Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 317-328.

VÉGTELEN DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK STABILITÁSA

LUKIC ANIKÓ[1]

Az alábbi dolgozat végtelen lineáris egyenletrendszerek globális stabilitásának vizsgálatával foglalkozik minimális stabilizáló mechanizmus esetében. Az egyenletrendszer megoldóképletének felírása a Feynman–Kac-formulán alapszik. A megoldóképlet kiértékelése a Markov-láncok elméletének alkalmazásával történik. A cikk célja annak bemutatása, hogy ha egy adott végtelen összefüggőgráfon végbemenő Markov-lánc rekurrens, akkor a gráfon definiált egyenletrendszer stabil. A dolgozat végén a tranziens eset is tárgyalásra kerül.

1. Bevezető

A differenciálegyenletek elméletének gyakorlatban történő alkalmazása során gyakran adódnak olyan $\dot{x_k} = f(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$ alakú egyenletrendszerek, ahol a jobboldali függvény csak az $x_k - x_j$ különbségektől függ. Jól látható, hogy az ilyen esetekben minden konstans konfiguráció $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i = c$, $i = 1, 2, \dots, n$, $c \in \mathbb{R}$, egyben az egyenletrendszer stacionárius pontja is. Mivel azonban a stacionárius pontok halmaza összefüggő és kontinuum számosságú, az ilyen egyenletekből álló rendszer általában nem stabil. Ebben a dolgozatban egy egyszerű feladatot tárgyalunk, ahol megmutatjuk, hogy mindössze egyetlen egyenlet módosításával a rendszer stabilissá tehető. E kérdéskör különösen akkor válik érdekessé, ha a rendszer mérete a végtelenhez tart. A feladat a következőképpen fogalmazható meg:

Adott egy $\mathcal{G} = (G, E)$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen összefüggőgráf. G_k jelöli a k csúcs szomszédos csúcsainak halmazát, mindig feltesszük, hogy $\sup |G_k| < \infty$. A $\mathcal{G}$ gráfon adott a követekezőegyenletrendszer:

$$\dot{x_k} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k \in G,$$

ahol $x_k \in \mathbb{R}$ és

$$H = \frac{1}{2}\Gamma(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{k \in G} \sum_{j \in G_k} V(x_k - x_j).$$

[1]Támogatta: OTKA TS 49835 pályázat

Ekkor a H-hoz tartozó egyenletrendszer a következő

$$\begin{aligned} x_k &= -\sum_{j\in G_k} V^{'}(x_k - x_j), \quad k \neq 0, \quad \text{és} \\ x_0 &= -\frac{1}{2}\Gamma'(x_0) - \sum_{j\in G_0} V^{'}(x_0 - x_j). \end{aligned} \tag{1}$$

Megjegyzés. Az (1) rendszerből jól látható, hogy $\Gamma = 0$ esetében minden konstans konfiguráció egyben a rendszer stacionárius pontja is, ami nem feltételenül következik, ha $\Gamma \neq 0$.

A következő fejezetben véges gráfokon definiált rendszerek exponencionális stabilizálhatóságát szemléltetjük *Ljapunov* módszere segítségével. A későbbiekben megmutatjuk, hogy a Markov-folyamatok elméletével, nevezetesen a Feynman–Kac-formula segítségével ilyen stabilitási feltételek, a Γ és V függvényekre vett természetes feltételek mellett, végtelen gráfokra is bizonyíthatóak, de a konvergencia sebessége ilyenkor már nem exponencionális. A tárgyalás folyamatossága érdekében néhány ismert, de nem közismert tény bizonyítását is közöljük.

2. Véges rendszerek

Ebben a fejezetben *Ljapunov* módszere segítségével röviden szemléltetjük, hogy a fenti típusú véges rendszerek exponenciálisan stabilak. Feltételek garantálják az egyértelmű megoldás létezését, ami a bizonyításból is látható.

2.1. Tétel. *Adott az (1) egyenletrendszer, ahol $|G| < \infty$. Legyen $V \in C^2(\mathbb{R})$ szimmetrikus függvény, $V''(x), \Gamma''(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall,\ x \in \mathbb{R}$, valamint $\Gamma^{'}(0) = 0$. Ekkor az (1) véges egyenletrendszer globálisan exponencionálisan stabil.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$Q(t) = \sum_{k\in G} x_k^2(t), \quad Q(0) < \infty,$$

kvadratikus *Ljapunov*-függvényt és annak a t szerinti deriváltját

$$\dot{Q}(t) = 2\sum_{k\in G} x_k \dot{x_k} = -x_0\Gamma'(x_0) - \sum_{k\in G} x_k \sum_{j\in G_k} V^{'}(x_k - x_j).$$

Átrendezés után adódik, hogy

$$\dot{Q}(t) = -x_0\Gamma'(x_0) - \sum_{(k,j)\in E} (x_k - x_j)V^{'}(x_k - x_j),$$

ahonnan jól látható, hogy a 0 konfiguráció a rendszer egyetlen stacionárius pontja.

A V és Γ függvények konvexitása és $V^{'}(0) = \Gamma'(0) = 0$ miatt bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén $yV^{'}(y) = y^2 V^{''}(\xi) \geq \alpha y^2$, és ugyanígy, $y\Gamma'(y) \geq \alpha y^2$, tehát

$$\dot{Q}(t) \leq -\alpha x_0^2 - \alpha \sum_{(k,j)\in E} (x_k - x_j)^2.$$

Ezután a Cauchy-egyenlőtlenséggel kapjuk, hogy

$$x_k^2 = \Big(x_0 + (x_1 - x_0) + \cdots + (x_k - x_{k-1})\Big)^2 \leq$$
$$\leq (k+1)\Big(x_0^2 + (x_1 - x_0)^2 + \cdots + (x_k - x_{k-1})^2\Big) \leq -\frac{N\dot{Q}(t)}{\alpha},$$

ahol N az x_0 középpontú gráf sugara. A kapott eredményt összegezve

$$Q(t) = \sum_{k\in G} x_k^2 \leq -\sum_{k\in G} \frac{N\dot{Q}(t)}{\alpha} = -\frac{N|G|\dot{Q}(t)}{\alpha},$$

tehát $\dot{Q}(t) \leq -\sigma Q(t)$, ahol $\sigma := \frac{\alpha}{N|G|}$. Grönwall lemmájával $Q(t) \leq Q(0)e^{-\sigma t}$, vagyis a kivánt globális exponenciális stabilitás érvényes. □

Végezetül vegyük észre, hogy ha a rendszer mérete $|G| \to \infty$, akkor $\sigma \to 0$, melynek következtében végtelen rendszerek esetében az imént alkalmazott módszer nem vezet eredményhez. A dolgozat további részében a fenti egyenletrendszer lineáris változatának a végtelenbe történőkiterjesztésével foglalkozunk. A megoldó képlet felírása, illetve annak kiértéklése a Feynman–Kac-formula és a Markov-folyamatok elméletének alkalmazásával történik.

3. Bolyongás megszámlálható halmazon

Adott egy tetszőleges $\mathcal{G} = (G, E)$ összefüggőgráf, ahol G véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz. Célunk a $\mathcal{G}$ gráfon olyan folytonos idejű bolyongást definiálni, ami minden más értelemben megfelelel a G állapotterű diszkrét idejű Markov-láncnak. Erre azért van szükség, mert a későbbi vizsgálódásaink során e folytonos idejű Markov-lánc rekurrencia tulajdonságára lesz szükségünk, viszont a rekurrenciára vonatkozó eredmények általában csak diszkrét idejű Markov-láncokra vannak megfogalmazva. A továbbiakban jelölje ξ_n a diszkrét, ξ_t pedig a folytonos idejű Markov-láncot.

A diszkrét idejű Markov-lánc olyan Markov-típusú sztochasztikus folyamat, amelynek indexparamétere $T = (0, 1, 2, \dots)$. Azt mondjuk, hogy a folyamat az i állapotban van, ha $\xi_n = i$, ahol $n \in T$ és $i \in G$. Annak a valószínűségét, hogy ξ_{n+1} a j állapotba megy át, feltéve, hogy ξ_n az i állapotban van, egylépéses átmenetvalószínűségnek nevezzük és p_{ij}-vel jelöljük:

$$p_{ij} = \mathrm{P}(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i).$$

A p_{ij} számokat mátrix formájában szokás elrendezni

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Diszkrét idejű Markov-láncoknál feltesszük, hogy az egyes átmenetek között mindig ugyanannyi idő telik el. A $\mathbf{P}$ mátrixot a folyamat *átmenetvalószínűség mátrix*ának nevezzük, ahol az átmenetvalószínűségek eleget tesznek a következő összefüggéseknek:

(a) $p_{ii} = 0$ és $p_{ij} = 0$, ha i és j csúcsok nem szomszédosak,

(b) $p_{ij} \geq 0$, ha i és j csúcsok szomszédosak és

(c) $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$, minden $i = 0, 1, 2, \ldots$

*Megjegyzés.*A $p_{ii} = 0$ feltétel általában nem szükséges, de mivel a folytatásban a folytonos idejű bolyongás definiálásakor szerepet játszik, ezért kimondjuk.

A diszkrét és a folytonos idejű Markov-láncok közötti megfeleltetés a következő konstrukció alapján történik. Képzeljük el, hogy minden $k \in G$ csúcsnál adottak a $\lambda_k > 0$ paraméterű Poisson folyamatok és a p_{kj} átmenetvalószínűségek. Ezen paraméterek által meghatározott folyamat a következőképpen működik: ha a folytonos idejű Markov-lánc a t időpontban a k csúcsban van, azaz $\xi_t = k$, akkor egységnyi idő helyett λ_k paraméterű exponencionális várakozási időután p_{kj} valószínűséggel vándorol a szomszédos j pontba. Az így kapott folyamat a következőképpen viselkedik: egységnyi időhelyet a véletlentől függő ideig a k állapotban található, majd ennek az időszaknak a végén p_{kj} valószínűségekkel átmegy valamelyik szomszédos j csúcsba, ahol ismét a véletlentől függő ideig tartózkodik és így tovább.

3.1. Definíció. Legyen ξ_t a fenti módón definiált folytonos Markov-lánc a $\mathcal{G}$ gráfon és legyen $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor $P^t\varphi(k) = \mathbb{E}\Big[\varphi(\xi_t)|\xi_0 = k\Big]$ a folyamat feltételes várható érték operátora, és a folyamat generátora

$$\mathcal{L}\varphi(k) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(P^t\varphi(k) - \varphi(k)\Big).$$

Könnyű ellenőrizni a következő állítást, aminek egy kicsit bonyolultabb változatát még ebben a szakaszban igazoljuk.

3.1. Állítás. *A fent leírt folytonos Markov-lánc generátora*

$$\mathcal{L}\varphi(k) = \lambda_k \sum_{j \neq k} p_{kj}\Big(\varphi(j) - \varphi(k)\Big). \tag{2}$$

Az is látható hogy $\mathcal{L}\phi(k) \leq 0$, ha k a ϕ lokális maximumának helye, vagyis teljesül a nevezetes *maximum elv.*

Mielőtt még rátérnénk a következő fejezetre, ezt a folyamatot tovább módosítjuk. Tegyük fel, hogy adott egy λ paraméterű Poisson folyamat úgy, hogy minden $\lambda_k \leq \lambda$. Azt mondjuk, hogy λ paraméterű exponencionális idő után a bolyongó részecske $\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda}$ valószínűséggel továbbra is marad a k csúcsban, illetve $\frac{\lambda_k}{\lambda}$ valószínűséggel ugrik valamely szomszédos csúcsba. Az így kapott folyamatot fogjuk a továbbiakban *folytonos Markov-láncként* emlegetni.

3.1. TÉTEL. *A fenti folytonos Markov-lánc generátorátorát a (2) képlet adja meg.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\xi_t = k$. Jelölje A_t a λ paraméterű Poisson-folyamatot. Ekkor a $(t, t+s)$, $s > 0$, intervallumon a következőesemények lehetségesek:

I. $P(A_{t+s} - A_t = 0) = e^{-\lambda s}$,

II. $P(A_{t+s} - A_t = 1) = \lambda s e^{-\lambda s}$, ezen belül

  (1) $P(\xi_{t+s} = k | \xi_t = k, A_{t+s} - A_t = 1) = \frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda} \lambda s e^{-\lambda s}$,

  (2) $P(\xi_{t+s} \neq k | \xi_t = k, A_{t+s} - A_t = 1) = \frac{\lambda_k}{\lambda} \lambda s e^{-\lambda s}$ és

III. $P(A_{t+s} - A_t \geq 2) = O(s^2)$.

Ekkor

$$(L\varphi)(k) = \lim_{s \to 0} \frac{\mathbb{E}(\varphi(\xi_{t+s}) | \xi_t = k) - \varphi(k)}{s},$$

ahol

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(\xi_{t+s}) | \xi_t = k) = &\left(e^{-\lambda s} + \lambda s e^{-\lambda s} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda} \right) \varphi(k) + \\ &+ \frac{\lambda_k}{\lambda} \lambda s e^{-\lambda s} \sum_{j \neq k} p_{kj} \varphi(j) + O(s^2).\end{aligned}$$

Ebből adódóan

$$\mathcal{L}\varphi(k) = \lim_{s \to 0} \frac{\left(e^{-\lambda s} + \lambda s \frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda} e^{-\lambda s} - 1 \right) \varphi(k)}{s} + \lambda_k e^{-\lambda s} \sum_{j \neq k} p_{kj} \varphi(j).$$

Felhasználva az összefüggést, amely szerint

$$1 = e^{-\lambda s} + \lambda s e^{-\lambda s} + O(s^2),$$

valamint az adódó egyszerűsítések és a határátmenet elvégzése után

$$\mathcal{L}\varphi(k) = \lambda_k \sum_{j \neq k} p_{kj} \Big(\varphi(j) - \varphi(k) \Big)$$

adódik, amit bizonyítani kellett. □

Ez a gondolatmenet azt is igazolja hogy az

$$u(t,k) := \mathbb{E}\Big[\varphi(\xi_t)|\xi_0 = k\Big] = P^t\varphi(k)$$

feltételes várható érték a $\partial_t u(t,k) = \mathcal{L}u(t,k)$ *Kolmogorov-egyenlet* megoldása. A maximum elv segítségével az is következik hogy a Kolmogorov-egyenletek korlátos megoldása egyértelmű, lásd [4], és a feltételes várható értékek meghatározzák a folyamat átmeneti valószínűségeit, tehát az általunk definiált két folytonos Markov-folyamat azonos.

A követező részben ennek az egyenletnek egy összetettebb formájával foglalkozunk, melynek megoldását a vizsgált gráfon a Feynman–Kac-képlet teszi lehetővé.

4. A Feynman–Kac-képlet

A 3. fejezetben definiált folytonos Markov-lánc és a Feynman–Kac-megoldóképlet alapján a következő tétel igazolható.

4.1. Tétel. *Legyenek adottak a $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ korlátos és $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ felülről korlátos függvények. Ekkor a*

$$\partial_t u(t,k) = \mathcal{L}u(t,k) + \gamma(k)u(t,k) \tag{3}$$

differenciálegyenletnek az $u(0,k) = \varphi(k)$ kezdeti értékéhez tartozó megoldását a Feynman–Kac-képlet adja:

$$u(t,k) := \mathbb{E}\Big(\varphi(\xi_t)e^{\int_0^t \gamma(\xi_\tau)d\tau}\Big),$$

ahol $\xi_0 = k$.

Megjegyzés. A Feynman–Kac-megoldóképlet sokkal bonyolultabb módon definiált Markov-láncokra is alkalmazható.

Bizonyítás. A bizonyítást először a $t = 0$ helyen végezzük el. Vezessük be az

$$X(t) = \varphi(\xi_t) \quad \text{és}$$
$$Y(t) = e^{\int_0^t \gamma(\xi_\tau)d\tau}$$

jelöléseket. Ekkor

$$u(t,k) = \mathbb{E}(X(t)Y(t)).$$

Innen

$$\begin{aligned}\partial_t u(0,k) = \lim_{t\to 0} & \frac{\mathbb{E}\Big(X(t)Y(t)\Big) - \mathbb{E}\Big(X(0)Y(0)\Big)}{t} \\ &+ X(0)\lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}\Big(Y(t)-Y(0)\Big)}{t} \\ &+ Y(0)\lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}\Big(X(t)-X(0)\Big)}{t} \\ &+ \lim_{t\to 0}\mathbb{E}\frac{\Big(X(t)-X(0)\Big)\Big(Y(t)-Y(0)\Big)}{t}.\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}X(0) &= \varphi(\xi_0) = \varphi(k), \\ Y(0) &= e^{\int_0^0 \gamma(\xi_\tau)d\tau} = 1,\end{aligned}$$

és a fenti egyenletben a harmadik határérték Y természete miatt éppen nullával egyenlő, valamint

$$\partial_t Y(0) = e^{\int_0^0 \gamma(\xi_\tau)d\tau}\gamma(\xi_0) = \gamma(k) \quad \text{és}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}\Big(X(t)-X(0)\Big)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}\Big(\varphi(\xi_t)\Big) - \mathbb{E}\Big(\varphi(k)\Big)}{t} = \mathcal{L}\varphi(k).$$

A fentieket összefoglalva, a $t = 0$ helyen a t szerinti differenciálás elvégzése után az eredmény valóban a kívánt

$$\partial_t u(0,k) = u(0,k)\gamma(k) + \mathcal{L}\varphi(k).$$

Továbbá

$$u(t+s,k) = \mathbb{E}\Big(\varphi(\xi_{t+s})\alpha\beta\Big),$$

ahol

$$\alpha := e^{\int_0^t \gamma(\xi_\tau)d\tau}$$

és

$$\beta := e^{\int_0^s \gamma(\xi_{t+\tau})d\tau}.$$

Mivel a $u(t+s,k)$ értékét ugyanazzal az eljárással kapjuk a $u(t,\cdot)$ függvényből, mint $u(t,k)$-t $u(0,\cdot) = \varphi$-ből, ezért a 3. fejezetben definiált folytonos Markov-lánc $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_u : u \le t\}$ természetes filtrációjára való tekintettel adódik, hogy

$$u(t+s,k) := \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big(u(s,\varphi(\xi_{t+s}))\beta\Big)\big|\mathcal{F}_t\Big].$$

Ebből adódóan a $t > 0$ időpontban az időszerinti differenciálást ugyanúgy lehet elvégezni, mint a $t = 0$ helyen.

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,k) &= \lim_{s\to 0}\frac{u(t+s,k)-u(t,k)}{s}\\ &= \gamma(k)u(t,k) + \lim_{s\to 0}\frac{P^{t+s}\varphi - P^t\varphi}{s}.\end{aligned}$$

Amiből a határátmenet végrehajtásával

$$\partial_t u(t,k) = \gamma(k)u(t,k) + \mathcal{L}u(t,k).$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

4.2. TÉTEL. *A (3) egyenletrendszernek pontosan egy korlátos megoldása létezik.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását [4] tárgyalja. □

5. Végtelen rendszerek stabilitása

A 2. fejezetben már igazoltuk, hogy a véges egyenletrendszerek exponencionálisan stabilak. Azonban azt is láthattuk, hogy a stabilizáló hatás a rendszer méretének a növekedésével gyengül, melynek következtében az ott alkalmazott módszerek nagy rendszerek esetében nem adnak választ a stabilitás kérdésére.

A továbbiakban a végtelen rendszerek egyik nagy osztályát képviselő lineáris rendszerek stabilitás vizsgálatával foglalkozunk. Általánosabb eredmények nemlineáris rendszerekre időfüggő Markov-láncok elméletének alkalmazásával érhetők el, jelenlegi dolgozatunk nem tárgyalja e témakört. Nemlineáris rendszerekre vonatkozó stabilitási tételeket várhatóan e cikk folytatásaként közlünk.

A vizsgált feladat a következő:

$$\partial_t x(t,k) = \sum_{j\neq k}\lambda_k p_{kj}\Big(x(t,j) - x(t,k)\Big) - \gamma(k)x(t,k), \tag{4}$$

ahol

$$\begin{cases}\gamma(k) = 0, & k \neq 0\\ \gamma(k) > 0 & k = 0.\end{cases}$$

Megjegyzés. Ha a fenti lineáris egyenletrendszerben nem szerepel a $\gamma(k)$ függvény, akkor éppen a 3. fejezetben definiált folytonos idejű Markov-lánc *Kolmogorov-egyenletét* kapnánk. Így viszont a Markov-lánchoz rendelt Feynman–Kac-képlethez jutunk, amely természetesen lehetővé teszi a rendszer megoldását és annak kiértékelését is a vizsgált gráfon.

5.1. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen adott egy tetszőleges* $\mathcal{G} = (G, E)$ *összefüggő gráf, ahol* $|G| = \infty$. *Ekkor* $x_0 = x(0, k)$, $k \in G$, *korlátos kezdeti érték feltétele mellett, a (4) egyenletrendszer megoldása a Feynman–Kac-képlet alapján*

$$x(t,k) = \mathbb{E}\left(x(0,\xi_t(k))\exp\left\{-\int_0^t \gamma(\xi_\tau(k))d\tau\right\}\right).$$

5.1. LEMMA. *Ha a vizsgált gráfon a folytonos Markov-lánc rekurrens, akkor*

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\xi_\tau(k))d\tau \longrightarrow +\infty.$$

Bizonyítás. A bizonyítást a második *Borel–Cantelli*-lemmára alapozzuk, mely szerint ha $\sum P(A_k)$ divergens és az A_k események teljesen függetlenek, akkor 1 valószínűséggel végtelen sok A_k következik be.

Tudjuk, hogy folytonos idejű rekurrens Markov-lánc esetében a rendszer biztosan végtelen sokszor visszatér minden olyan állapotba, amelyet egyszer már elfoglalt, valamint, hogy a visszatérések egymástól függetlenek. Valamint, ha egy adott összefüggő gráf egy tetszőleges pontjából indítjuk a Markov-láncot, szintén a Borel–Cantelli-lemmával igazolható, hogy 1 valószínűséggel előbb vagy utóbb eléri a 0 állapotot, ahová azt követően szintén 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér.

Jelölje c_k azt az időtartamot, amelyet a folyamat a 0 állapotban tölt a k-dik visszatérés alkalmával. Legyen C_k az az esemény, hogy $c_k \geq c > 0$. Ekkor

$$\sum_{\tau_k \leq t} P(C_k) \geq \sum_{\tau_k \leq t} e^{-\lambda c_k} = +\infty, \quad \text{ha} \quad t \to +\infty.$$

Következésképpen C_k eseményekből végtelen sok következik be, ahonnan azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\xi_\tau(k))d\tau = \gamma(0)\int_0^{+\infty} d\tau = \gamma(0)\sum_k^{\infty} c_k = +\infty. \qquad \square$$

5.2. LEMMA. *Ha a vizsgált gráfon a folytonos Markov-lánc tranziens, akkor*

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\xi_\tau(k))d\tau < +\infty.$$

Bizonyítás. Ismert, hogy tranziens Markov-folyamat esetében a folyamat csak véges sok alkalommal tér vissza a 0 állapotba. Így az előző lemma bizonyításának alapján most

$$\sum_{k}^{\infty} c_k < +\infty,$$

amiből adódik, hogy

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\xi_\tau(k))d\tau = \gamma(0) \int_0^{+\infty} d\tau = \gamma(0) \sum_k^{\infty} c_k < +\infty. \qquad \square$$

A fenti lemmák közvetlen következménye az alábbi tétel:

5.1. TÉTEL. *Legyen adott egy tetszőleges $\mathcal{G} = (G, E)$ összefüggő gráf, ahol $|G| = \infty$. Ekkor $x_0 = x(0,k)$, $k \in G$, korlátos kezdeti érték feltétele mellett, a (4) egyenletrendszer megoldása rekurrens Markov lánc esetében globálisan stabil.*

Tranziens Markov-lánc esetében a megoldás stabilitása nagyban függ a kezdeti értékektől, ami a következő példákkal illusztrálható. Tegyük fel, hogy az adott összefüggő gráf véges halmazán kívül a függvény kezdeti értéke nulla. Ekkor tranziens esetben is világossá válik a rendszer stabilitása. Ezzel szemben ha a függvény kezdeti értéke a gráf véges halmazán nulla a fennmaradó csúcsokban pedig szigorúan pozitív, a rendszer instabil.

6. Néhány példa, rekurrens és tranziens Markov-láncok

Végezetül három érdekes Markov-lánc rekurrencia tulajdonságát ismertetjük.

6.1. n-dimeziós szimmetrikus bolyongás

A klaszikus n-dimenziós szimmetrikus bolyongás állapottere az n-dimenziós euklideszi tér egész koordinátájú pontjaiból álló rács: azaz a rendszer állapota egy egész számokból álló $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ szám n-es. Szimmetrikus bolyongás esténél minden irányba történő elmozdulás ugyanakkora valószínűséggel következik be.

6.1. TÉTEL. *(Pólya) Az egy- és kétdimenziós szimmetrikus bolyongásban a bolyongó részecske* 1 *valószínűséggel előbb vagy utóbb (tehát végtelen sokszor is) visszatér a kezdeti helyzetbe. Három dimezióban ez a valószínűség kisebb egynél.*

A bizonyítás megtalálható pl. [10]-ben. A bolyongáshoz tartozó egyenletrendszer a következő

$$\partial_t x(t,k) = \sum_{j \neq k} \frac{1}{2n} \Big(x(t,j) - x(t,k) \Big) - \gamma(k) x(t,k).$$

6.2. Sinai-féle bolyongás

Legyen a $p = \{p(k)\}$, $k \in Z$, ahol $0 < p(k) < 1$, C-beli egyenletes eloszlású független valószínűségi változó sorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy a számegyenesen bolyongó részecske $x(n)$ az n pontból $p(n)$ $[1 - p(n)]$ valószínűséggel lép a tőle jobbra [balra] eső szomszédos pontba.

6.2. TÉTEL. *$x(n)$ tranziens, ha $\mathbb{E}\log(1 - p(x))/p(x) \neq 0$. $x(n)$ rekurrens, ha létezik konstans $c > 0$, úgy, hogy $p(k), (1 - p(k)) > c$ és teljesül*

$$\mathbb{E}\log((1 - p(x))/p(x)) = 0.$$

A példa további tárgyalása megtalálható [8]-ban. A Sinai-féle bolyongáshoz rendelt egyenletrendszer a következő

$$\begin{aligned}\partial_t x(t,k) = \lambda_k\big(&p(k)(x(t,k+1) - x(t,k))+\\ &+ (1 - p(k))(x(t,k-1) - x(t,k))\big) - \gamma(k)x(t,k).\end{aligned}$$

6.3. Markov-lánc a számegyenesen

Legyen $X_0 = 0, X_1, X_2, \ldots$ Markov-lánc úgy, hogy

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = i+1|X_n = i) &= 1 - P(X_{n+1} = i-1|X_n = i)\\ &= \begin{cases}1, & i = 0\\ \frac{1}{2} + p_i, & i = 1, 2, \ldots,\end{cases}\end{aligned}$$

ahol $0 \leq p_i \leq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \ldots$. $\{X_n\}$ egy olyan részecske mozgását leíró sorozat, amely 0-ból indulva a nemnegatív egész számokon keresztül nagyobb valószínűséggel távolodik a 0-tól, mint közeledik ahhoz. A feladat akkor válik érdekessé, ha a $\{p_i, i = 1, 2, \ldots\}$ sorozat 0-hoz tart, vagyis ha a 0 pont taszító ereje egyre inkább gyengül, ahogyan a részecske távolodik tőle.

6.3. TÉTEL. *Legyen X_n a fenti átmenetvalószínűségekkel adott Markov-lánc. Ekkor elég nagy i-re teljesül valamelyik a következőkét eset közül:*

1. *$p_i \leq \frac{1}{4i} + O\left(\frac{1}{i^{1+\delta}}\right)$ $\delta > 0$, akkor X_i rekurrens.*
2. *Létezik $\theta > 1$ úgy, hogy $p_i \geq \frac{\theta}{4i}$, akkor X_i tranziens.*

A példa további tárgyalása megtalálható [1]-ben. A Markov-lánchoz rendelt egyenletrendszer $k \neq 0$ esetén

$$\partial_t x(t,k) = \lambda_k\left((1/2 + p_i)(x(t,k+1) + x(t,k-1)) - (1 + 2p_i)x(t,k)\right) - \gamma(k)x(t,k)$$

és

$$\partial_t x(t,0) = \lambda_k\left((x(t,1) + x(t,-1)) - 2x(t,0)\right) - \gamma(0)x(t,0).$$

Hivatkozások

[1] Csáki Endre, Földes Antónia, Révész Pál: *Transient NN random walk on the line*, Preprint: http://front.math.ucdavis.edu/author/A.Foldes.

[2] John G. Kemeny, J. Laurie Snell, Anthony W. Knapp: *Denumerable Markov Chains*, Springer-Verlag, 1976.

[3] Fritz József: *Valószínűségszámítás fizikusoknak*, Preprint: http://www.math.bme.hu/ jofri/JOFRI/OKTAT/index.html, Budapest, 1998.

[4] Kai Lai Chung: *Markov Chains With Stationary Transition Probabilities*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1967.

[5] Ralf Korn, Elke Korn: *Option Pricing and Portfolio Optimization*, American Mathematical Society, 2001.

[6] Rényi Alfréd: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[7] Samuel Karlin, Howard M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*, Gondolat, Budapest, 1985.

[8] Sinai, Ya. G.: *The limit behavior of a one-dimensional random walk in a random environment*, Teor. Veroyatnost i primenen, 1982, no. **2**, 247–258.

[9] Stewart N. Ethier, Thomas G. Kurtz: *Markov Processes. Characterization and Convergence,* Wiley, New York, 1986.

[10] William Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.

(Beérkezett: 2008. április 28.)

LUKIC ANIKÓ
BMGE, Differenciálegyenletek Tanszék
1111 Budapest, Egry József u. 1.
lukity@math.bme.hu

STABILITY THEORY FOR INFINITE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Anikó Lukic

In this paper the stability of infinite linear system of differential equations is concerned. It is supposed there is given a Markov chain on a countable graph associated to the system, and the solution is given by the Feynman-Kac formula. The aim of this research is to show that in case the Markov chain is recurrent, than the linear system of differential equation defined on the same graph is stable. At the end of the paper the transient case is considered too.