelelő. Az új feladat a következő lesz:

2. Határozzuk meg, hogy mikor van a

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

valós függvénynek olyan lokális $\underline{x}$ optimumhelye, amelyre $0 < k < n$ és

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0.$$

Ezt a feladatot annak az esetnek a tárgyalására viszi át, miszerint annak megvizsgálása jelent csak problémát, hogy a

$$\sum_{(1 \leq i < j \leq n)} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j$$

kvadratikus alak pozitív-e a

$$\delta x_1 \geq 0, \ldots, \delta x_k \geq 0$$

esetben. A $\delta x_{k+1}, \ldots, \delta x_n$ mennyiségek előjelkötetlenek, ahol δx_i az x_i változó variációját jelöli, vagyis egy olyan kicsi mennyiséget, amelyre az $(x_i + \delta x_i)$ vektor még lehetséges megoldás. Lipka itt arra hivatkozik, hogy ennek eldöntéséhez elég megállapítani az előbbi kvadratikus alak relatív pozitív definitségét, amelyet lehet Pólya módszerével, vagy az általa kidolgozott most közlendő módon. A relatív pozitív definitség megállapítása az alábbi feladat megoldását jelenti.

3. Határozzuk meg annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy

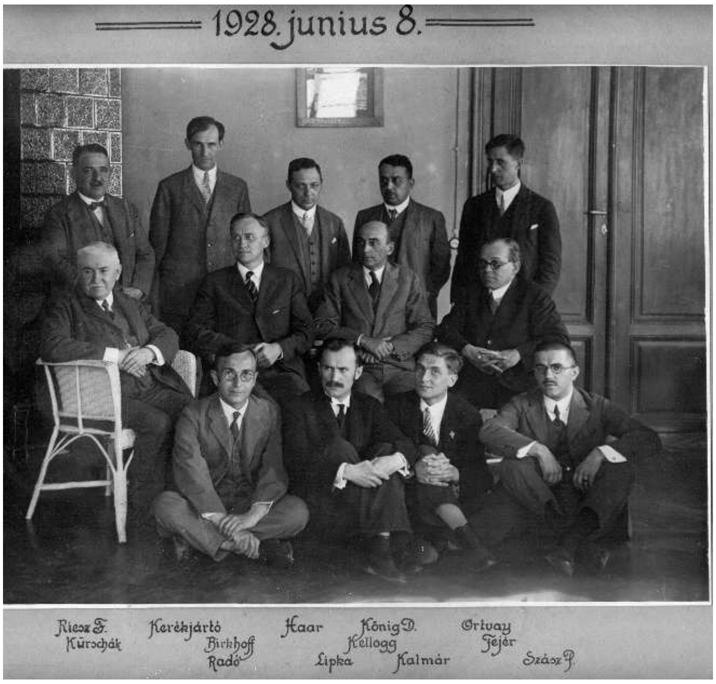
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

kvadratikus alak

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

esetén mindig pozitív (leszámítva az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ esetet).

Lipka itt kidolgozott módszerének ismertetését ismét Kalmár jelentéséből idézzük:



1. ábra. Lipka István az 1928-as szegedi matematikus találkozón készült felvételen (az alsó sorban balról a második helyen ül).

„Szorítkozzunk egyszerűség kedvéért háromváltozós quadratikus alakokra. Egy ilyen alak biztosan bír a kívánt sajátsággal, azaz az első térnyolcadban pozitív, ha pozitív az egységkocka három, nem a koordinátasíkokban fekvő lapján. Azaz csak azt kell megvizsgálnunk, vajjon a quadratikus alaknak ezeken a lapokon felvett minimumai pozitívok-e. Amennyiben valamelyik minimum a lap belsejében éretik el, a szokásos módszerrel meghatározható; ellenkező esetben valamelyik élen éretik el s ekkor megint vagy az él belső pontjában, amikor is szintén az analízis szokásos módszerével határozható meg, vagy pedig valamelyik csúcsban.

Lipka tehát meghatározza a szóbanforgó lapok síkján és élek egyenesén a quadratikus alak minimumát, továbbá értékét a csúcsokban; a kívánt viselkedéshez szükséges és elegendő, hogy e minimumok közül azok, amelyek magán a lapon, illetve élen (és nem a meghosszabbításán) éretnek el, valamint a csúcsokban felvett értékek, pozitívok legyenek. Részletesebb diszkussziót csak az az eset igényel, amikor valamelyik lap síkján nem egy pontban éretik el a minimum, hanem egy egyenes mentén; ebben az esetben meg kell még néznünk, átmegy-e ez az egyenes a lap belsején. Ennek megfelelően az általános (akárhányváltozós) esetben szükség lehet arra, hogy megvizsgáljuk, van-e egy bizonyos lineáris egyenlőtlenségrendszernek megoldása: ez pedig Dines egy módszerével könnyen eldönthető.”

Nézzünk egy konkrét példát Lipka koordináta-transzformációs módszerének használatára. Tekintsük a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\begin{gathered}\min q_1^2 + q_2^2 - 6q_1 - 4q_2 + 13 \\ \text{f.h. } 3 - q_1 - 2q_2 \geq 0.\end{gathered}$$

Könnyen látható, hogy a feladat megoldása a $\underline{q}^0 = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ vektor lesz, az optimum értéke pedig $\frac{16}{5}$ (pl. a grafikus módszert használva, világos, hogy a célfüggvényhez hozzárendelhető olyan kör, amelynek a feltételhez tartozó félsíkot meghatározó egyenessel vett egyetlen közös $\underline{q}^0$ pontja lesz az optimumhely).

Lipka módszerével megmutatjuk, hogy $\underline{q}^0$ minimumhely. Először is új koordinátákat vezetünk be:

$$\begin{aligned}x_1 &:= 3 - q_1 - 2q_2, \\ x_2 &:= q_2.\end{aligned}$$

A $\underline{q}^0$ vektorhoz tartozó új pont koordinátái:

$$\begin{aligned}x_1^0 &:= f_1(\underline{q}^0) = 0, \\ x_2^0 &:= \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Fejezzük ki a q_1, q_2 változókat az újonnan bevezetett x_1 és x_2 változók segítségével:

$$\begin{aligned}q_1 &= 3 - x_1 - 2q_2 = 3 - x_1 - 2x_2, \\ q_2 &= x_2.\end{aligned}$$

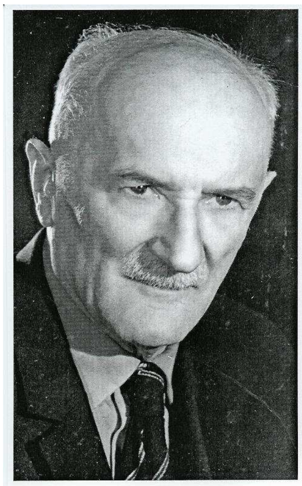
Helyettesítsük be őket az eredeti célfüggvénybe, majd írjuk fel a kapott új feladatot:

$$\begin{gathered}\min g(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_2 + 4 \\ \text{f.h. } x_1 \geq 0.\end{gathered}$$

Vizsgálva az új célfüggvény első parciális deriváltjait

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1 + 4x_2, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 10x_2 + 4x_1 - 4.$$

Látható, hogy az $\underline{x}^0$ pontban pozitív értéket vesz fel az x_1 szerinti parciális derivált (az x_2 szerinti eltűnik), így a $\underline{q}^0$ minimumhelye lesz az eredeti feladatnak.



2. ábra. Lipka Istvánnak egy idősebb korában készült arcképe.

Végül szóljunk röviden a cikk szerzőjéről is, hiszen annak ellenére, hogy a mai napig jelennek meg olyan matematikai munkák, amelyekhez az inspirációt Lipka valamelyik dolgozata adta, a szerzőt sokan csak az 1928-as szegedi matematikus találkozón készült fényképről ismerik (1. ábra). Nevét hiába is keressük a Magyar Nagylexikonban vagy a Magyar Tudóslexikonban, nincs hozzá szócikk. (Az előbb említett két lexikonban viszont a csoportkép összes többi magyar tudósáról külön szócikkek szólnak.)

Lipka István (1899–1990) a bp.-i tudományegyetem matematika-fizika szakán és vele párhuzamosan a Műegyetemen tanult. 1923-ban szerzett középiskolai tanári oklevelet, és még ugyanebben az évben doktorált is matematikából, valamint elméleti és kísérleti fizikából. Három évig a várpalotai gimnáziumban tanított, majd 1926-ban a szegedi tudományegyetem geometriai tanszékére került tanársegédnek. 1929-ben egy szemeszteren át a hamburgi egyetemen volt ösztöndíjas (az előbb tárgyalt munkáját ez év végén írta). 1933-tól a szegedi egyetem magántanára, 1935-től adjunktus, majd 1942-től intézeti tanár a geometriai tanszéken. 1945-ben politikai okokból távoznia kellett az egyetemről. Ezt követően az iparban helyezkedett el, volt statisztikus a Csepel Műveknél, majd gyártmányvezető a szerszámgépgyárban. 1954-ben a Szerszámgép Fejlesztési Intézetbe került és az intézet vezető kutatója lett. 1967-ben vonult nyudíjba. 1976-ban a műszaki tudományok doktora lett. Számos dolgozata jelent meg matematikából és a műszaki gépészet tárgyköréből. A matematikai kutatásai elsősorban a funkcionális algebrára (a komplex számok algebrájára) és a függvénytannak az algebrával összefüggő kérdéseire terjedtek ki.

* * *

Egy szélsőérték feladat egy stabilitási kérdésre való alkalmazással

Lipka István (Szeged)

1. Egy mechanikai rendszer valamely helyzetben való egyensúlyi helyzete stabil jellegű, ha a rendszer a következő tulajdonságokkal rendelkezik: mozgása közben az említett hely közelében marad, ha a rendszer kiindulási pontjait elegendően kis mértékben változtatjuk meg, és a pontoknak megfelelően kis kezdeti sebességet adunk.

A tárgyalásunkat egy stabilitási kérdéssel kezdjük, amely egy szélsőérték feladathoz vezet. Természetes-konzervatív mechanikai rendszereket vizsgálunk. Egy mechanikai rendszer akkor természetes-konzervatív, ha az energiaintegrál alakja $T + V = konstans$, ahol T a kinetikai energia, a sebesség másodfokú függvénye, és V a potenciális energia, amely csak azon koordinátákat tartalmazza, amelyek meghatározzák a rendszer állapotát. Ilyen rendszerekre vonatkozik Lagrange következő tétele, amelyet először Dirichlet igazolt[2]. *Amennyiben a potenciálfüggvénynek egy tetszőleges helyen izolált maximuma van, akkor a rendszer ott stabil egyensúlyi helyzetben van.* A potenciálfüggvény maximuma helyett a potenciális energiafüggvény minimumáról beszélhetünk. Természetes-konzervatív rendszerek estén az összefüggések koordinátái között nem szerepel az idő. Az összefüggéseket szokás szerint egyenletekkel adják meg, amelyek segítségével a koordináták száma csökkenthető oly módon, hogy a fennmaradó koordináták egymástól függetlenek lesznek. Ezután a potenciálfüggvénynek is egymástól független változói lesznek, úgy, hogy a stabilitás kérdését a Lagrange–Dirichlet-tétellel egy szokásos szélsőérték feladatra lehet visszavezetni. A következő megfontolásokban feltesszük, hogy azon koordináták közti összefüggések, amelyek a rendszer állapotát meghatározzák, általános értelemben természetesek, tehát azt, hogy az összefüggések nem csak egyenleteket, hanem egyenlőtlenségeket is tartalmazhatnak. Az ilyen összefüggések köztudottan általános kényszerfeltételeket fejeznek ki. Dirichlet tárgyalásmódját át lehet vinni ilyen rendszerekre, és ez azt adja, hogy egy tetszőleges hely egyensúlya akkor stabil, ha a potenciálfüggvény ugyanott relatív maximummal rendelkezik azzal a feltétellel, hogy a megfelelő egyenletek és egyenlőtlenségek teljesülnek. Ez alapján a feladatunkat a következő alakban fogalmazhatjuk meg. Legyen a $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ függvény a $q_1, q_2, \ldots, q_n$ változók szerint kétszer folytonosan differenciálható. A változó értékek elégítsék ki a $\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0\right) = \left(q_i^0\right)$ hely környezetében a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{gathered} f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geq 0 \\ \vdots \\ f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geq 0 \\ 0 < k < n. \end{gathered} \tag{1}$$

A $\left(q_i^0\right)$ helyen legyen $f_1\left(q_1^0, \ldots, q_n^0\right) = \cdots = f_k\left(q_1^0, \ldots, q_n^0\right) = 0.$[3] Feltesszük, hogy az (1) feltételek nem tartalmaznak egyenlőséget, mert egy egyenlőség csak a független

[2]L. Dirichlet, Über die Stabilität des Gleichgewichtes, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 32(1846), S. 85

[3]Mert ha egy függvény az (1)-ből a $\left(q_i^0\right)$ helyen pozitív lenne, akkor ez a függvény a $\left(q_i^0\right)$ pont egy környezetében is pozitív lenne, és így az érintett egyenlőtlenség a változókra nem jelentene megszorítást.

változók számának csökkentését jelenti. Legyenek az $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvények kétszer folytonosan differenciálhatók, a

$$\left\| \frac{\partial f_h}{\partial q_j} \right\| \qquad h = 1, 2, \dots, k; \qquad j = 1, 2, \dots, k, \dots, n$$

függvénymátrix a $\left(q_i^0\right)$ helyen k rangú; és az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük mindjárt, hogy a $\frac{\partial(f_1,\dots,f_k)}{\partial(q_1,\dots,q_k)}$ Jacobi-determináns a $\left(q_i^0\right)$ helyen nem nulla. Ezek után a feladatunk a következő: *Milyen feltételek mellett lesz a* $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ *függvénynek feltételes szélsőértéke a* $\left(q_i^0\right)$ *helyen, éspedig egy olyan, amely a (1) feltételeknek megfelel?* Új koordinátákat vezetünk be, és erre a célra tekintjük a következő függvényrendszert:

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_n), \dots, x_k = f_k(q_1, q_2, \dots, q_n), \\
x_{k+1} &= q_{k+1}, \dots, x_n = q_n, \\
x_i^0 &= f_i(q_1^0, \dots, q_n^0), && (i = 1, 2, \dots, k), \\
x_i^0 &= q_i^0, && (i = k+1, k+2, \dots, n).
\end{aligned}$$

Ennek a függvényrendszernek a Jacobi-determinánsa a $\left(q_i^0\right)$ helyen a feltevéseink szerint nem nulla, tehát az $\left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)$ pont egy környezetében a függvényrendszerből $q_1, \dots, q_k$ kifejezhető, és

$$q_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

ahol a $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egyértelmű és az x_i változók szerint kétszer folytonosan differenciálható függvények. Most az x_i változókat az (2) egyenletek segítségével behelyettesítjük a $V(q_1, \dots, q_n)$ függvénybe; ezzel egy új, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényt kapunk. Az x_i változók értékkészlete az (1) alapján

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_k \geq 0, \tag{3}$$

az $x_{k+1}, \dots, x_n$ változók tetszőleges értéket vehetnek fel. Ha tehát a $g(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek az (x_i^0) helyen olyan szélsőértéke van, amely a (3) feltételeknek megfelel, akkor a $V(q_1, \dots, q_n)$ függvénynek az (1) feltételeknek megfelelő szélsőértéke van a (q_i^0) helyen. *Tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy mikor van a* $g(x_1, \dots, x_n)$ *függvénynek olyan relatív szélsőértéke (pl. minimuma), amely a (3) feltételeket kielégíti.* A minimum esetén a

$$g\left(x_1^0 + \delta x_1, \dots, x_n^0 + \delta x_n\right) - g\left(x_1^0, \dots, x_n^0\right) = \sum_{(i)} \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)' \delta x_i \delta x_j,$$

kifejtésből[4] következik, hogy az első parciális deriváltak az $\left(x_i^0\right)$ helyen a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_j} &\geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots, k \\
\frac{\partial g}{\partial x_h} &= 0, \qquad h = k+1, \dots, n
\end{aligned} \tag{4}$$

[4]A vessző itt azt jelenti, hogy a deriváltat valahol az $\left(x_i^0\right)$ és a $\left(x_i^0 + \delta x_i\right)$ hely között kell venni.

feltételeket kielégítik. Ha egy a (4) deriváltak közül biztos pozitív, akkor a $g(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek az (x_i^0) helyen minimuma van, az ellenkező esetben, tehát amikor a (4) deriváltak mind eltűnnek, akkor a

$$\delta x_1 \geq 0, \dots, \delta x_k \geq 0, \qquad \delta x_{k+1}, \dots, \delta x_n$$

értékekre a

$$\sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j$$

kvadratikus alaknak pozitívnak kell lennie ahhoz, hogy a $g(x_1, \dots, x_n)$ függvénynek az (x_i^0) helyen relatív minimuma legyen. A feladatunkat egyszerűsítendő jelentsen ε_i egy olyan változót, amely a $+1$ és -1 értékeket veheti fel úgy, hogy az $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \dots, \varepsilon_n$ sorozat a $+1$ és -1 elemekből álló $(n-k)$-adik ismétléses variációkat reprezentálja. Ezen variációk száma 2^{n-k}. Legyen még $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_k = 1$. Tekintsük a

$$\sum_{(i)} \varepsilon_i y_i (a_{i1} y_1 \varepsilon_1 + a_{i2} y_2 \varepsilon_2 + \dots + a_{in} y_n \varepsilon_n) = \sum_{(i,j)} \varepsilon_i \varepsilon_j a_{ij} y_i y_j \qquad (i,j = 1, 2, \dots, n)$$

kvadratikus alakok összességét. Ezen alakok száma szintén 2^{n-k}. Ha az y_i változók az

$$y_1 \geq 0, \qquad y_2 \geq 0, \quad \dots \quad y_n \geq 0$$

feltételeknek eleget tesznek, akkor ezen alakok értékkészlete belátható módon azonos a

$$\sum_{(i,j)} a_{ij} x_i x_j$$

kvadratikus alak értékkészletével, ahol az n változó csupán az

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_k \geq 0, \qquad k < n$$

teljesítik. *Tehát annak a szükséges és elegendő feltételét kell megadnunk, hogy egy* $\sum_{(i,j)} a_{ij} x_i x_j$ *kvadratikus alak*

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0$$

esetén pozitív. Az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ eset természetesen kivétel. Azt az alakot, amely ezzel a tulajdonsággal rendelkezik, *relatív pozitív definit alak*nak nevezzük.

2. Ezen feladatra vonatkozóan meg kell hogy említsem, hogy G. Pólya[5] nemrég a következő fontos tételt bizonyította: Egy olyan n változós $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alak amely a változók minden nemnegatív értékére (az azonosan nulla értékek kivételével) pozitív értékeket vesz föl, előállítható két kizárólag pozitív együtthatós alak hányadosaként. Pólya többek között igazolta, hogy amennyiben egy alak az említett tulajdonsággal rendelkezik, akkor ebből az alakból kiindulva, az $x_1 + x_2 + \dots + x_n$-nel való ismételt szorzással olyan alakot kapunk, amely csak pozitív együtthatókkal rendelkezik. Ha tehát egy kvadratikus alak relatív pozitív definit, akkor ezt a tulajdonságot véges számú lépésben igazolni lehet. Mi azonban itt egy olyan módszert akarunk kidolgozni, amelyik *kizárólag a kvadratikus*

[5] G. Pólya, Über positive Darstellung von Polynomen, Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich **73** (1928).

alak együtthatói segítségével, éspedig *véges sok lépésben* eldönti, hogy az alak relatív pozitív definit, vagy sem.

Először a feladatunkat egy speciális esetben vizsgáljuk, és ebben a szakaszban feltesszük, hogy a kvadratikus alak diszkriminánsa *főminorai mind nullától eltérők.* Jegyezzük még meg, hogy a módszerünk minden olyan kérdés megválaszolására is alkalmas, hogy mikor pozitív definit egy kvadratikus alak (a szokásos értelemben).

A fölvetett feladatot egy minimalizálási problémára vezetjük vissza, éspedig: Jelöljék az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek az n-dimenziós tér egy pontját. A kvadratikus alak értékét minden olyan pontban vizsgáljuk, amely az n-dimenziós tér első 2^n-ed részében van (tehát az $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ tartományban). Az

$$\begin{aligned} x_i &= \rho y_i \qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \dots, n \\ \rho &= \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

transzformációkat bevezetve, mivel $0 \leq y_i \leq 1$, az említett nem korlátos térrész átmegy egy korlátos halmazba. Ez a halmaz az egyesítése a következő $n-1$ dimenziós halmazoknak:

$$\begin{array}{llcll} y_1 = 1, & 0 \leq y_2 \leq 1, & \dots, & 0 \leq y_n \leq 1 & (e_1) \\ 0 \leq y_1 \leq 1, & y_2 = 1, & \dots, & 0 \leq y_n \leq 1 & (e_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 \leq y_1 \leq 1, & 0 \leq y_2 \leq 1, & \dots, & y_n = 1 & (e_n) \end{array}$$

Ezek a halmazok az n-dimenziós egységkocka oldalai. Ezen oldalak egyesítését jelöljük (e)-vel. A

$$\sum_{(ij)} a_{ij} x_i x_j = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \rho^2 (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

képlet azt mutatja, hogy a következőekben az (e) halmazra korlátozódhatunk. Ezután a szükséges és elégséges feltételét adjuk meg annak, hogy a kvadratikus alak minden előbb megadott $(n-1)$-dimenziós oldalon pozitív alsó korláttal rendelkezik. Megvizsgálunk tehát minden (e_i) részt, és G-vel jelöljük (e_i)-nek azt a pontját, amelyre a

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) = Q_{y_i}$$

kvadratikus kifejezés az alsó határát felveszi. A G pont lehet (e_i) egy belső pontja, vagy kerülhet (e_i) egy $(n-k)$-dimenziós oldalára. Az (e_i) egy $(n-k)$-dimenziós oldalán a következőt értjük:

$$\begin{array}{lcr} y_{r_1} = y_{r_2} = \dots = y_{r_\nu} = y_i = 1 & & \\ y_{\rho_1} = y_{\rho_2} = \dots = y_{\rho_\mu} = 0 & \nu + \mu = k - 1 & (e_i') \\ 0 \leq y_j \leq 1, \text{ ha } j \neq r_1, r_2, \dots, r_\nu, i, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu. & & \end{array}$$

Ha egy G pont (e_i) belső pontja, akkor Q_{y_i}-nek helyi minimuma van a G pontban. A Q_{y_i} kifejezés tehát az alsó korlátját csak olyan pontban veheti fel, ahol Q_{y_i}-nek vagy helyi minimuma van, vagy ami az (e_i) egyik oldalára esik. A Q_{y_i} kifejezésnek akkor és csak akkor van helyi minimuma (e_i)-ben vagy annak határán, ha a következő mindkét feltétel teljesül:

1. Az

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{y_i}}{\partial y_1} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1,i-1}y_{i-1} + a_{1,i+1}y_{i+1} + \cdots + a_{1n}y_n + \\
&\quad + a_{1i} = 0 \\
&\vdots \\
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{y_i}}{\partial y_{i-1}} &= a_{i-1,1}y_1 + a_{i-1,2}y_2 + \cdots + a_{i-1,i-1}y_{i-1} + a_{i-1,i+1}y_{i+1} + \cdots + \\
&\quad + a_{i-1,n}y_n + a_{i-1,i} = 0 \\
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{y_i}}{\partial y_{i+1}} &= a_{i+1,1}y_1 + a_{i+1,2}y_2 + \cdots + a_{i+1,i-1}y_{i-1} + a_{i+1,i+1}y_{i+1} + \cdots + \\
&\quad + a_{i+1,n}y_n + a_{i+1,i} = 0 \\
&\vdots \\
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{y_i}}{\partial y_n} &= a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,i-1}y_{i-1} + a_{n,i+1}y_{i+1} + \cdots + \\
&\quad + a_{n,n}y_n + a_{n,i} = 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszernek olyan $y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, \dots, y_n^*$ megoldása van, amelyre az $1 \geq y_j^* \geq 0$ reláció teljesül[6].

2. Az előző egyenletrendszer determinánsa egy $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n$ változókra definiált pozitív definit kvadratikus alak diszkriminánsát adja.

Amikor 1. és 2. teljesül, akkor Q_{y_i} valóban felveszi az alsó határának értékét az $y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, \dots, y_n^*$ pontban, mivel a 2. szerint a

$$Q\left(y_1^* + y_1, \dots, y_{i-1}^* + y_{i-1}, 1, y_{i+1}^* + y_{i+1}, \dots, y_n^* + y_n\right) =$$
$$Q\left(y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, 1, y_{i+1}^*, \dots, y_n^*\right) + \sum_{h,j \neq i} a_{hj}y_h y_j > Q\left(y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, 1, y_{i+1}^*, \dots, y_n^*\right)$$

egyenlőtlenség érvényes. Amennyiben az 1. és 2. feltételek valamelyike nem teljesül, akkor Q_{y_i} az alsó határát biztos, hogy az (e_i) egy (e_i') oldalán veszi fel. Lehetséges, hogy ez az oldal egyetlen pontból áll; ebben az esetben Q_{y_i} az alsó határát az n-dimenziós egységkocka egy csúcsában veszi fel. Amikor az illető oldal $(n-k>0)$ dimenziós, akkor az alsó korlát ezen (e_i') oldal belső pontjában vétetik fel. Az (e_i) ilyen pontjában a

$$Q(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) = \overline{Q}(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \dots, y_{\lambda_{n-k}})$$

$$\begin{aligned}
&y_{r_1} = y_{r_2} = \cdots = y_{r_\nu} = 1 \\
&y_{\rho_1} = y_{\rho_2} = \cdots = y_{\rho_\mu} = 0 \qquad\qquad \nu + \mu = k - 1
\end{aligned}$$

kvadratikus alaknak helyi minimuma kell hogy legyen, aminek megfelelően:

A) Az

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y_{\lambda_1}} = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y_{\lambda_2}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y_{\lambda_{n-k}}} = 0,$$

[6] Az egyenletrendszer determinánsa egy főminora a diszkriminánsnak, tehát nem nulla.

egyenletrendszernek léteznie kell olyan megoldásának, amire az

$$1 > y^*_{\lambda_1} > 0, \qquad 1 > y^*_{\lambda_2} > 0, \quad \dots, \quad 1 > y^*_{\lambda_{n-k}} > 0$$

relációk érvényesek.

B) Az előző egyenletrendszer determinánsa egy $n-k$ változós pozitív definit kvadratikus alak diszkriminánsa kell hogy legyen.

Tehát a feladatunk az eddigi megfontolásaink alapján a következő módon oldható meg: *Tekintsük az összes lehetséges*

$$\begin{aligned}
a_{\lambda_1\lambda_1}y_{\lambda_1} + a_{\lambda_1\lambda_2}y_{\lambda_2} + \dots + a_{\lambda_1\lambda_\kappa}y_{\lambda_\kappa} &= -\sum_{k=1}^{\nu} a_{\lambda_1\lambda_{r_k}} \\
a_{\lambda_2\lambda_1}y_{\lambda_1} + a_{\lambda_2\lambda_2}y_{\lambda_2} + \dots + a_{\lambda_2\lambda_\kappa}y_{\lambda_\kappa} &= -\sum_{k=1}^{\nu} a_{\lambda_2\lambda_{r_k}} \\
&\ \,\vdots \\
a_{\lambda_\kappa\lambda_1}y_{\lambda_1} + a_{\lambda_\kappa\lambda_2}y_{\lambda_2} + \dots + a_{\lambda_\kappa\lambda_\kappa}y_{\lambda_\kappa} &= -\sum_{k=1}^{\nu} a_{\lambda_\kappa\lambda_{r_k}},
\end{aligned} \tag{5}$$

egyenletrendszert, ahol $1 \le \kappa \le n$, $q \le \nu \le n-\kappa$, *továbbá* $r_k \ne \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$ $(k = 1, 2, \dots, \nu)$.

Az ilyen rendszerek száma

$$\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{n-i-1}\binom{n-i}{k} = 3^n - 2^{n+1} + 1.$$

Jelölje $(y^*_{\lambda_i})$ *a (5) egyenletrendszer megoldását, továbbá* $Q(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \dots, y_{\lambda_\kappa})$ *azt a kvadratikus kifejezést, amelyet a* $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$*-ből a*

$$\begin{aligned}
&y_{\rho_1} = y_{\rho_2} = \dots = y_{\rho_\mu} = 0 && \mu = n - \kappa - \nu \\
&y_{r_1} = y_{r_2} = \dots = y_{r_\nu} = 1 && \rho_i \ne \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa, r_1, r-2, \dots, r_\nu; i = 1, 2, \dots, \mu
\end{aligned}$$

helyettesítéssel kapunk. Azt állítjuk, hogy a kvadratikus alak akkor és csak akkor lesz pozitív változókra pozitív, ha:

I. A (5) minden olyan megoldására, amelyre $y^*_{\lambda_i} \ge 0$, *a*

$$Q(y^*_{\lambda_1}, y^*_{\lambda_2}, \dots, y^*_{\lambda_\kappa}) > 0$$

egyenlőtlenség teljesül.

II. A kvadratikus alak az n*-dimenziós egységkocka minden csúcsában pozitív értékű, kivéve a* $(0, 0, \dots, 0)$ *pontot.*

Az I., II. feltételek szükségessége világos. A fenti megfontolásokból az is következik, hogy az I., II. feltételek elegendőek. Amennyiben ugyanis $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ az alsó határát egy (e_i) vagy (e'_i) oldal belsejében veszi fel (lásd A és B), akkor ez az alsó határ I. alapján pozitív. Ez II. alapján ugyanígy pozitív, amikor azt a kocka egy csúcsában éri el.

3. Az eddigi tárgyalás során feltettük, hogy a kvadratikus alak diszkriminánsának *minden főminora nullától különböző.* Ezen feltevés következtében a kvadratikus alak helyi minimumpontjai száma legfeljebb egy volt; amit az I. feltételnél is kihasználtunk. Most azt feltételezzük, hogy az említett főminorok között bizonyosak nullák, tehát hogy a (5) egyenletrendszerek közül egyesek eltűnő determinánsúak. Ezen egyenletrendszerek közül is csak azokat vizsgáljuk, amelyek egyértelműen megoldhatók. A következőkben egy ilyen egyenletrendszert tárgyalunk.

4. Az együtthatók mátrixa rangja $r < \kappa$. A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$ indexek megfelelő felcserélése után (5) minden megoldására a

$$y_{\lambda_k} = b_k + c_{k1} y_{\lambda_{r+1}} + c_{k2} y_{\lambda_{r+2}} + \cdots c_{k_{\kappa-r}} y_{\lambda_\kappa} \qquad k = 1, 2, \dots, r, \tag{6}$$

ahol az $y_{\lambda_{r+1}}, y_{\lambda_{r+2}}, \dots, y_{\lambda_\kappa}$ értékeket tetszőlegesen megválaszthatjuk. Ha az (6) lineáris kifejezéseket behelyettesítjük a

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \overline{Q}$$

$$\begin{aligned} &y_{r_1} = y_{r_2} = \cdots = y_{r_\nu} = 1 \\ &y_{\rho_1} = y_{\rho_2} = \cdots = y_{\rho_\mu} = 0 \qquad\qquad \nu + \mu = k - 1 \end{aligned}$$

$r_j \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, $\rho_i \neq r_1, r_2, \dots, r_\kappa$, $\rho_i \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$, $i = 1, 2, \dots, \mu$ kvadratikus alakba, a $\overline{Q}$ kvadratikus kifejezés csak az $y_{\lambda_{r+1}}$, $y_{\lambda_{r+2}}, \dots, y_{\lambda_\kappa}$ változókat tartalmazza. Ezt a kifejezést Q^*-al jelöljük. Most megmutatjuk, hogy Q^* konstans. Érvényes ugyanis

$$\frac{\partial Q^*}{\partial y_{\lambda_s}} = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\partial \overline{Q}}{dy_{\lambda_i}} \frac{\partial y_{\lambda_i}}{dy_{\lambda_s}}, \qquad s = r+1, r+2, \dots, \kappa. \tag{7}$$

Másrészt a

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y_{\lambda_i}} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, \kappa$$

lineáris egyenletrendszernek, tehát a (5) egyenletrendszernek olyan y_{λ_i} értékrendszer felel meg, amelyben $y_{\lambda_{r+1}}, y_{\lambda_{r+2}}, \dots, y_{\lambda_\kappa}$ tetszőleges, és y_{λ_1}, $y_{\lambda_2}, \dots, y_{\lambda_r}$, az (6)-nek megfelelően választott. Ebből következik, hogy (7) alapján

$$\frac{\partial Q^*}{\partial y_{\lambda_s}} = 0, \qquad s = r+1, \dots, \kappa.$$

Az eddigi eredményünk tehát a következő: *Amennyiben a kvadratikus alak diszkriminánsának van egy eltűnő főminora, akkor a $\overline{Q}$ minimumhelyei száma végtelen lehet*[7]*, azonban a hozzájuk tartozó minimum értékek megegyeznek.* Ha ilyen minimumhelyek léteznek, akkor felmerül a kérdés, hogy van-e ezen minimumhelyek között olyan, amelynek

[7]Ez akkor következik be, ha 1. a (5) egyenletrendszer megoldható, 2. a (5) egyenletrendszer determinánsa egy pozitív definit vagy pozitív szemidefinit kvadratikus alak diszkriminánsa.

nemnegatív koordinátái vannak, más szóval, hogy a

$$\begin{aligned}
b_1 + c_{11}y_{\lambda_{r+1}} + c_{12}y_{\lambda_{r+2}} + \dots + c_{1,\kappa-r}y_{\lambda_\kappa} &\geq 0 \\
b_2 + c_{21}y_{\lambda_{r+1}} + c_{22}y_{\lambda_{r+2}} + \dots + c_{2,\kappa-r}y_{\lambda_\kappa} &\geq 0 \\
&\vdots \\
b_r + c_{r1}y_{\lambda_{r+1}} + c_{r2}y_{\lambda_{r+2}} + \dots + c_{r,\kappa-r}y_{\lambda_\kappa} &\geq 0 \\
y_{\lambda_{r+1}} \qquad\qquad\qquad\qquad &\geq 0 \\
y_{\lambda_{r+2}} \qquad\qquad &\geq 0 \\
&\vdots \\
y_{\lambda_\kappa} &\geq 0
\end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszernek van-e megoldása. A lineáris egyenlőtlenségek elméletét H. Minkowski[8], Farkas Gyula[9], és újabban Haar Alfréd[10] fejlesztette ki. L.L. Dines[11] egy fontos munkában az „egyenlőtlenségrang" fogalmát vezette be. Ezen fogalom segítségével el lehet dönteni, hogy egy lineáris egyenlőtlenségrendszernek van-e megoldása, vagy sem. Egy lineáris egyenlőtlenségrendszer mátrixa „egyenlőtlenségrang"-ját további mátrixok egymás utáni előállításával lehet meghatározni. Tehát pusztán a rendszer együtthatói segítségével el lehet dönteni, hogy létezik-e megoldás. Ha a rendszernek van megoldása, és a kvadratikus alak pozitív definit, akkor a közös minimumérték, amelyet a Q kvadratikus alak az (6)-ben megadott végtelen sok helyen felvesz, pozitív kell hogy legyen. Ezt elegendő egyetlen ilyen pontra igazolni, például az

$$y_{\lambda_1} = b_1, y_{\lambda_2} = b_2, \dots, y_{\lambda_r} = b_r, \qquad y_{\lambda_{r+1}} = y_{\lambda_{r+2}} = \dots = y_{\lambda_n} = 0$$

pontra.

4. Végül megemlítjük azt az esetet, amikor a (5) egyenletrendszerek között nincs olyan, amelyiknek van nemnegatív megoldása. Ekkor $\mu = n-2$, $\nu = 1$-re a (5)-ből adódó

$$a_{\lambda_1\lambda_1}y_{\lambda_1} = -a_{\lambda_1 r_1}, \qquad 1 \leq \lambda_1 \leq n, \quad 1 \leq r_1 \leq n$$

egyenleteknek van negatív megoldása. Ez azonban triviális módon elegendő ahhoz, hogy a kvadratikus alak a változók pozitív értékére pozitív legyen.

(Szeged, 1929. december 1.)

[8] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, 39–45. o.
[9] J. Farkas, Theorie der einfachen Ungleichungen, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 124(1901) 1–27.
[10] A. Haar, Über lineare Ungleichungen, Acta Szeged 2(1924–1926), 1–14.
[11] L.L. Dines, Systems of linear inequalities, Annals of Mathematics 20(1918–1919) 191–199.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is köszönöm *dr. Csendes Tibornak* (SZTE, Kalmár Intézet), hogy Lipka István eredeti dolgozatát lefordította magyar nyelvre és hozzájárult annak közzétételéhez. Szintén köszönettel tartozom *dr. Filep Lászlónénak* (Nyíregyházi Főiskola, PR-Iroda), hogy betekintést engedett néhai *dr. Filep László* (1941-2004) matematikatörténeti tárgyú anyagaiba. A dolgozat 2. ábrájának fényképe *Filep László* gyűjtéséből származik. Végezetül köszönöm *dr. Varga Antalnak* (SZTE, Bolyai Intézet), hogy felhívta a figyelmem Lipka István egykori munkájára.

Hivatkozások

[1] H.W. Kuhn and A.W. Tucker: *Nonlinear programming.* In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, pp. 481–492, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

[2] Kalmár László: *Jelentés az 1938. évi Kőnig Gyula-jutalomról*, Mat. és Fiz. Lapok **45** (1938), 1–17.

[3] W. Karush: *Minima of Functions of Several Variables with Ineqaualities as Side Conditions*, Master's Thesis (Department of Mathematics, University of Chicago), 1939.

[4] Stephan Lipka: *Ein Extremalproblem, nebst Anwendung auf eine Stabilitätsfrage*, J. Reine und Angewandte Mathematik **166** (1932), 9–15. Letölthető a `http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?did=D280262` címről is.

[5] Prékopa András: *Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről*, Alkalmazott Matematikai Lapok **4** (1978), 165–191.

[6] András Prékopa: *On the development of optimization theory*, American Mathematical Monthly **87** (1980), 527–542.

(Beérkezett: 2007. október 16.)

SZABÓ PÉTER GÁBOR
Szegedi Tudományegyetem
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
6701, Szeged, Pf. 652
e-amil: pszabo@inf.u-szeged.hu

A CONTRIBUTION TO THE PRELIMINARY HISTORY OF NONLINEAR OPTIMIZATION

Péter Gábor Szabó

The paper presents a forgotten article in subject of Nonlinear Optimization. This article published in Crelle's Journal in 1932, and its author was István Lipka (1899-1990) a Hungarian mathematician. In his work, Lipka has considered the inequality constrained nonlinear optimization problem motivated by an analytical mechanical investigation. He reduced the problem to solve an algebraic question which based on quadratical forms. The paper contains Lipka's full work in Hungarian translation, historical comments, biographical data and two photos about the author.