Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 351-363.

TERMELÉSI FÜGGVÉNYEK ÉS JELLEMZÉSEIK

NYUL BALÁZS

A közgazdaságtanban fontos szerepet játszó termelési függvények és ezek jellemzőinek ismertetése után a két legfontosabb termelési függvény, a Cobb–Douglas-típusú és az Arrow–Chenery–Minhas–Solow-típusú termelési függvény esetén határozzuk meg ezeket a jellemzőket. Majd kvázilineáris függvények, valamint kváziösszegek segítségével adunk jellemzési tételeket a CD-típusú és az ACMS-típusú termelési függvényekre. A tételek W. Eichhorntól [5], illetve F. Stehlingtől [13] származnak. Az eredeti bizonyításokat egyszerűsítjük, valamint a bennük található hiányosságokat javítjuk és pótoljuk. A bizonyításokban függvényegyenletek megoldására van szükségünk.

Kulcsszavak: termelési függvény, Cobb–Douglas-típusú termelési függvény, Arrow–Chenery–Minhas–Solow-típusú termelési függvény, kvázilineáris függvény, kváziösszeg, függvényegyenlet.

Mathematics Subject Classification 2000: 91B38, 39B22

1. Bevezetés

A termelési függvények fontos szerepet játszanak a közgazdaságtanban, ezen belül is elsősorban a mikroökonómiában. A termelési függvények közgazdaságtani értelemben azt adják meg, hogy a termeléshez szükséges termelési tényezők bizonyos mennyisége esetén – adott technológiai fejlettség mellett – mekkora lehet a termelés maximális kibocsátása.

A dolgozat első részében termelési függvényekkel foglalkozunk, matematikailag definiáljuk ezeket, majd a termelési függvények legfontosabb jellemzőit (átlagtermék, határtermék, parciális volumenrugalmasság, teljes volumenrugalmasság, technikai helyettesítési határráta, helyettesítési rugalmasság) tárgyaljuk, és leírjuk ezek közgazdaságtani jelentését is. Közelebbről a két legfontosabb termelési függvényt, a Cobb–Douglas-típusú és az Arrow–Chenery–Minhas–Solow-típusú termelési függvényt ismertetjük.

A dolgozat második részében a Cobb–Douglas-típusú és az Arrow–Chenery–Minhas–Solow-típusú termelési függvényekre vonatkozó jellemzési tételeket bizonyítunk be. Ezek bizonyításában alapvető szerepet játszanak a függvényegyenletek. A fenti típusú termelési függvényeket a kvázilineáris függvények és a kváziösszegek segítségével jellemezzük. Az eredeti bizonyítások *Wolfgang Eichhorn*tól [5], illetve

*Frank Stehling*től [13] származnak, melyek azonban kissé bonyolultak és néhány hiba, hiányosság is található bennük. A bizonyításokat több helyen leegyszerűsítjük, és kiküszöböljük ezeket a hibákat és hiányosságokat.

2. Termelési függvények

Ebben a részben a termelési függvényeket és azok legismertebb jellemzőit ismertetjük. Ezután bevezetjük a két legismertebb termelési függvénytípust, a Cobb–Douglas-típusú és az Arrow–Minhas–Chenery–Solow-típusú termelési függvényt, amelyekre kiszámoljuk a korábban definiált jellemzőket.

2.1. Termelési függvények tulajdonságai

A dolgozat további részében $n \geq 2$ egész szám.

Definíció. Egy $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ függvényt **termelési függvény**nek nevezünk.

A termelési függvény közgazdaságtani értelemben azt adja meg, hogy az n darab termelési tényező rögzített mennyisége esetén, egységnyi idő alatt mennyi lehet a maximális kibocsátás. Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban néha még további feltételeket is feltesznek a termelési függvény definíciójában. Termelési függvényekkel több könyv is foglalkozik, például [10], [12], [14], [15], [16].

Definíció. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor az $F :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ függvényt **α-adfokú homogén**nek nevezzük, ha minden $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ és $\lambda > 0$ esetén $F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha F(x_1, \ldots, x_n)$. Ha $\alpha = 1$, akkor az F függvényt **homogén**nek nevezzük.

Differenciálható függvények esetén az α-adfokú homogén függvények jellemzését adja a közismert Euler-tétel.

2.1. Tétel. **(Euler)**
Legyen $F :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ differenciálható függvény. Ekkor F akkor és csak akkor α-adfokú homogén függvény, ha minden $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén

$$\partial_1 F(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_1 + \ldots + \partial_n F(x_1, \ldots, x_n) \cdot x_n = \alpha \cdot F(x_1, \ldots, x_n).$$

A továbbiakban a termelési függvények néhány fontos jellemzőjét definiáljuk és megadjuk azok közgazdaságtani jelentését is.

Definíció. Legyen $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ egy termelési függvény. Ekkor

$$AP_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{x_i} \qquad ((x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n)$$

az **i-edik** $(i \in \{1, \ldots, n\})$ **termelési tényező átlagterméke** (average product).

Az i-edik termelési tényező átlagterméke azt adja meg, hogy ezen termelési tényező egy egységére az össztermelésből hány egység jut (a többi termelési tényező változatlansága mellett).

Definíció. Legyen $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ egy differenciálható termelési függvény. Ekkor

$$MP_i(x_1, \ldots, x_n) = \partial_i P(x_1, \ldots, x_n) \qquad ((x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n)$$

az i-**edik** ($i \in \{1, \ldots, n\}$) **termelési tényező határterméke** (marginal product).

Az i-edik termelési tényező határterméke azt adja meg, hogy ezen termelési tényező 1 egységnyi növelésével (a többi termelési tényező változatlansága mellett) hány egységgel változik az összkibocsátás.

Definíció. Legyen $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ egy differenciálható termelési függvény. Ekkor

$$\varepsilon_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{MP_i(x_1, \ldots, x_n)}{AP_i(x_1, \ldots, x_n)} \qquad ((x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n)$$

az i-**edik** ($i \in \{1, \ldots, n\}$) **termelési tényező parciális volumenrugalmassága** (partial elasticity of production).

Az i-edik termelési tényező parciális volumenrugalmassága azt adja meg, hogy ezen termelési tényező mennyiségét 1%-kal megnövelve (a többi termelési tényező változatlansága mellett), hány %-kal változik az összkibocsátás.

Definíció. Legyen $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ egy differenciálható termelési függvény. Ekkor

$$\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varepsilon_n(x_1, \ldots, x_n) \quad ((x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n)$$

a P **termelési függvény teljes volumenrugalmassága** (total elasticity of production).

A termelési függvény teljes volumenrugalmassága azt adja meg, hogy minden termelési tényező mennyiségét 1%-kal megnövelve, körülbelül hány %-kal változik az összkibocsátás.

Euler tételéből következik, hogy egy α-adfokú homogén, differenciálható termelési függvény teljes volumenrugalmassága egyenlő a homogenitás fokával.

Definíció. Legyen $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ egy differenciálható termelési függvény, melyre $\partial_k P(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ és $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén. Ekkor

$$MRTS_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{MP_i(x_1, \ldots, x_n)}{MP_j(x_1, \ldots, x_n)} \qquad ((x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n)$$

az i-**edik termelési tényező** j-**edik** ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$) **termelési tényezőre vonatkozó technikai helyettesítési határrátája** (marginal rate of technical substitution).

Az i-edik termelési tényező j-edik termelési tényezőre vonatkozó technikai helyettesítési határráta azt adja meg, hogy az i-edik termelési tényező mennyiségének 1 egységgel történő növelésével mennyivel kell csökkenteni a j-edik termelési tényező mennyiségét, hogy a megadott termelési szinten maradjunk.

Definíció. Legyen $P :]0,+\infty[^n \longrightarrow]0,+\infty[$ egy kétszer differenciálható termelési függvény, melyre $\partial_k P(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ minden $k \in \{1,\ldots,n\}$ és $(x_1,\ldots,x_n) \in]0,+\infty[^n$ esetén. Ekkor feltéve, hogy a nevezőben levő kifejezés nem egyenlő 0-val,

$$ES_{ij}(x_1,\ldots,x_n) = -\frac{\frac{1}{\partial_i P(x_1,\ldots,x_n)\cdot x_i} + \frac{1}{\partial_j P(x_1,\ldots,x_n)\cdot x_j}}{\frac{\partial_i^2 P(x_1,\ldots,x_n)}{(\partial_i P(x_1,\ldots,x_n))^2} - 2\frac{\partial_i\partial_j P(x_1,\ldots,x_n)}{\partial_i P(x_1,\ldots,x_n)\cdot\partial_j P(x_1,\ldots,x_n)} + \frac{\partial_j^2 P(x_1,\ldots,x_n)}{(\partial_j P(x_1,\ldots,x_n))^2}}$$

$$((x_1,\ldots,x_n) \in]0,+\infty[^n)$$

az **i-edik termelési tényező j-edik** $(i,j \in \{1,\ldots,n\}, i \neq j)$ **termelési tényezőre vonatkozó helyettesítési rugalmassága** (elasticity of substitution).

Az i-edik termelési tényező j-edik termelési tényezőre vonatkozó helyettesítési rugalmassága azt adja meg, hogy adott termelési szinten az i-edik termelési tényező j-edik termelési tényezőre vonatkozó technikai helyettesítési határrátájának 1%-os növelésével, hány %-kal kell növelni a j-edik és az i-edik termelési tényezők felhasznált mennyiségének arányát.

Definíció. Egy $P :]0,+\infty[^n \longrightarrow]0,+\infty[$ kétszer differenciálható termelési függvény teljesíti a **CES-tulajdonság**ot (constant elasticity of substitution), ha minden $(x_1,\ldots,x_n) \in]0,+\infty[^n$ esetén létezik $ES_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$, és valamilyen $c \in \mathbb{R}$-re $ES_{ij}(x_1,\ldots,x_n) = c$ minden $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$ esetén.

2.2. A Cobb–Douglas-típusú termelési függvény

Charles W. Cobb matematikus és *Paul H. Douglas* közgazdász több vizsgálatot végeztek arra vonatkozóan, hogy termelési függvények segítségével hogyan lehet leírni a nemzeti jövedelem megoszlását a munkás- és tőkésosztály között. Ennek eredményeként született meg 1928-ban a Cobb–Douglas-típusú termelési függvény [4].

Definíció. A $P :]0,+\infty[^n \longrightarrow]0,+\infty[$ termelési függvény **Cobb–Douglas-típusú (CD-típusú) termelési függvény**, ha

$$P(x_1,\ldots,x_n) = Cx_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},$$

ahol $C > 0$, $\alpha_1 \neq 0,\ldots,\alpha_n \neq 0$ olyan valós számok, hogy $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

2.2. TÉTEL. **(A CD-típusú termelési függvény tulajdonságai)**

(1) A CD-típusú termelési függvény α-adfokú homogén függvény.

A CD-típusú termelési függvényekre minden $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén

(2) $AP_i(x_1, \dots, x_n) = Cx_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_i^{\alpha_i - 1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$,

(3) $MP_i(x_1, \dots, x_n) = C\alpha_i x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_i^{\alpha_i - 1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$,

(4) $\varepsilon_i(x_1, \dots, x_n) = \alpha_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$,

(5) $\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = \alpha$,

(6) $MRTS_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot \dfrac{x_j}{x_i}$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$,

(7) $ES_{ij}(x_1, \dots, x_n) = 1$ $(i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j)$, *így a CD-típusú termelési függvény teljesíti a CES-tulajdonságot.*

2.3. Az Arrow–Chenery–Minhas–Solow-típusú termelési függvény

Több bírálat is érte a Cobb–Douglas-típusú termelési függvény azon tulajdonságát, hogy helyettesítési rugalmassága 1. Ezt a tulajdonságot bírálták *Kenneth J. Arrow, Hollis B. Chenery, Bagicha S. Minhas* és *Robert M. Solow* [3] közgazdászok is. Számos ország több iparágát vizsgálták, és arra az eredményre jutottak, hogy a helyettesítési rugalmasság legtöbbször különbözik 1-től. Így 1961-ben egy új típusú termelési függvényt vezettek be, mely ugyan állandó helyettesítési rugalmasságú, de ezek a helyettesítési rugalmasságok a különböző iparágakban eltérőek.

Definíció. A $P :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ termelési függvény **Arrow–Chenery–Minhas–Solow-típusú (ACMS-típusú) termelési függvény**, ha

$$P(x_1, \dots, x_n) = (\beta_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + \beta_n x_n^{-\varrho})^{-\frac{\alpha}{\varrho}},$$

ahol $\beta_1 > 0, \dots, \beta_n > 0$, $\alpha \neq 0$ és $\varrho \neq 0$ valós számok.

A L'Hospital-szabály segítségével igazolható, hogy ha $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, akkor az ACMS-típusú termelési függvény $\varrho \to 0$-val vett határértéke létezik és CD-típusú termelési függvény.

2.3. TÉTEL. **(Az ACMS-típusú termelési függvény tulajdonságai)**

(1) Az ACMS-típusú termelési függvény α-adfokú homogén függvény.

Az ACMS-típusú termelési függvényekre minden $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén

(2) $AP_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{(\beta_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + \beta_i x_i^{-\varrho} + \ldots + \beta_n x_n^{-\varrho})^{-\frac{\alpha}{\varrho}}}{x_i}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$,

(3) $MP_i(x_1, \dots, x_n) = \alpha(\beta_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + \beta_i x_i^{-\varrho} + \ldots + \beta_n x_n^{-\varrho})^{-\frac{\alpha}{\varrho} - 1} \beta_i x_i^{-\varrho - 1}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$,

(4) $\varepsilon_i(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\alpha\beta_i x_i^{-\varrho}}{\beta_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + \beta_i x_i^{-\varrho} + \ldots + \beta_n x_n^{-\varrho}}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$,

(5) $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = \alpha$,

(6) $MRTS_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\beta_i}{\beta_j} \cdot \left(\dfrac{x_j}{x_i}\right)^{1+\varrho}$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$,

(7) *$\varrho \neq -1$ esetén $ES_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{1+\varrho}$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$, így ebben az esetben az ACMS-típusú termelési függvény teljesíti a CES-tulajdonságot.*

Megjegyzés. $\varrho = -1$ esetén a helyettesítési rugalmasság definíciójában szereplő tört nevezője 0, így ekkor az ACMS-típusú termelési függvény helyettesítési rugalmassága nincs értelmezve.

3. Jellemzési tételek

A továbbiakban először megoldunk egy függvényegyenletet, amire a későbbi jellemzési tételek bizonyításában lesz szükségünk. Ezután bevezetjük a kvázilinearitás fogalmát, majd definiáljuk a kváziösszeget, és ezek segítségével külön-külön jellemezzük a CD- és ACMS-típusú termelési függvényeket. Az előbbi jellemzési tétel *Wolfgang Eichhorn*tól [5], utóbbi pedig *Frank Stehling*től [13] származik. A két jellemzési tétel itt közölt bizonyítása egyszerűsíti, pontosítja és javítja a szerzők eredeti bizonyításait.

3.1. Egy függvényegyenlet megoldása

A következő tételben szereplő, később szükséges (1) függvényegyenlet megoldása megtalálható [2]-ben (]0, 1] értelmezési tartomány mellett), illetve [5]-ben. A teljesség kedvéért röviden megadjuk a tétel bizonyítását.

3.1. Tétel. *Legyen $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény, és legyenek $r, q :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ függvények, melyekre teljesül, hogy minden $\lambda, x \in]0, +\infty[$ esetén*

$$f(\lambda x) = r(\lambda) f(x) + q(\lambda). \tag{1}$$

Ekkor léteznek olyan $\gamma \neq 0$ és δ valós számok, hogy

$$f(x) = \gamma \ln x + \delta, \quad r(\lambda) = 1, \quad q(\lambda) = \gamma \ln \lambda,$$

vagy léteznek olyan $\gamma \neq 0$, $\varrho \neq 0$ és δ valós számok, hogy

$$f(x) = \gamma x^{-\varrho} + \delta, \quad r(\lambda) = \lambda^{-\varrho}, \quad q(\lambda) = \delta(1 - \lambda^{-\varrho}).$$

Bizonyítás. Ha $x = 1$-et helyettesítünk az (1) függvényegyenletbe, majd ebből kivonjuk (1)-et, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(\lambda) - f(\lambda x) = r(\lambda)(f(1) - f(x)).$$

Legyen $c = f(1)$ és $h :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - c$, ami szigorúan monoton függvény. Az előző egyenlet a most bevezetett jelölésekkel

$$h(\lambda x) = h(\lambda) + r(\lambda)h(x) \tag{2}$$

alakúra hozható. Ebben felcserélhetjük x és λ szerepét, amiből

$$h(x)(r(\lambda) - 1) = h(\lambda)(r(x) - 1) \tag{3}$$

adódik. A továbbiakban a bizonyítást két eset megkülönböztetésével folytatjuk.
1. eset: Ha $r(\lambda) = 1$ minden $\lambda \in]0, +\infty[$ esetén, akkor (2)-ből $h(\lambda x) = h(\lambda) + h(x)$ adódik. Jól ismert, hogy h szigorú monotonitása miatt $h(x) = \gamma \ln x$ ($x \in]0, +\infty[$), ahol $\gamma \neq 0$ valós szám (lásd például [7] Chapter XIII. § 1., [6] Theorem 1.7.1.). Használjuk a $\delta = c$ jelölést. Ekkor $f(x) = \gamma \ln x + \delta$ és (1) alapján $q(\lambda) = \gamma \ln \lambda$.
2. eset: Ha létezik $\lambda_0 \in]0, +\infty[$, hogy $r(\lambda_0) \neq 1$, akkor λ_0-t behelyettesítve (3)-ba, $0 \neq r(\lambda_0) - 1$-gyel osztva, majd a $\gamma = \dfrac{h(\lambda_0)}{r(\lambda_0) - 1}$ jelölést használva

$$h(x) = \gamma(r(x) - 1) \tag{4}$$

adódik. Mivel f szigorúan monoton, ezért $\gamma \neq 0$. Ekkor (4)-et behelyettesítve (2)-be azt kapjuk, hogy $r(\lambda x) = r(\lambda)r(x)$. A (4) egyenlet miatt r szigorúan monoton függvény. Ekkor ugyancsak jól ismert, hogy $r(\lambda) = \lambda^{-\varrho}$ ($\lambda \in]0, +\infty[$), ahol $\varrho \neq 0$ valós szám (lásd például [7] Chapter XIII. § 1., [6] Remark 1.9.23.). Legyen $\delta = -\gamma + c$, amivel ekkor $f(x) = \gamma x^{-\varrho} + \delta$. Mindezekből az (1) egyenletbe való visszahelyettesítéssel adódik, hogy $q(\lambda) = \delta(1 - \lambda^{-\varrho})$. □

3.2. Jellemzés kvázilinearitással

A kvázilineáris függvények már 1947-ben megjelentek [1] a kváziaritmetikai középértékek jellemzésével kapcsolatban.

Definíció. Egy $F :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ függvény **kvázilineáris**, ha létezik $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény, és léteznek olyan $a_1 \neq 0, \ldots, a_n \neq 0, b$ valós számok, hogy minden $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén $a_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n) + b \in f(]0, +\infty[)$ és

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}(a_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n) + b).$$

3.2. Tétel. **(Eichhorn [5])** *Egy $F :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ függvény akkor és csak akkor homogén és kvázilineáris, ha $\alpha = 1$ értékkel vett CD-típusú termelési függvény vagy ACMS-típusú termelési függvény.*

Bizonyítás.

I. Korábban már említettük, hogy az $\alpha = 1$ értékkel vett CD-típusú, illetve ACMS-típusú termelési függvények homogének. Továbbá a CD-típusú termelési függvény kvázilineáris az $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $a_i = \alpha_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, $b = \ln C$ választással. Hasonlóan az $\alpha = 1$ esetben az ACMS-típusú termelési függvény is kvázilineáris, méghozzá $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\varrho}$, $a_i = \beta_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, $b = 0$-val.

II. Legyen F kvázilineáris függvény a definícióbeli jelölésekkel. Mivel F homogén, így f alkalmazásával azt kapjuk, hogy minden $\lambda > 0$ és minden $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén

$$a_1 f(\lambda x_1) + \ldots + a_n f(\lambda x_n) + b = f(\lambda f^{-1}(a_1 f(x_1) + \ldots + a_n f(x_n) + b)).$$

Adott $\lambda > 0$ mellett legyen $F_\lambda : f(]0, +\infty[) \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_\lambda(y) = f(\lambda f^{-1}(y))$, és legyen $y_i = f(x_i)$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Ekkor

$$a_1 F_\lambda(y_1) + \ldots + a_n F_\lambda(y_n) + b = F_\lambda(a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + b). \tag{5}$$

Legyenek $s_1, s_2 \in f(]0, +\infty[)$ rögzítettek, ahol $s_1 \neq s_2$. Az egyenlet mindkét oldalát y_1 szerint integrálva s_1-től s_2-ig

$$\int_{s_1}^{s_2} F_\lambda(a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + b)\, dy_1 =$$

$$= a_1 \int_{s_1}^{s_2} F_\lambda(y_1)\, dy_1 + (s_2 - s_1)(a_2 F_\lambda(y_2) + \ldots + a_n F_\lambda(y_n) + b)$$

adódik. A baloldalon elvégezve a $t = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + b$ helyettesítést, átrendezés után következik, hogy

$$\int_{a_1 s_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + b}^{a_1 s_2 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + b} F_\lambda(t) \frac{1}{a_1}\, dt - a_1 \int_{s_1}^{s_2} F_\lambda(y_1)\, dy_1 -$$

$$- (s_2 - s_1)(a_3 F_\lambda(y_3) + \ldots + a_n F_\lambda(y_n) + b) = (s_2 - s_1) a_2 F_\lambda(y_2).$$

Mivel F_λ folytonos, így $y_2 \mapsto \displaystyle\int_{a_1 s_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + b}^{a_1 s_2 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + b} F_\lambda(t) \frac{1}{a_1}\, dt$ differenciálható, ezért F_λ differenciálható. Az (5) egyenlet mindkét oldalát y_1 szerint deriválva kapjuk, hogy $F'_\lambda(y_1) = F'_\lambda(a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + b)$. Hasonlóan deriválhatjuk y_2 szerint is, amiből $F'_\lambda(y_1) = F'_\lambda(y_2)$, azaz F'_λ konstans függvény. Így létezik $r, q \in \mathbb{R}$, hogy $F_\lambda(y) = ry + q$. Eddig rögzített λ-val dolgoztunk, amitől azonban az r és q értékei függhetnek, ezért $F_\lambda(y) = r(\lambda) y + q(\lambda)$, ahol $r, q :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ függvények. Legyen $x = f^{-1}(y)$, amivel F_λ definíciójából $f(\lambda x) = r(\lambda) f(x) + q(\lambda)$. Ekkor a

3.1. tételből a következő két eset adódik.

1. eset: $f(x) = \gamma \ln x + \delta$, ahol $\gamma \neq 0$, δ valós számok. Ekkor $f^{-1}(y) = e^{\frac{y-\delta}{\gamma}}$. Ebben az esetben F egy CD-típusú termelési függvény, ahol $C = e^{\frac{a_1\delta+\ldots+a_n\delta+b-\delta}{\gamma}}$ és $\alpha_1 = a_1, \ldots, \alpha_n = a_n$. Mivel F homogén CD-típusú termelési függvény, így még $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$-nek is teljesülnie kell, amiből $C = e^{\frac{b}{\gamma}}$.
2. eset: $f(x) = \gamma x^{-\varrho} + \delta$, ahol $\gamma \neq 0$, $\varrho \neq 0$, δ valós számok. Ebben az esetben $f^{-1}(y) = \left(\frac{y-\delta}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{\varrho}}$.

Ekkor belátjuk, hogy $a_i > 0$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Nyilvánvaló, hogy $\gamma > 0$ esetén $f(]0, +\infty[) =]\delta, +\infty[$, míg $\gamma < 0$ esetén $f(]0, +\infty[) =]-\infty, \delta[$. A kvázilinearitás miatt minden $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén

$$a_1(\gamma x_1^{-\varrho} + \delta) + \ldots + a_n(\gamma x_n^{-\varrho} + \delta) + b \in f(]0, +\infty[).$$

Indirekt tegyük fel, hogy például $a_1 < 0$, az $x_2, \ldots, x_n$ értékét pedig tetszőlegesen rögzítsük le. Tartsunk x_1-gyel 0-hoz vagy $+\infty$-hez úgy, hogy $x_1^{-\varrho}$ határértéke $+\infty$ legyen. Ekkor az előző kifejezés határértéke $\gamma > 0$ esetén $-\infty$, $\gamma < 0$ esetén pedig $+\infty$, ami ellentmond a fentieknek.
Ebben az esetben

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \left(a_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + a_n x_n^{-\varrho} + \frac{a_1\delta + \ldots + a_n\delta + b - \delta}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{\varrho}}.$$

Vezessük be a továbbiakban a $Q = \frac{a_1\delta+\ldots+a_n\delta+b-\delta}{\gamma}$ jelölést. Mivel F homogén, így minden $\lambda > 0$ esetén teljesülnie kell, hogy

$$\left(a_1(\lambda x_1)^{-\varrho} + \ldots + a_n(\lambda x_n)^{-\varrho} + Q\right)^{-\frac{1}{\varrho}} = \lambda \left(a_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + a_n x_n^{-\varrho} + Q\right)^{-\frac{1}{\varrho}}.$$

Az egyenlet mindkét oldalának $-\varrho$-adik hatványra emelése után $(1 - \lambda^{-\varrho})Q = 0$ kapható. Mivel $\varrho \neq 0$ és minden $\lambda > 0$-ra teljesül ez az egyenlet, így $Q = 0$, tehát ekkor F egy ACMS-típusú termelési függvény $\alpha = 1$-gyel és $\beta_1 = a_1, \ldots, \beta_n = a_n$-nel, amelyekről már beláttuk, hogy pozitívak. □

3.3. Jellemzés kváziösszegekkel

A kéttagú kváziösszeg fogalma *Aczél János*tól származik, többtagú kváziösszegek is előfordulnak az irodalomban, például a konzisztens aggregációval kapcsolatban [8], [9].

Definíció. Egy $F :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ függvény **kváziösszeg**, ha léteznek $g_i :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ folytonos, szigorúan monoton függvények, és létezik $I \subseteq \mathbb{R}$ pozitív hosszúságú intervallum, $g : I \longrightarrow]0, +\infty[$ folytonos, szigorúan monoton függvény, hogy minden $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén

$g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n) \in I$ és

$$F(x_1, \ldots, x_n) = g(g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n)).$$

A kváziösszeg függvényeket szokták általánosított kvázilineáris függvényeknek is nevezni a következő állítás miatt.

ÁLLÍTÁS. *Minden kvázilineáris függvény kváziösszeg.*

Bizonyítás. Legyen F egy kvázilineáris függvény a korábbi jelölések megtartásával. Legyen ekkor $g_i :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g_i(x) = a_i f(x)$ $(i \in \{1, \ldots, n-1\})$,

$$g_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = a_n f(x) + b,$$
$$g : f(]0, +\infty[) \longrightarrow]0, +\infty[, \quad g(x) = f^{-1}(x).$$

$\square$

3.3. TÉTEL. **(Stehling [13])** *Egy $F :]0, +\infty[^n \longrightarrow]0, +\infty[$ függvény akkor és csak akkor α-adfokú homogén $(\alpha \neq 0)$ és kváziösszeg, ha CD-típusú termelési függvény vagy ACMS-típusú termelési függvény.*

Bizonyítás.

I. A korábban mondottak szerint a CD-típusú, illetve az ACMS-típusú termelési függvények α-adfokú homogén függvények. A CD-típusú termelési függvény kváziösszeg

$$g_i :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_i(x) = \alpha_i \ln x \quad (i \in \{1, \ldots, n-1\}),$$
$$g_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \alpha_n \ln x + \ln C,$$

továbbá $g : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$, $g(x) = e^x$-szel. Továbbá az ACMS-típusú termelési függvény is kváziösszeg $g_i :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g_i(x) = \beta_i x^{-\varrho}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, továbbá $g :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, $g(x) = x^{-\frac{\alpha}{\varrho}}$ választással.

II. Legyen F kváziösszeg a definícióbeli jelölésekkel. Mivel F α-adfokú homogén függvény, így minden $\lambda > 0$ és $(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n$ esetén

$$g(g_1(\lambda x_1) + \ldots + g_n(\lambda x_n)) = \lambda^\alpha g(g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n)). \tag{6}$$

Az egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk g^{-1}-et, és legyen

$$y_i = g_i(x_i) \quad (i \in \{1, \ldots, n\}),$$

továbbá adott $\lambda > 0$ mellett legyen $H_\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $H_\lambda(y) = g^{-1}(\lambda^\alpha g(y))$ és $h_\lambda^{(i)} : g_i(]0, +\infty[) \longrightarrow \mathbb{R}$, $h_\lambda^{(i)}(y) = g_i(\lambda g_i^{-1}(y))$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$h_\lambda^{(1)}(y_1) + \ldots + h_\lambda^{(n)}(y_n) = H_\lambda(y_1 + \ldots + y_n). \tag{7}$$

Legyenek $s_1, s_2 \in g_1(]0, +\infty[)$ rögzítettek, ahol $s_1 \neq s_2$. Az egyenlet mindkét oldalát y_1 szerint s_1-től s_2-ig integrálva

$$\int_{s_1}^{s_2} H_\lambda(y_1 + \ldots + y_n)\, dy_1 = \int_{s_1}^{s_2} h_\lambda^{(1)}(y_1)\, dy_1 + (s_2 - s_1)(h_\lambda^{(2)}(y_2) + \ldots + h_\lambda^{(n)}(y_n))$$

adódik. A baloldalon elvégezve a $t = y_1 + \ldots + y_n$ helyettesítést és átrendezve az egyenletet

$$\int_{s_1+y_2+\ldots+y_n}^{s_2+y_2+\ldots+y_n} H_\lambda(t)\,dt - \int_{s_1}^{s_2} h_\lambda^{(1)}(y_1)\,dy_1 - (s_2-s_1)(h_\lambda^{(3)}(y_3)+\ldots+h_\lambda^{(n)}(y_n)) =$$

$$= (s_2-s_1)h_\lambda^{(2)}(y_2)$$

következik. Mivel H_λ folytonos, így $y_2 \mapsto \int_{s_1+y_2+\ldots+y_n}^{s_2+y_2+\ldots+y_n} H_\lambda(t)\,dt$ differenciálható. Ekkor az előző egyenlet szerint $h_\lambda^{(2)}$ differenciálható. Hasonlóan $h_\lambda^{(i)}$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ differenciálható, így (7) miatt $H_\lambda|\, g_1(]0,+\infty[)+\ldots+g_n(]0,+\infty[)$ is differenciálható. A (7) egyenlet mindkét oldalát y_1 szerint deriválva $H'_\lambda(y_1+\ldots+y_n) = h_\lambda^{(1)'}(y_1)$ adódik. Hasonlóan deriválhatunk y_2 szerint is, amiből $h_\lambda^{(1)'}(y_1) = h_\lambda^{(2)'}(y_2)$ következik, azaz $h_\lambda^{(1)'}$ és $h_\lambda^{(2)'}$ egyenlő értékű konstans függvények. Hasonlóan adódik, hogy $h_\lambda^{(i)'}$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ páronként egyenlő értékű konstans függvények. Tehát léteznek olyan $r, q_1, \ldots, q_n$ valós számok, hogy $h_\lambda^{(i)}(y) = ry + q_i$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$. Eddig rögzített λ-val dolgoztunk, amelytől azonban az $r, q_1, \ldots, q_n$ értékei függhetnek, amiből azt kapjuk, hogy $h_\lambda^{(i)}(y) = r(\lambda)y + q_i(\lambda)$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$, ahol $r, q_1, \ldots, q_n :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ függvények. Legyen $x = g_i^{-1}(y)$. Ekkor $h_\lambda^{(i)}$ definíciójából kapjuk, hogy $g_i(\lambda x) = r(\lambda)g_i(x) + q_i(\lambda)$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$. Mivel minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén az r függvény közös, így a 3.1. tételből az alábbi két eset adódik.

<u>1. eset:</u> $g_i(x) = \gamma_i \ln x + \delta_i$, ahol $\gamma_i \neq 0$, δ_i valós számok $(i \in \{1,\ldots,n\})$. Ekkor $g_i(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$, ezért ebben az esetben $I = \mathbb{R}$. Vezessük be a $\delta = \delta_1 + \ldots + \delta_n$ és $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ jelöléseket. Ekkor a (6) egyenlet alapján

$$g(\gamma_1 \ln x_1 + \ldots + \gamma_n \ln x_n + \gamma \ln \lambda + \delta) = \lambda^\alpha g(\gamma_1 \ln x_1 + \ldots + \gamma_n \ln x_n + \delta)$$

adódik. Ebbe $x_1 = e^{\frac{y-\delta}{\gamma_1}}, x_2 = \ldots = x_n = 1$-et helyettesítve

$$g(y + \gamma \ln \lambda) = \lambda^\alpha g(y) \tag{8}$$

következik. Mivel $g(y) > 0$ és $\alpha \neq 0$, így $\gamma \neq 0$. Helyettesítsünk $y = 0$-t (8)-ba, és használjuk a $d = g(0) > 0$ és az $u = \gamma \ln \lambda$ jelöléseket. Ebből $g(u) = d \cdot e^{\frac{\alpha}{\gamma}u}$. Ekkor tehát F egy CD-típusú termelési függvény, ahol $C = d \cdot e^{\frac{\alpha}{\gamma}\delta} > 0$, $\alpha_i = \dfrac{\alpha}{\gamma}\gamma_i \neq 0$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$, és $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \dfrac{\alpha}{\gamma}\gamma_i = \alpha \neq 0$.

2. eset: $g_i(x) = \gamma_i x^{-\varrho} + \delta_i$, ahol $\gamma_i \neq 0$, $\varrho \neq 0$, δ_i valós számok $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Vezessük be a $\delta = \delta_1 + \ldots + \delta_n$ és $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ jelöléseket. Ekkor (6)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$g(\gamma_1 \cdot (\lambda x_1)^{-\varrho} + \ldots + \gamma_n \cdot (\lambda x_n)^{-\varrho} + \delta) = \lambda^\alpha g(\gamma_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + \gamma_n x_n^{-\varrho} + \delta). \quad (9)$$

Belátjuk, hogy $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ azonos előjelűek. Indirekt tegyük fel, hogy létezik közöttük pozitív és negatív is. Ekkor $v = \gamma_1 x_1^{-\varrho} + \ldots + \gamma_n x_n^{-\varrho}$ minden valós számot felvesz értékként. Ezzel a jelöléssel $g(\lambda^{-\varrho} v + \delta) = \lambda^\alpha g(v + \delta)$, amibe $v = 0$-t írva $g(\delta) > 0$ miatt ellentmondáshoz jutunk.
Ekkor ha $\gamma_i > 0$, akkor $g_i(]0, +\infty[) =]\delta_i, +\infty[$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, ezért $]\delta, +\infty[\subseteq I$. Ha pedig $\gamma_i < 0$, akkor $g_i(]0, +\infty[) =]-\infty, \delta_i[$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, ezért $]-\infty, \delta[\subseteq I$.

Helyettesítsünk (9)-be $x_1 = \ldots = x_n = 1$-et. Ekkor a

$$g(\gamma\lambda^{-\varrho} + \delta) = \lambda^\alpha g(\gamma + \delta) \quad (10)$$

egyenlethez jutunk. Az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy $\gamma \neq 0$.

Használjuk a $d = g(\gamma + \delta) > 0$ és az $u = \gamma\lambda^{-\varrho} + \delta$ jelöléseket. Az u a γ_i-k előjelétől függően bármilyen értéket felvehet $]\delta, +\infty[$ vagy $]-\infty, \delta[$-ból. Ezekkel (10)-ből $g(u) = d\left(\frac{u - \delta}{\gamma}\right)^{-\frac{\alpha}{\varrho}}$ adódik. Ekkor kihasználva, hogy $d > 0$ és $\alpha \neq 0$, következik, hogy F egy ACMS-típusú termelési függvény $\beta_i = d^{-\frac{\varrho}{\alpha}} \frac{\gamma_i}{\gamma}$-val $(i \in \{1, \ldots, n\})$, amelyek a korábban belátottak szerint pozitívak. □

Hivatkozások

[1] J. Aczél: *On mean values*, Bulletin of the American Mathematical Society **54** (1948), 392–400.

[2] J. Aczél, Z. Daróczy: *On Measures of Information and Their Characterizations*, Academic Press, 1975.

[3] K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow: *Capital-labor substitution and economic efficiency*, The Review of Economics and Statistics **43** (1961), 225–250.

[4] C. W. Cobb, P. H. Douglas: *A theory of production*, The American Economic Review **18** (1928), 139–165.

[5] W. Eichhorn: *Characterization of the CES production functions by quasilinearity*, in: Production Theory (W. Eichhorn, R. Henn, O. Opitz and R. W. Shephard eds.), Springer-Verlag, 1974, 21–33.

[6] W. Eichhorn: *Functional Equations in Economics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1978.

[7] M. Kuczma: *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985.

[8] Gy. Maksa: *Solution of generalized bisymmetry type equations without surjectivity assumptions*, Aequationes Mathematicae **57** (1999), 50–74.

[9] Gy. Maksa, E. Nizsalóczki: *Quasi-sums in several variables*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis **22** (2006), 193–207.

[10] N. Gregory Mankiw: *Makroökonómia*, Osiris Kiadó, 2005.

[11] Mátyás A.: *A modern közgazdaságtan története*, Aula Kiadó, 2003.

[12] P. A. Samuelson, W. D. Nordhaus: *Közgazdaságtan*, KJK-KERSZÖV Jogi és Üzleti Kiadó, 2003.

[13] F. Stehling: *Eine neue Charakterisierung der CD- und ACMS-Produktionsfunktionen*, Operations Research-Verfahren **21** (1975), 222–238.

[14] K. Sydsæter, P. I. Hammond: *Matematika közgazdászoknak*, Aula Kiadó, 2006.

[15] H. R. Varian: *Mikroökonómia középfokon*, Akadémiai Kiadó, 2005.

[16] Zalai E.: *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-KERSZÖV Jogi és Üzleti Kiadó, 2000.

(Beérkezett: 2008. május 27.)

NYUL BALÁZS
Debreceni Egyetem
Matematikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12.
nyulbalazs@unideb.hu

PRODUCTION FUNCTIONS AND THEIR CHARACTERIZATIONS

Balázs Nyul

We describe production functions that play an important role in economics, and define some properties of them. We calculate these values for production functions of Cobb-Douglas type and Arrow-Chenery-Minhas-Solow type. Then we give characterization theorems of production functions of CD type and ACMS type using the notion of quasilinear functions and quasisums. The theorems are due to W. Eichhorn [5] and F. Stehling [13]. We simplify the original proofs and correct the defects of them. In the proofs we need to solve functional equations.

Keywords: production function, production function of Cobb-Douglas type, production function of Arrow-Chenery-Minhas-Solow type, quasilinear function, quasisum, functional equation
Mathematics Subject Classification 2000: 91B38, 39B22