Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 289-315.

A SHAPLEY-ÉRTÉK AXIOMATIZÁLÁSAI[1]

PINTÉR MIKLÓS

A Shapley-érték a koalíciós formában adott játékok egyik legismertebb megoldáskoncepciója. Szokás az irodalomban a Shapley-értéket axiomatikusan jellemezni, leírni. Ebben a cikkben a Shapley-érték négy axiomatizációjával foglalkozunk: a Hart és Mas-Colell-féle potenciállal, Shapley eredeti, a van den Brink-féle és a Young-féle karakterizációkkal. A fenti négy axiomatizálás érvényességét vizsgáljuk az átruházható hasznosságú koalíciós formában adott játékok tizenhat játékosztályán. Eredményeinket egy táblázatban foglaljuk össze.

1. Bevezető

A Shapley-érték a koalíciós formában adott átruházható hasznosságú játékokon[2] (a továbbiakban röviden csak játékok) értelmezett megoldási koncepciók egyik legnépszerűbbike. Mind elméletileg, mind az alkalmazások tekintetében széleskörben használt (az alkalmazásokról Moretti és Patrone [11] cikke ad szisztematikus áttekintést, míg konkrét alkalmazásokra magyar nyelven lásd pl. Csóka [4] és Pintér [17] cikkeket).

Ugyanakkor, az alkalmazó szempontjából is fontos annak megértése, hogy valójában mit is jelent a Shapley-érték. Ez a fajta megértés, jellemzés a tárgya a Shapley-érték különböző axiomatizálásainak. Egy axiomatizálás nem más, mint annak megmutatása, hogy valamely rögzített játékosztályon a Shapley-érték ekvivalens bizonyos axiómákkal. Magyarán szólva, az adott játékosztályon a Shapley-érték egyértelműen jellemezhető az adott tulajdonságokkal (axiómák).

Ahogy fent jeleztük, az egyes axiomatizálások csak adott, rögzített játékosztályok mellett igazak. A kérdés az, hogy milyen játékosztályok mellett mely axiomatizálások érvényesek és melyek nem.

Egyes alkalmazások jól ismert, népszerű játékosztályokhoz köthetőek. Csak példa jelleggel: a nemnegatív szubadditív játékok és a költségjátékok osztályai egybeesnek, szintén megegyezik a nemnegatív nulla-normalizált szuperadditív

[1]Köszönet az anonim bírálónak a megjegyzésekért és az észrevételekért. Ez a cikk az Országos Kutatási és Tudományos Alap (OTKA) pályázata és a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János ösztöndíja támogatásával készült.

[2]A magyar nyelvű irodalomban az átváltható hasznosságú játékok elnevezés is elterjedt.

játékok és a megtakarítási játékok osztálya (lásd a fogalmakra pl. Driessen [5]), ill. ugyancsak fennáll az egybeesés a monoton és a feszítő-hálózatjátékok (spanning network games) játékosztályokra (lásd Van Den Nouweland et al. [15]).

Ebben a cikkben a Shapley-érték négy axiomatizálását vizsgáljuk: (1) a Hart és Mas-Colell-féle [9] potenciált, (2) Shapley eredeti [20] axiomatizálását, melyet később Dubey [6], ill. Peleg és Sudhölter [16] tovább finomított, (3) van den Brink [1] megközelítését és (4) Young [22] karakterizációját. A fenti karakterizációkat tizenhat játékosztályon vizsgáljuk (lásd 2.3. definíció).

A Shapley-érték számos egyéb axiomatizálása ismert az irodalomban, többek között Chun [2], [3], Hart és Mas-Colell [9] redukált játékra épülő karakterizációja, Lange és Grabisch [10], Roth [18]. Ebben a cikkben ahelyett, hogy bevezetünk egy új karakterizációt, négy jól ismert karakterizációt vetünk egybe. Véleményünk szerint a választott karakterizációk, a terjedelmi korlátok figyelembe vétele mellett, jól reprezentálják a Shapley-érték különféle axiomatizációit.

Eredményeinket az 1. táblázat tartalmazza. Három elméleti eredményt szeretnénk hangsúlyozni. (1) Az alapjáték fogalma (lásd a 2.6. definíciót) segítségével Shapley eredeti axiomatizálásának érvényességét olyan esetekben is tudjuk vizsgálni (pl. lényeges játékok, lásd a 4.3. következményt), amikor a korábbi fogalmakkal az nem volt lehetséges. Az alapjátékok fogalma előkerül van den Brink megközelítésének tárgyalásakor is. (2) Olyan módon általánosítjuk van den Brink axiomatizációs tételét (lásd 5.1. tétel), hogy lehetővé válik az adott jellemzés érvényességének vizsgálata minden górcső alá vont játékosztályon (lásd az 5.3., 5.4., 5.5. következményeket). (3) Teljesen új bizonyítást adunk a Young-féle axiomatizálásra (lásd a 6.1. tételt), és ezzel az új bizonyítással megmutatjuk, hogy a Young-féle karakterizáció minden, ebben a cikkben tárgyalt játékosztályon érvényes (lásd a 6.2. következményt).

A cikk felépítése a következő. A 2. részben bevezetjük a cikkben használt jelöléseket és alapfogalmakat. A 3., 4., 5. és 6. részek rendre Hart és Mas-Colell, Shapley eredeti, van den Brink és Young axiomatizálásait tárgyalják. Az utolsó rész az összefoglalásé. Egy hosszú bizonyítást az Appendixbe tettünk.

2. Jelölések, alapfogalmak

Jelölések: tetszőleges N halmaz esetén $|N|$ az N halmaz számossága (ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|x|$ jelentése: x abszolút értéke), $\mathcal{P}(N)$ jelöli az N halmaz összes részhalmazainak osztályát. $A \subset B$ jelentése: $A \subseteq B$ és $A \neq B$. Lin (A) az A lineáris burka, hasonlóan cone (A) a legszűkebb konvex kúp ami tartalmazza A-t.

2.1. Definíció. Legyen $N \neq \emptyset$, $|N| < \infty$, és $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $v(\emptyset) = 0$. Ekkor N-t, v-t rendre a játékosok halmazának, ill. átruházható hasznosságú koalíciós formában adott játéknak (ezentúl röviden csak játéknak) nevezzük. Továbbá, $\mathcal{G}^N$ jelöli az N játékoshalmazzal rendelkező játékok osztályát.

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy $\mathcal{G}^N$ és $\mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$ izomorfak. A továbbiakban egy rögzített izomorfizmus[3] mellett feltesszük, hogy $\mathcal{G}^N$ és $\mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$ megegyezik.

2.2. Definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ és $i \in N$ tetszőlegesen rögzített, és $\forall S \subseteq N$-re legyen $v'_i(S) \triangleq v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Ekkor v'_i-t az i játékos v játékbeli határhozzájárulási függvényének nevezzük.

Tehát $v'_i(S)$ az i játékos v játékbeli határhozzájárulása az S koalícióhoz.

2.3. Definíció. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék

- lényeges, ha $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$,
- konvex, ha $\forall S, T \subseteq N$-re $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$,
- szigorúan konvex, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \nsubseteq T$, $T \nsubseteq S$: $v(S) + v(T) < v(S \cup T) + v(S \cap T)$,
- szuperadditív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$: $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$,
- szigorúan szuperadditív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$: $v(S) + v(T) < v(S \cup T)$,
- gyengén-szuperadditív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$, $|S| = 1$: $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$,
- szigorúan gyengén-szuperadditív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$, $|S| = 1$, $T \neq \emptyset$: $v(S) + v(T) < v(S \cup T)$,
- monoton, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \subseteq T$: $v(S) \leq v(T)$,
- szigorúan monoton, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \subset T$: $v(S) < v(T)$,
- additív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$: $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$,
- gyengén-szubadditív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$, $|S| = 1$: $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$,
- szigorúan gyengén-szubadditív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$, $|S| = 1$, $T \neq \emptyset$: $v(S) + v(T) > v(S \cup T)$,
- szubadditív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$: $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$,
- szigorúan szubadditív, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$: $v(S) + v(T) > v(S \cup T)$,
- konkáv, ha $\forall S, T \subseteq N$-re $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)$,
- szigorúan konkáv, ha $\forall S, T \subseteq N$-re, hogy $S \nsubseteq T$, $T \nsubseteq S$: $v(S) + v(T) > v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

---

[3] A rögzített izomorfizmus a következő: vegyünk egy tetszőleges teljes rendezést N-en, tehát feltehetjük, hogy $N = \{1, \ldots, |N|\}$; és $\forall v \in \mathcal{G}^N$-re legyen $v \triangleq (v(\{1\}), \ldots, v(\{|N|\}), v(\{1,2\}), \ldots, v(\{|N|-1, |N|\}), \ldots, v(N)) \in \mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$.

Ebben a cikkben a fent bevezetett játékosztályokra koncentrálunk. A következő, az irodalomban jól ismert eredményt bizonyítás nélkül adjuk közre.

2.1. LEMMA. *A $v \in \mathcal{G}^N$ játék pontosan akkor (szigorúan) konvex / (szigorúan) konkáv, ha $\forall i \in N$-re, $\forall T, Z \subseteq N \setminus \{i\}$-re, hogy $Z \subset T$:*

$$v_i'(Z) \leq v_i'(T)(v_i'(Z) < v_i'(T))/v_i'(Z) \geq v_i'(T)(v_i'(Z) > v_i'(T)).$$

2.4. Definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ játék duálisa az a $\bar{v} \in \mathcal{G}^N$ játék, hogy $\forall S \subseteq N$-re $\bar{v}(S) = v(N) - v(N \setminus S)$.

A következő segédtételben összefoglaljuk a duális játékok néhány nyilvánvaló tulajdonságát.

2.2. LEMMA. *Tekintsük a következő pontokat:*

1. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített, ekkor $\bar{\bar{v}} = v$.*
2. *Egy (szigorúan) konvex játék duálisa (szigorúan) konkáv játék, ill. egy (szigorúan) konkáv játék duálisa (szigorúan) konvex játék.*

2.5. Definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített. $i \sim^v j$ $(i, j \in N)$, ha $\forall S \subseteq N$-re, hogy $i, j \notin S$: $v_i'(S) = v_j'(S)$. Továbbá, ha $S \subseteq N$ olyan, hogy $\forall i, j \in S$-re $i \sim^v j$, akkor azt mondjuk, hogy S ekvivalenciahalmaz a v játékban.

Könnyen látható, hogy tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékra, $\sim^v$ ekvivalenciareláció $N \times N$-en.

2.6. Definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ játék alapjáték, ha $(i, j \notin NP(v)) \Rightarrow (i \sim^v j)$, ahol $NP(v) \mathrel{\mathring{=}} \{k \in N \mid v_k' = 0\}$.

Magyarán szólva, a v játék alapjáték, ha nem nulla játékosai ekvivalensek.

2.7. Definíció. Legyen N, $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$ tetszőlegesen rögzített, és $\forall S \subseteq N$-re

$$u_T(S) \mathrel{\mathring{=}} \begin{cases} 1, & \text{ha } T \subseteq S \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az u_T játékot a T koalíción értelmezett egyetértési játéknak nevezzük.

Világos, hogy minden egyetértési játék alapjáték, de nem minden alapjáték egyetértési játék (pl. tetszőleges T-re, αu_T alapjáték, de nem egyetértési játék $(\alpha \neq 1)$). A következő segédtételben, amit bizonyítás nélkül közlünk, összefoglaljuk az alapjátékok néhány nyilvánvaló tulajdonságát.

2.3. LEMMA. *Tekintsük a következő pontokat:*

1. *Ha $v \in \mathcal{G}^N$ alapjáték, akkor $\forall \alpha \in \mathbb{R}$-re αv szintén alapjáték.*

2. *Tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$-re ha $i \in NP(v)$, akkor $i \in NP(\bar{v})$.*
3. *Tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$-re ha $i \sim^v j$, akkor $i \sim^{\bar{v}} j$.*
4. *Alapjáték duálisa alapjáték.*
5. *Legyen $v \doteq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. Ekkor $\bar{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{v}_i$.*

A következő definícióban a megoldás fogalmát vezetjük be.

2.8. Definíció. A $\psi : A \to \mathbb{R}^N$ függvényt, ahol $A \subseteq \mathcal{G}^N$, az A halmazon értelmezett megoldásnak nevezzük.

A 2.8. definícióból kiderül, hogy ebben a cikkben a megoldás egy pontértékű függvény. Mivel a Shapley-érték pontértékű megoldás, így érthető a pontértékűség megszorítás.

2.9. Definíció. (Shapley [20]) Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített, és $\forall i \in N$-re legyen

$$\phi_i(v) \doteq \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} v'_i(S) \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!}.$$

Ekkor $\phi_i(v)$-t az i játékos v játékbeli Shapley-értékének nevezzük. A továbbiakban jelölje ϕ a Shapley-megoldást.

A következőkben bevezetjük a cikkben tárgyalt axiómákat.

2.10. Definíció. ψ az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ halmazon értelmezett megoldás

- Pareto-optimális (Pareto optimal / PO), ha $\forall v \in A$-ra $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$,
- nulla játékos tulajdonságú (null player property / NP), ha $\forall v \in A$-ra, $\forall i \in N$-re $(v'_i = 0) \Rightarrow (\psi_i(v) = 0)$,
- egyenlően kezelő (equal treatment property / ETP), ha $\forall v \in A$-ra $(i \sim^v j) \Rightarrow (\psi_i(v) = \psi_j(v))$,
- additív (additive / ADD), ha $\forall v, w \in A$-ra, hogy $v + w \in A$: $\psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w)$,
- fair tulajdonságú (fairness property / FP), ha $\forall v, w \in A$-ra $\forall i, j \in N$-re, hogy $v + w \in A$ és $i \sim^w j$: $\psi_i(v + w) - \psi_i(v) = \psi_j(v + w) - \psi_j(v)$,
- egyenlőség monoton (equal marginality property / EMP), ha $\forall v, w \in A$-ra $(v'_i = w'_i) \Rightarrow (\psi_i(v) = \psi_i(w))$.

A következő segédtétel az FP, ill. ETP és ADD tulajdonságok közötti kapcsolatot jellemzi.

2.4. Lemma. *Ha a ψ megoldás ETP és ADD, akkor FP is.*

Bizonyítás. Lásd van den Brink [1] Proposition 2.3. (i) pont 311. old. □

A következő segédtétel, aminek bizonyítását az olvasóra bízzuk, az alapjáték fogalom erejét és értelmét illusztrálja.

2.5. LEMMA. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített alapjáték. A ψ megoldás pontosan akkor PO, NP és ETP, ha $\psi(v) = \phi(v)$.*

A következő eredmény jól ismert az irodalomban, így eltekintünk bizonyításától.

2.1. ÁLLÍTÁS. *A Shapley-megoldás PO, NP, ETP, ADD, FP és EMP.*

3. A potenciál (Hart és Mas-Colell)

Ebben a részben Hart és Mas-Colell [9] potenciálfüggvényen alapuló Shapley-érték karakterizációját tárgyaljuk.

3.1. Definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ és $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor a v játék T-n értelmezett részjátéka $v^T \in \mathcal{G}^T$ a következő: $\forall S \subseteq T$-re

$$v^T(S) = v(S).$$

Világos, hogy v^T-t csak T részhalmazain kell definiálni.

3.2. Definíció. Legyen $A \subseteq \Gamma^N \doteq \bigcup_{T \subseteq N,\ T \neq \emptyset} \mathcal{G}^T$, $P : A \to \mathbb{R}$, és $\forall v \in \mathcal{G}^T \cap A$-ra, $\forall i \in T$-re, hogy $|T| = 1$ vagy $v^{T \setminus \{i\}} \in A$:

$$P_i'(v) \doteq \begin{cases} P(v), & \text{ha } |T| = 1 \\ P(v) - P(v^{T \setminus \{i\}}) & \text{különben.} \end{cases} \tag{1}$$

Továbbá, ha $\forall v \in \mathcal{G}^T \cap A$-ra, hogy $|T| = 1$ vagy $\forall i \in T$-re $v^{T \setminus \{i\}} \in A$:

$$\sum_{i \in T} P_i'(v) = v(T),$$

akkor P-t az A halmazon értelmezett potenciálnak nevezzük.

3.3. Definíció. Az $A \subseteq \Gamma^N$ halmaz részjáték zárt, ha $\forall T \subseteq N$-re, hogy $|T| > 1$, $\forall v \in \mathcal{G}^T \cap A$-ra, $\forall i \in T$-re $v^{T \setminus \{i\}} \in A$.

Mivel nincsen játék játékos nélkül, azaz a játékoshalmaz nemüres, ezért a részjáték fogalmára csak akkor támaszkodunk, ha legalább két játékos van T-ben.

3.1. TÉTEL. *Legyen $A \subseteq \Gamma^N$ egy részjáték zárt játékosztály. Ekkor P az A halmazon értelmezett függvény pontosan akkor potenciál, ha $\forall v \in \mathcal{G}^T \cap A$-ra és $\forall i \in T$-re $P_i'(v) = \phi_i(v)$.*

Bizonyítás. Lásd Peleg és Sudhölter [16] Theorem 8.4.4. (216-217 old.). □

A következőkben a korábban bevezetett játékosztályokat vesszük górcső alá.

3.1. Következmény. *P a (szigorúan) konvex / (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív / (szigorúan) monoton / additív / (szigorúan) gyengén-szubadditív / (szigorúan) szubadditív / (szigorúan) konkáv játékok osztályán értelmezett függvény pontosan akkor potenciál, ha $\forall v \in \mathcal{G}^T$ (szigorúan) konvex / (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív / (szigorúan) monoton / additív / (szigorúan) gyengén-szubadditív / (szigorúan) szubadditív / (szigorúan) konkáv játékra és $\forall i \in T$-re $P'_i(v) = \phi_i(v)$.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a (szigorúan) konvex / (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív / (szigorúan) monoton / additív / (szigorúan) gyengén-szubadditív / (szigorúan) szubadditív / (szigorúan) konkáv játékok osztálya részjáték zárt, tehát alkalmazhatjuk a 3.1. tételt. □

3.2. Következmény. *A lényeges játékok osztályán van olyan P potenciál, hogy $\exists v \in \mathcal{G}^T$ olyan lényeges játék, hogy $\exists i \in T$: $P'_i(v) \neq \phi_i(v)$.*

Bizonyítás. Legyen $N \doteq \{1,2\}$, $v \in \mathcal{G}^N$ egy tetszőleges lényeges játék. Ekkor sem $v^{N\setminus\{1\}}$, sem $v^{N\setminus\{2\}}$ nem lényeges játék. Általában, egy a lényeges játékok osztályán értelmezett potenciál nem jól definiált a két játékossal rendelkező lényeges játékokon. Mivel a potenciál rekurzióval definiált (lásd a 3.2. definíciót), így annak értéke a két játékossal rendelkező lényeges játékon vett értékektől függ. Tehát kontinuum sok potenciál van a lényeges játékok osztályán. □

4. A Shapley-féle jellemzés

Shapley [20] eredeti axiomatizációjával foglalkozunk ebben a részben. A következő tétel az egyre inkább letisztázott, finomított tételek és bizonyítások – Shapley, Dubey [6], Peleg és Sudhölter [16] – sorába illeszkedik.

4.1. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathcal{G}^N$ olyan, hogy $\forall v \in A$-hoz $\exists v_1, \dots, v_k \in A$ alapjáték, hogy*

1. cone $(\{v_i\}_{i=1}^k) \setminus \{0\} \subseteq A$,
2. $v \in$ Lin $(\{v_i\}_{i=1}^k)$.

Ekkor az A-n értelmezett megoldás ψ pontosan akkor PO, NP, ETP és ADD, ha $\psi = \phi$.

Bizonyítás.
Szükséges: Lásd a 2.1. állítást.

Elégséges: Legyen $v \in A$ egy tetszőlegesen rögzített játék, és ψ az A-n értelmezett PO, NP, ETP és ADD megoldás. Ha $v = 0$, akkor a PO és ETP tulajdonságok miatt $\psi(v) = \phi(v)$.

Tegyük fel, hogy $v \neq 0$. A 2. pontból $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hogy

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i .$$

Legyen $Neg \stackrel{\circ}{=} \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid \alpha_i < 0\}$. Az 1. pont miatt

$$\left(- \sum_{i \in Neg} \alpha_i v_i \right) \in A,$$

és

$$\left(\sum_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus Neg} \alpha_i v_i \right) \in A.$$

Továbbá

$$v + \left(- \sum_{i \in Neg} \alpha_i v_i \right) = \sum_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus Neg} \alpha_i v_i .$$

A 2.3., 2.5. segédtételek és ADD miatt

$$\psi \left(- \sum_{i \in Neg} \alpha_i v_i \right) = \phi \left(- \sum_{i \in Neg} \alpha_i v_i \right),$$

és

$$\psi \left(\sum_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus Neg} \alpha_i v_i \right) = \phi \left(\sum_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus Neg} \alpha_i v_i \right),$$

így a 2.1. állítás és az ADD tulajdonság miatt

$$\psi(v) = \phi(v).$$

□

A 4.1. tétel Peleg és Sudhölter tételének egy általánosítása. A két tétel közötti különbség „csak" annyi, hogy míg Peleg és Sudhölter az egyetértési játékok által kifeszített konvex kúppal dolgozik, addig mi tetszőleges alapjátékok által kifeszített kúpot használunk.

4.1. Következmény. *ψ a konvex / szuperadditív / gyengén-szuperadditív / monoton / additív / gyengén-szubadditív / szubadditív / konkáv játékok osztályán értelmezett megoldás pontosan akkor PO, NP, ETP és ADD, ha $\psi = \phi$.*

Bizonyítás. A konvex / szuperadditív / gyengén-szuperadditív / monoton játékok osztálya tartalmazza cone $(\{u_T\}_{T\subseteq N,\ T\neq\emptyset})$-t az egyetértési játékok által kifeszített kúpot. $\{u_T\}_{T\subseteq N,\ T\neq\emptyset}$ bázisa $\mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$-nek (lásd pl. Peleg és Sudhölter Lemma 8.1.4. 203–204 old.), így alkalmazhatjuk a 4.1. tételt.

Az additív játékok osztálya egybeesik Lin $(\{u_T\}_{T\subseteq N,\ |T|=1})$-vel, tehát a 4.1. tétel ebben az esetben is alkalmazható.

A gyengén-szubadditív / szubadditív / konkáv játékok osztálya tartalmazza cone $(\{\bar{u}_T\}_{T\subseteq N,\ T\neq\emptyset})$-t, az egyetértési játékok duálisai által kifeszített konvex kúpot. A 2.3. segédtétel miatt $\{\bar{u}_T\}_{T\subseteq N,\ T\neq\emptyset}$ bázisa $\mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$-nek, tehát a 4.1. tételt alkalmazhatjuk ebben az esetben is. □

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az additív játékok osztályán a PO és NP tulajdonságokból következik ETP, tehát a 4.1. következményt újrafogalmazhatjuk a következő formában:

„ψ az additív játékok osztályán értelmezett megoldás pontosan akkor PO, NP és ADD, ha $\psi = \phi$.”

4.2. KÖVETKEZMÉNY. *A legalább két játékossal rendelkező ($|N| > 1$) szigorúan konvex / szigorúan szuperadditív / szigorúan gyengén-szuperadditív / szigorúan monoton / szigorúan gyengén-szubadditív / szigorúan szubadditív / szigorúan konkáv játékok osztályán van olyan PO, NP, ETP és ADD megoldás ψ, hogy $\psi \neq \phi$.*

Bizonyítás. Legyen $\forall v \in \mathcal{G}^N$ tetszőleges szigorúan konvex / szigorúan szuperadditív / szigorúan gyengén-szuperadditív / szigorúan monoton / szigorúan gyengén-szubadditív / szigorúan szubadditív / szigorúan konkáv játék, és $\forall i \in N$-re legyen $\psi_i(v) \doteq \dfrac{v(N)}{|N|}$ (egalitáriánus megoldás). Világos, hogy $\psi \neq \phi$.

Könnyen látható, hogy ψ rendelkezik az NP (nincsen nulla játékos ezekben „szigorú” játékosztályokban), PO, ETP és ADD tulajdonságokkal. □

Megjegyzés. Világos, hogy ha $|N| = 1$, akkor tetszőleges játék estén a PO tulajdonság egyedül biztosítja, hogy $\psi = \phi$.

Vegyük észre, hogy a 4.1. következmény nem támaszkodik a 4.1. tétel teljes „erejére”. Tulajdonképpen Peleg és Sudhölter eredményének egy „duál verziója” is elég a 4.1. következmény bizonyításához. A következőkben egy olyan eredményt mutatunk be, ami már nem látható be Peleg és Sudhölter tételével, tehát a következő eredmény azt mutatja, hogy az általánosításunk releváns, és új eredményt hoz.

4.3. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $|N| = 2$, akkor van olyan a lényeges játékok osztályán értelmezett PO, NP, ETP és ADD megoldás ψ, hogy $\psi \neq \phi$. Ha azonban $|N| \neq 2$, akkor a PO, NP, ETP és ADD axiómák a lényeges játékok osztályán jellemzik a Shapley-értéket.*

Bizonyítás.

$|N| = 2$: Ebben ez esetben a szigorúan szuperadditív játékok osztálya és a lényeges játékok osztálya egybeesik. Tehát a 4.2. következményből következik az állítás.

$|N| \neq 2$: Feltehetjük, hogy $|N| > 2$. $\forall i \in N$-re legyen

$$v_i(S) \doteq \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{i\} \\ 1, & \text{ha } |S \setminus \{i\}| = 1 \\ |N| & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor v_i-k lényeges alapjátékok ($NP(v_i) = \{i\}$), és tetszőleges $|T| > 1$-re u_T szintén lényeges alapjáték. Továbbá, cone $(\{v_i\}_{i \in N} \cup \{u_T\}_{|T|>1}) \setminus \{0\}$ benne van a lényeges játékok osztályában, és $\{v_i\}_{i \in N} \cup \{u_T\}_{|T|>1}$ bázisa $\mathbb{R}^{2^{|N|}-1}$-nek, így alkalmazhatjuk a 4.1. tételt. □

5. van den Brink jellemzése

Ebben a részben a Shapley-érték van den Brink-féle [1] axiomatizálásával foglalkozunk.

5.1. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztály és ψ az A-n értelmezett megoldás tetszőlegesen rögzített. Azt mondjuk, hogy A passzol ψ-hez, ha $\forall v \in A$-ra, hogy $i, j \in N$, $i \sim^v j$: $\exists w \in A$, hogy $i \sim^w j$, $v + w \in A$ és $\psi_i(w) = \psi_j(w)$.

A következő segédtétel a fent bevezetett fogalom „indoklásának" tekinthető.

5.1. Lemma. *Legyen $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztály és ψ A-n értelmezett megoldás olyan, hogy A passzol ψ-hez. Ekkor, ha ψ FP, akkor ETP is.*

Bizonyítás. Legyen $v, w \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített úgy, ahogy az 5.1. definícióban szerepelnek. Az FP tulajdonságból

$$\psi_i(v + w) - \psi_i(w) = \psi_j(v + w) - \psi_j(w),$$

így $\psi_i(v + w) = \psi_j(v + w)$. FP miatt

$$\psi_i(v + w) - \psi_i(v) = \psi_j(v + w) - \psi_j(v).$$

Ekkor $\psi_i(v + w) = \psi_j(v + w)$-ből következik, hogy

$$\psi_i(v) = \psi_j(v).$$

□

Van den Brink eredménye (Proposition 2.3. (ii) pont 311. old.) közvetlenül következik a fenti segédtételből.

5.1. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen* $A \subseteq \mathcal{G}^N$ *olyan, hogy* $0 \in A$, *és* ψ *az* A*-n értelmezett megoldás* NP *és* FP. *Ekkor* ψ ETP.

Bizonyítás. Legyen $w \triangleq 0$, ekkor NP miatt $\psi(0) = 0$, így A passzol ψ-hez, tehát alkalmazhatjuk az 5.1. segédtételt. □

A következőkben az 5.1. definícióban bevezetett fogalom hasznosságát mutatjuk meg.

5.2. Definíció. Legyen $B \subseteq \mathcal{G}^N$ alapjátékok halmaza tetszőlegesen rögzített. Ha $\forall S \subset N$-re, hogy $|S| = 2$: $\exists v \in B$, hogy $S \subseteq NP(v)$, akkor B-t az alapjátékok ETP-típusú halmazának nevezzük.

Vegyük észre, hogy az egyetértési játékok halmaza, ill. az egyetértési játékok duálisai alkotta halmaz és a 4.3. következményben alkalmazott alapjátékok halmaza legalább négy játékos esetén az alapjátékok ETP-típusú halmazai.

5.2. LEMMA. *Legyen* $B \subseteq \mathcal{G}^N$ *alapjátékok* ETP*-típusú halmaza, és* ψ *a* $\mathrm{cone}\,(B) \setminus \{0\}$ *halmazon értelmezett* NP *megoldás. Ekkor* $\mathrm{cone}\,(B) \setminus \{0\}$ *passzol* ψ*-hez.*

Bizonyítás. Legyen $v \in \mathrm{cone}\,(B) \setminus \{0\}$ olyan, hogy $i \sim^v j$ tetszőlegesen rögzített, $w \in B$ olyan, hogy $\{i, j\} \subseteq NP(w)$. Ekkor $v + w \in \mathrm{cone}\,(B) \setminus \{0\}$, ψ NP, így $\psi_i(w) = \psi_j(w)$. □

Összefoglalva a következő eredményre jutunk.

5.1. ÁLLÍTÁS. *Legyen* $B \subseteq \mathcal{G}^N$ *alapjátékok* ETP*-típusú halmaza, és* ψ $\mathrm{cone}\,(B) \setminus \{0\}$*-n értelmezett* NP *megoldás. Ekkor, ha* ψ FP*, akkor* ETP *is.*

Bizonyítás. Lásd az 5.1. és 5.2. segédtételeket. □

A következőkben egy újabb fontos fogalmat vezetünk be.

5.3. Definíció. Legyen $B \subseteq \mathcal{G}^N$ alapjátékok halmaza tetszőlegesen rögzített. Ha $\forall v \in B$-re, hogy $2 \leq |NP(v)| < |N|$: $\exists i \in NP(v)$ és $\exists j \notin NP(v)$, hogy $v \circ \pi_{ij} \in \mathrm{cone}\,(B) \setminus \{0\}$, ahol $\pi_{ij} : N \to N$ olyan, hogy

$$\pi_{ij}(x) \triangleq \begin{cases} x, & \text{ha } x \notin \{i, j\} \\ i, & \text{ha } x = j \\ j, & \text{ha } x = i \end{cases},$$

akkor B-t az alapjátékok ADD-típusú halmazának nevezzük.

Vegyük észre, hogy az egyetértési játékok halmaza, ill. az egyetértési játékok duálisai alkotta halmaz és a 4.3. következményben alkalmazott alapjátékok halmaza az alapjátékok ADD-típusú halmazai.

A következő segédtétel bizonyítását az olvasóra bízzuk.

5.3. Lemma. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ és $i, j \in N$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor*

$$i \sim^{v+v\circ\pi_{ij}} j.$$

A következő állítás matematikai értelemben a fő eredménye ennek résznek.

5.2. Állítás. *Legyen $B \subseteq \mathcal{G}^N$ alapjátékok ADD-típusú halmaza, és ψ cone $(B) \setminus \{0\}$-n értelmezett olyan PO, FP megoldás, amely tetszőlegesen rögzített az értelmezési tartományában lévő alapjátékokon. Ekkor ψ jóldefiniált, azaz egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Legyen $v \in$ cone $(B) \setminus \{0\}$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $v = \sum_{u\in B} \alpha_u u$, és legyen $I(v) \doteq \{u \in B \mid \alpha_u > 0\}$. $|I(v)|$-n való teljes indukcióval bizonyítunk.

$|I(v)| = 1$: Ekkor $\exists u \in B$, hogy $v = \alpha_u u$, így v alapjáték és $\psi(v)$ jóldefiniált.

$|I(v)| > 1$: Tegyük fel, hogy valamely $1 \leq k < |I(v)|$-re, $\forall A \subseteq I(v)$-re, hogy $|A| \leq k$: $\psi(\sum_{u\in A} \alpha_u u)$ jól definiált. Legyen $C \subseteq I(v)$ olyan tetszőlegesen rögzített halmaz, hogy $|C| = k + 1$, és legyen $z \doteq \sum_{u\in C} \alpha_u u$.

1. eset: $\exists u_1, u_2 \in C$, hogy $\exists i^*, j^* \in N$: $i^* \sim^{u_1} j^*$, de $i^* \nsim^{u_2} j^*$. Ekkor FP, és $z - \alpha_{u_1} u_1, z - \alpha_{u_2} u_2 \in$ cone $(B) \setminus \{0\}$ következtében $\forall i \in N \setminus \{i^*\}$-ra, hogy $i \sim^{\alpha_{u_2} u_2} i^*$:

$$\psi_{i^*}(z) - \psi_{i^*}(z - \alpha_{u_2} u_2) = \psi_i(z) - \psi_i(z - \alpha_{u_2} u_2), \tag{2}$$

és $\forall j \in N \setminus \{j^*\}$-ra, hogy $j \sim^{\alpha_{u_2} u_2} j^*$:

$$\psi_{j^*}(z) - \psi_{j^*}(z - \alpha_{u_2} u_2) = \psi_j(z) - \psi_j(z - \alpha_{u_2} u_2), \tag{3}$$

és

$$\psi_{i^*}(z) - \psi_{i^*}(z - \alpha_{u_1} u_1) = \psi_{j^*}(z) - \psi_{j^*}(z - \alpha_{u_1} u_1). \tag{4}$$

Továbbá, PO miatt

$$\sum_{i\in N} \psi_i(z) = z(N). \tag{5}$$

Az indukciós hipotézis miatt a (2), (3), (4), (5) lineáris egyenletrendszerben $|N|$ ismeretlen ($\psi_i(z)$, $i \in N$) és $|N|$ egyenlet van, és az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Tehát $\psi(z)$ jóldefiniált.

2. eset: $\forall u_1, u_2 \in C$-re $NP(u_1) = NP(u_2)$ vagy $NP(u_1) = \complement NP(u_2)$. Ha $\forall u_1, u_2 \in C$-re $NP(u_1) = NP(u_2)$, akkor z alapjáték, így $\psi(z)$ jóldefiniált.

$\exists u_1, u_2 \in C$, hogy $NP(u_1) = \complement NP(u_2)$. Ha $|N| = 2$, akkor feltehetjük, hogy $C = \{u_1, u_2\}$, így $\exists \beta \in \mathbb{R}$, hogy $u_2 = \beta u_1 \circ \pi_{ij}$, ahol $N = \{i, j\}$. Tehát

$z = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 \beta u_1 \circ \pi_{ij} = m(u_1 + u_1 \circ \pi_{ij}) + (\alpha_1 - m)u_1 + (\alpha_2\beta - m)u_1 \circ \pi_{ij}$, ahol $m = \min\{\alpha_1, \alpha_2\beta\}$. Ekkor az 5.3. segédtétel és az 1. eset miatt $\psi(z)$ jóldefiniált.

Ha $|N| \neq 2$, akkor feltehetjük, hogy $|NP(u_1)| \geq 2$. C két diszjunkt halmazra bontható:

$$U_1 \doteq \{u \in C \mid NP(u) = NP(u_1)\} \quad \text{és} \quad U_2 \doteq C \setminus U_1.$$

cone $(B) \setminus \{0\}$ tartalmazza $\sum_{u \in U_1} \alpha_u u$-t és $\sum_{u \in U_2} \alpha_u u$-t, tehát az indukciós hipotézis miatt

$$\psi\left(\sum_{u \in U_1} \alpha_u u\right) \quad \text{és} \quad \psi\left(\sum_{u \in U_2} \alpha_u u\right)$$

jóldefiniált.

B alapjátékok ADD-típusú halmaza, így $\exists i^* \in NP(u_1)$ és $\exists j^* \notin NP(u_1)$, hogy $u_1 \circ \pi_{i^*j^*} \in$ cone $(B) \setminus \{0\}$. Ekkor z, $\alpha_{u_1} u_1$, $\alpha_{u_2} u_2$, i^*, j^* helyére rendre $z + \alpha_{u_1} u_1 \circ \pi_{i^*j^*}$-t, $\alpha_{u_1}(u_1 + u_1 \circ \pi_{i^*j^*})$-t, $\sum_{u \in U_2} \alpha_u u$-t, i^*-t, j^*-t írhatunk a (2), (3), (4), (5) egyenlőségekben. Így az 5.3. segédtétel, az indukciós hipotézis és az 1. eset miatt, ha $|U_2| = 1$, akkor

$$|I(z + \alpha_{u_1} u_1 \circ \pi_{i^*j^*} - \sum_{u \in U_2} \alpha_u u)| = k + 1,$$

de az 1. esetből

$$\psi\left(z + \alpha_{u_1} u_1 \circ \pi_{i^*j^*} - \sum_{u \in U_2} \alpha_u u\right)$$

jóldefiniált: $\psi(z + \alpha_{u_1} u_1 \circ \pi_{i^*j^*})$ jóldefiniált.

Ekkor z, $z - \alpha_{u_1} u_1$, $\alpha_{u_2} u_2$, i^*, j^* helyére rendre z-t, $z + \alpha_{u_1} u_1 \circ \pi_{i^*j^*}$-t, $\sum_{u \in U_2} \alpha_u u$-t, i'-t, hogy $i' \sim^{u_1} i^*$ és $i' \neq i^*$ tetszőlegesen rögzített ($|NP(u_1)| \geq 2$), j^*-t ($i' \sim^{\alpha_{u_1} u_1 \circ \pi_{i^*j^*}} j^*$) írhatunk a (2), (3), (4), (5) egyenlőségekben, és azt kapjuk, hogy $\psi(z)$ jóldefiniált.

Tehát $\psi(v)$ jóldefiniált. □

5.3. Állítás. *Legyen $B \subseteq \mathcal{G}^N$ alapjátékok ADD-típusú halmaza, és ψ cone $(B) \setminus \{0\}$-n értelmezett PO, NP és ETP megoldás. Ekkor ψ pontosan akkor FP, ha ADD.*

Bizonyítás.

Szükséges: Lásd a 2.4. segédtételt.

Elégséges: A 2.5. segédtétel miatt ψ jóldefiniált a cone $(B) \setminus \{0\}$ halmazbeli alapjátékokon. Az 5.2. állítás következtében ψ jóldefiniált cone $(B) \setminus \{0\}$-n. Ekkor a 2.4. segédtételből, ha ψ ETP és ADD, akkor FP is, így a jóldefiniált ψ ADD. □

A következő tétel – ami van den Brink fő eredményének (Theorem 2.5. 311–315. old.) általánosítása – ennek a résznek a fő eredménye.

5.1. TÉTEL. *Legyen* $A \subseteq \mathcal{G}^N$ *olyan, hogy* $\forall v \in A$*-ra* $\exists B \subseteq A$*, hogy*

1. cone $(B) \setminus \{0\} \subseteq A$,
2. B *alapjátékok* ETP*-típusú halmaza,*
3. B *alapjátékok* ADD*-típusú halmaza,*
4. $\exists w \in A$ *olyan alapjáték, hogy* $NP(w) \subseteq NP(v)$*, és* $v+w \in$ cone $(B)\setminus\{0\}$ *vagy* $v-w \in$ cone $(B) \setminus \{0\}$.

Ekkor az A*-n értelmezett megoldás* ψ *pontosan akkor* PO*,* NP *és* FP*, ha* $\psi = \phi$.

Bizonyítás.
Szükséges: Lásd a 2.1. állítást.
Elégséges: A $v-w \in$ cone $(B)\setminus\{0\}$ esetet bizonyítjuk, a másik eset bizonyítása teljesen analóg módon megy.
$v - w \in$ cone $(B) \setminus \{0\}$, így a 2.1., 5.1., 5.2. és 5.3. állítások miatt

$$\psi(v - w) = \phi(v - w).$$

Legyen $i^* \in \complement NP(v)$ tetszőlegesen rögzített. $NP(w) \subseteq NP(v)$, NP, FP és PO miatt $\forall i \in \complement NP(v) \setminus \{i^*\}$-ra

$$\psi_{i^*}(v) - \phi_{i^*}(v - w) = \psi_i(v) - \phi_i(v - w), \tag{6}$$

$\forall i \in NP(v)$-re

$$\psi_i(v) = 0, \tag{7}$$

és

$$\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N). \tag{8}$$

A (6), (7), (8), (5) lineáris egyenletrendszerben $|N|$ ismeretlen ($\psi_i(v)$, $i \in N$) és $|N|$ egyenlet van, és az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Tehát $\psi(v)$ jóldefiniált, így a 2.1. állítás következtében $\psi(v) = \phi(v)$. □

Vegyük észre, hogy a 4.1. és 5.1. tételek néhány fontos esetben ekvivalensek.

5.2. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen* $B \subseteq \mathcal{G}^N$ *olyan, hogy*

1. B *alapjátékok* ETP*-típusú halmaza,*
2. B *alapjátékok* ADD*-típusú halmaza.*

Továbbá, legyen ψ cone $(B) \setminus \{0\}$*-n értelmezett* PO *és* NP *megoldás. Ekkor* ψ *pontosan akkor* FP*, ha* ETP *és* ADD*.*

Bizonyítás. Lásd a 2.4. segédtételt és az 5.1., 5.3. állításokat. □

A következőkben az ebben a cikkben tárgyalt játékosztályokat vizsgáljuk. (Természetesen a 4.2. következményt követő megjegyzés erre a karakterizációra is érvényes.)

5.3. KÖVETKEZMÉNY. *ψ a konvex / szuperadditív / gyengén-szuperadditív / monoton / additív / gyengén-szubadditív / szubadditív / konkáv játékok osztályán értelmezett megoldás pontosan akkor PO, NP és FP, ha $\psi = \phi$.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $|N| > 1$.

(1) Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített konvex / szuperadditív / gyengén-szuperadditív / monoton játék. Legyen B az egyetértési játékok halmaza,

$$v = \sum_{T \subseteq N,\ T \neq \emptyset} \alpha_T u_T, \qquad \alpha \doteq \max\{-\min_T \alpha_T, 0\}, \qquad w \doteq (\alpha + 1) \sum_{T \subseteq N,\ T \neq \emptyset} u_T.$$

Világos, hogy w konvex alapjáték és $NP(w) = \emptyset$, $v + w \in \text{cone}\,(B) \setminus \{0\}$, B alapjátékok ETP-típusú és ADD-típusú halmaza, a konvex / szuperadditív / gyengén-szuperadditív / monoton játékok osztálya tartalmazza cone $(B) \setminus \{0\}$-t, így alkalmazhatjuk az 5.1. tételt.

(2) Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített additív játék. Legyen

$$B \doteq \{u_T\}_{T \subseteq N,\ |T|=1}, \qquad v = \sum_{T \subseteq N,\ |T|=1} \alpha_T u_T, \qquad \alpha \doteq \max\{-\min_T \alpha_T, 0\},$$
$$w \doteq (\alpha + 1) \sum_{T \subseteq N,\ |T|=1} u_T.$$

Világos, hogy w additív alapjáték és $NP(w) = \emptyset$, $v+w \in \text{cone}\,(B) \setminus \{0\}$, B alapjátékok ETP-típusú és ADD-típusú halmaza, az additív játékok osztálya tartalmazza cone $(B) \setminus \{0\}$-t, így alkalmazhatjuk az 5.1. tételt.

(3) Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített gyengén-szubadditív / szubadditív / konkáv játék. Legyen B az egyetértési játékok duálisai alkotta halmaz,

$$v = \sum_{T \subseteq N,\ T \neq \emptyset} \alpha_T \bar{u}_T, \qquad \alpha \doteq \max\{-\min_T \alpha_T, 0\}, \qquad w \doteq (\alpha + 1) \sum_{T \subseteq N,\ T \neq \emptyset} \bar{u}_T.$$

Világos, hogy w konkáv alapjáték és $NP(w) = \emptyset$, $v + w \in \text{cone}\,(B) \setminus \{0\}$, B alapjátékok ETP-típusú és ADD-típusú halmaza, a gyengén-szubadditív / szubadditív / konkáv játékok osztálya tartalmazza cone $(B) \setminus \{0\}$-t, így alkalmazhatjuk az 5.1. tételt. □

5.4. KÖVETKEZMÉNY. *Van olyan a legalább két játékossal rendelkező ($|N| \geq 2$) szigorúan konvex / szigorúan szuperadditív / szigorúan gyengén-szuperadditív / szigorúan monoton / szigorúan gyengén-szubadditív / szigorúan szubadditív / szigorúan konkáv játékok osztályán értelmezett PO, NP és FP megoldás ψ, hogy $\psi \neq \phi$.*

Bizonyítás. Lásd a 4.2. következményt. □

5.5. Következmény. *Ha $|N| = 2, 3$, akkor van olyan a lényeges játékok osztályán értelmezett PO, NP és FP megoldás ψ, hogy $\psi \neq \phi$. Azonban, ha $|N| \neq 2, 3$, akkor a lényeges játékok osztályán a PO, NP, FP axiómák jellemzik a Shapley-értéket.*

Bizonyítás. Ha $|N| \neq 3$, akkor lásd a 4.3. következményt és az 5.3. következmény bizonyítását.

$|N| = 3$: Tekintsük a 4.3. következménybeli alapjátékokat. Legyen

$$N \doteq \{i_1, i_2, i_3\}, \qquad \psi(v_{i_1}) \doteq (0,3,0), \qquad \psi(v_{i_2}) \doteq \psi(v_{i_3}) \doteq (3,0,0),$$
$$\psi(u_{\{i_1,i_2\}}) \doteq \psi(u_{\{i_1,i_3\}}) \doteq \psi(u_N) \doteq (1,0,0), \quad \psi(u_{\{i_2,i_3\}}) = (0,1,0).$$

Ekkor az 5.2. állítás és az 5.1. tétel bizonyításabeli módszer (5.3. következmény) alkalmazásával ψ egyértelműen kiterjeszthető a három játékossal rendelkező lényeges játékok osztályára. □

Az 5.3., 5.4., 5.5. következmények nagyon hasonlóak a Shapley-féle megközelítésnél kapottakkal: rendre a 4.1., 4.2., 4.3. következményekkel. Tehát a két axiomatizáció meglehetősen hasonlít egymásra.

Megjegyzés. Ha még feltesszük az ETP tulajdonságot is a PO, NP és FP tulajdonságok megtartása mellett, akkor az 5.3. és 5.4. következmények továbbra is igazak maradnak, és az 5.5. következmény a következő képpen változik: „Ha $|N| = 2$, akkor van olyan a lényeges játékok osztályán értelmezett PO, NP, ETP és FP megoldás ψ, hogy $\psi \neq \phi$. Azonban, ha $|N| \neq 2$, akkor a lényeges játékok osztályán a PO, NP, ETP, FP axiómák jellemzik a Shapley-értéket."

6. Young axiomatizációja

Ebben a részben Young [22] axiomatizálását tárgyaljuk. A következő példa a rész fő eredményének – a 6.1. tételnek – gondolatát mutatja be.

6.1. Példa. Legyen $N \doteq \{1, 2, 3\}$ és $v \doteq (0, 0, 0, 3, 1, 2, 3)$. Ekkor v egy szuperadditív, de nem konvex játék, $v'_1 = (0, 0, 3, 1, 0, 0, 1)$, $v'_2 = (0, 3, 0, 2, 0, 2, 0)$, $v'_3 = (0, 1, 2, 0, 0, 0, 0)$ (az első komponens $v'_i(\emptyset)$ stb., az utolsó $v'_i(\{2, 3\})$), így $1 \not\sim^v 2$, $1 \not\sim^v 3$ és $2 \not\sim^v 3$.

Továbbá, legyen ψ egy a $\mathcal{G}^N$-n értelmezett PO, ETP és EMP megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy $\psi_2(v) = \phi_2(v)$.

Rögzítsük az 1 játékost, és válasszuk a 2 játékost másolónak ($w'_2 = v'_2$ lásd később). Ekkor van olyan játék $w \doteq (0, 0, 0, 3, 2, 2, 4)$[4], ahol $w'_1 = (0, 0, 3, 2, 0, 0, 2)$, $w'_2 = v'_2 = (0, 3, 0, 2, 0, 2, 0)$, $w'_3 = (0, 2, 2, 0, 1, 0, 0)$, hogy $1 \sim^w 2$ (ebben az esetben $1 \not\sim^w 3$).

[4]Világos, hogy w nem az egyetlen játék, ahol $w'_2 = v'_2$ és $1 \sim^w 2$.

Most rögzítsük az $\{1,2\}$ halmazt, és legyen a 3 játékos a másoló. Ekkor van olyan játék $z \doteq (0,0,0,2,2,2,3)$, ahol $z'_1 = (0,0,2,2,0,0,1)$, $z'_2 = (0,2,0,2,0,1,0)$, $z'_3 = w'_3 = (0,2,2,0,1,0,0)$, hogy $1 \sim^z 2 \sim^z 3$.

Ekkor PO és ETP következtében $\psi(z) = \phi(z)$. Továbbá, EMP miatt $\psi_3(w) = \phi_3(w)$. Mivel ψ PO és ETP, $1 \sim^w 2$, így $\psi(w) = \phi(w)$.

Megint alkalmazva EMP-t, azt kapjuk, hogy $\psi_2(v) = \phi_2(v)$.

Fontos látni, hogy a fenti példában tetszőleges i játékos esetén meg tudjuk mutatni, hogy $\psi_i = \phi_i$. Magyarán szólva $\psi(v) = \phi(v)$. Egyetlen dologra van csak szükségünk a levezetéshez, arra, hogy ψ legyen értelmezve a v-től a z-be vezető utak mentén (w és z függ a választott játékostól).

6.1. Definíció. Az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ halmaz EMP-zárt, ha $\forall v \in A$-ra, hogy S ekvivalencia halmaz v-ben, és $\forall k \in N \setminus S$-re $\exists w \in A$, hogy $S \cup \{k\}$ ekvivalencia halmaz w-ben és $w'_k = v'_k$.

A következő tétel ennek a résznek a fő eredménye.

6.1. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathcal{G}^N$ olyan, hogy $\forall v \in A$-ra és $\forall k \in N$-re $\exists B \subseteq A$, $\exists w \in A$, és $\forall i \in N \setminus \{k\}$-ra $\exists z(i) \in B$, hogy*

1. *B EMP-zárt,*
2. *$w'_k = v'_k$ és $\forall i \in N \setminus \{k\}$-ra $z(i)'_i = w'_i$.*

Ekkor ψ az A-n értelmezett megoldás pontosan akkor PO, ETP és EMP, ha $\psi = \phi$.

Bizonyítás.

Szükséges: Lásd a 2.1. állítást.

Elégséges: Legyen $v \in A$ tetszőlegesen rögzített, és $n \doteq |N|$. Továbbá, legyen $i_1 \in N$ tetszőlegesen rögzített és $i_2 \in N \setminus \{i_1\}$ szintén tetszőlegesen rögzített. Legyen B a tétel fejrészében meghatározott EMP-zárt halmaz (természetesen B függ v-től és i_1-től), továbbá legyen $z \in B$ tetszőlegesen rögzített.

Mivel B EMP-zárt, így $\exists z(1) \in B$, hogy $z(1)'_{i_2} = z'_{i_2}$ és $\{i_1, i_2\}$ ekvivalencia halmaz $z(1)$-ben. Legyen $i_3 \in N \setminus \{i_1, i_2\}$ tetszőlegesen rögzített.

Mivel B EMP-zárt, így $\exists z(2) \in B$, hogy $z(2)'_{i_3} = z(1)'_{i_3}$ és $\{i_1, i_2, i_3\}$ ekvivalencia halmaz $z(2)$-ben. Legyen $i_4 \in N \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$ tetszőlegesen rögzített.

$\vdots$

Mivel B EMP-zárt, így $\exists z(n-1) \in B$, hogy $z(n-1)'_{i_n} = z(n-2)'_{i_n}$ és $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = N$ ekvivalencia halmaz $z(n-1)$-ben.

ψ PO és ETP, továbbá értelmezve van B-n, így $\psi(z(n-1)) = \phi(z(n-1))$. Ekkor mivel ψ PO, ETP és EMP, és értelmezve van B-n, így

$$\psi(z(n-2)) = \phi(z(n-2)).$$

Mivel $i_{n-1} \in N \setminus \{i_1, \ldots, i_{n-2}\}$ tetszőlegesen rögzített volt, $\{i_1, \ldots, i_{n-2}\}$ ekvivalencia halmaz $z(n-3)$-ban, ψ PO, ETP és EMP, és értelmezve van B-n, így $\psi(z(n-3)) = \phi(z(n-3))$.

$\vdots$

Mivel $i_2 \in N \setminus \{i_1\}$ tetszőlegesen rögzített volt, ψ PO és EMP, és értelmezve van B-n, így $\psi(z) = \phi(z)$.

Legyen $k \doteq i_1$, és w, $z(i)$ a tétel fejrészében meghatározottak. Mivel $\forall i \in N \setminus \{i_1\}$-re $w'_i = z(i)'_i$, $\forall z \in B$-re $\psi(z) = \phi(z)$, ψ PO és EMP, és értelmezve van A-n, így $\psi(w) = \phi(w)$.

$w'_{i_1} = v'_{i_1}$ és ψ EMP, tehát $\psi_{i_1}(v) = \phi_{i_1}(v)$.

i_1 tetszőlegesen rögzített volt, így $\psi(v) = \phi(v)$. □

A következőkben $\mathcal{G}^N$-t vizsgáljuk.

6.1. Lemma. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített. $S \subseteq N$ pontosan akkor ekvivalencia halmaz v-ben, ha $\forall T, Z \subseteq N$-re, hogy $T \setminus S = Z \setminus S$ és $|T| = |Z|$: $v(T) = v(Z)$.*

Bizonyítás. Szükséges: A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Elégséges: Feltehetjük, hogy $T \setminus Z \neq \emptyset$, és legyen $m \doteq |T \setminus Z| = |Z \setminus T|$. Mivel $T \setminus Z \subseteq S$ és $Z \setminus T \subseteq S$, S ekvivalencia halmaz v-ben, így

$$\begin{aligned}
v((T \cap Z) \cup \{l_1\}) &= v(T \cap Z) + v'_{l_1}(T \cap Z) = \\
&= v(T \cap Z) + v'_{q_1}(T \cap Z) = v((T \cap Z) \cup \{q_1\}), \\
&\qquad \text{ahol } l_1 \in T \setminus Z, \text{ és } q_1 \in Z \setminus T \\
v((T \cap Z) \cup \{l_1, l_2\}) &= v((T \cap Z) \cup \{l_1\}) + v'_{l_2}((T \cap Z) \cup \{l_1\}) = \\
&= v((T \cap Z) \cup \{q_1\}) + v'_{q_2}((T \cap Z) \cup \{q_1\}) = \\
&= v((T \cap Z) \cup \{q_1, q_2\}), \\
&\qquad \text{ahol } l_2 \in T \setminus \{Z \cup l_1\}, \text{ és } q_2 \in Z \setminus \{T \cup q_1\} \\
&\;\vdots \\
v((T \cap Z) \cup \{l_1, \ldots, l_m\}) &= v((T \cap Z) \cup \{l_1, \ldots, l_{m-1}\}) + \\
&\quad + v'_{l_m}((T \cap Z) \cup \{l_1, \ldots, l_{m-1}\}) = \\
&= v((T \cap Z) \cup \{q_1, \ldots, q_{m-1}\}) + \\
&\quad + v'_{q_m}((T \cap Z) \cup \{q_1, \ldots, q_{m-1}\}) = \\
&= v((T \cap Z) \cup \{q_1, \ldots, q_m\}), \\
&\qquad \text{ahol } l_m \in T \setminus \{Z \cup \{l_1, \ldots, l_{m-1}\}, \\
&\qquad \text{és } q_m \in Z \setminus \{T \cup \{q_1, \ldots, q_{m-1}\} \\
v(T) &= v((T \cap Z) \cup \{l_1, \ldots, l_m\}) = \\
&= v((T \cap Z) \cup \{q_1, \ldots, q_m\}) = v(Z).
\end{aligned}$$

□

A 6.1. segédtételből közvetlenül következik a következő állítás.

6.1. Következmény. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített, $S \subset N$ ekvivalencia halmaz v-ben, és $k \in N \setminus S$ szintén tetszőlegesen rögzített. Ekkor $\forall T, Z \subseteq N$-re, hogy $T \setminus S = Z \setminus S$ és $|T| = |Z|$: $v'_k(T) = v'_k(Z)$.*

6.2. Lemma. *$\mathcal{G}^N$ EMP-zárt.*

Bizonyítás. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ olyan, hogy $S \subset N$ ekvivalencia halmaz v-ben, és $k \in N \setminus S$ tetszőlegesen rögzített.

Ha $T = \emptyset$, akkor legyen $w(T) \doteq 0$. Ha $T \cap (S \cup \{k\}) = \emptyset$, $T \neq \emptyset$, akkor legyen $w(T)$ tetszőlegesen rögzített. Különben ($T \cap (S \cup \{k\}) \neq \emptyset$), legyen

$$w(T) \doteq w(T \setminus (S \cup \{k\})) + \sum_{i=1}^{m} v'_k((T \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}), \tag{9}$$

ahol $m \doteq |(S \cup \{k\}) \cap T|$, és $l_i \in S \cap T$, $i = 1, \ldots, m-1$. Vegyük észre, hogy a 6.1. következmény miatt

$$\sum_{i=1}^{m} v'_k((T \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\})$$

nem függ $S \cap T$ elemeinek sorrendjétől.

Világos, hogy $w'_k = v'_k$, továbbá, a 6.1. segédtételből $S \cup \{k\}$ ekvivalencia halmaz w-ben. □

A következő segédtétel bizonyítása az Appendixben található.

6.3. Lemma. *A szigorúan konvex / additív / szigorúan konkáv játékok osztálya EMP-zárt.*

A következő segédétel a 6.1. tétel 2. pontjához kötődik.

6.4. Lemma. *Nézzük a következő pontokat:*

1. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített lényeges / konvex / (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív / (szigorúan) monoton játék, és $k \in N$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $\exists w$ lényeges / konvex / (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív / (szigorúan) monoton játék, és $\forall i \in N \setminus \{k\}$-hoz $\exists z(i)$ olyan szigorúan konvex játék, hogy $w'_k = v'_k$ és $\forall i \in N \setminus \{k\}$-ra $z(i)'_i = w'_i$.*
2. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített (szigorúan) gyengén-szubadditív / (szigorúan) szubadditív / konkáv játék, és $k \in N$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $\exists w$ (szigorúan) gyengén-szubadditív / (szigorúan) szubadditív / konkáv játék, és $\forall i \in N \setminus \{k\}$-hoz $\exists z(i)$ olyan szigorúan konkáv játék, hogy $w'_k = v'_k$ és $\forall i \in N \setminus \{k\}$-ra $z(i)'_i = w'_i$.*

Bizonyítás. Az 1. pont: Legyen $M > \max_{T \subset N} \mid v_k'(T) \mid$ tetszőlegesen rögzített. Továbbá, legyen

$$w(T) \doteq 2M|N|3^{|T|},$$

ahol T olyan, hogy $k \notin T$, $T \neq \emptyset$, és legyen $w(\emptyset) \doteq 0$.

Ha $k \in T$, akkor legyen $w(T) \doteq w(T \setminus \{k\}) + v_k'(T \setminus \{k\})$. Könnyen látható, hogy w lényeges / konvex / (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív / (szigorúan) monoton játék és $w_k' = v_k'$. Továbbá, legyen $l \in N \setminus \{k\}$, és $T, Z \subseteq N \setminus \{l\}$, $Z \subset T$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor három eset lehetséges.

$k \in Z$: Ekkor

$$\begin{aligned} w_l'(T) - w_l'(Z) = w(T \cup \{l\}) - w(T) - w(Z \cup l) + w(Z) = \\ = w((T \setminus \{k\}) \cup \{l\}) + w_k'((T \setminus \{k\}) \cup \{l\}) - w(T \setminus \{k\}) - w_k'(T \setminus \{k\}) - \\ - w((Z \setminus \{k\}) \cup \{l\}) - w_k'((Z \setminus \{k\}) \cup \{l\}) + w(Z \setminus \{k\}) + w_k'(Z \setminus \{k\}). \end{aligned}$$

Továbbá,

$$w_k'((T \setminus \{k\}) \cup \{l\}) - w_k'(T \setminus \{k\}) > -2M,$$

és

$$w_k'(Z \setminus \{k\}) - w_k'((Z \setminus \{k\}) \cup \{l\}) > -2M.$$

Összefoglalva a fenti egyenlőtlenségeket

$$\begin{aligned} w_k'((T \setminus \{k\}) \cup \{l\}) - w_k'(T \setminus \{k\}) - \\ - w_k'((Z \setminus \{k\}) \cup \{l\}) + w_k'(Z \setminus \{k\}) > -4M. \end{aligned} \tag{10}$$

Továbbá,

$$w((T \setminus \{k\}) \cup \{l\}) - w(T \setminus \{k\}) = 4M|N|3^{|T|-1},$$

és

$$w((Z \setminus \{k\}) \cup \{l\}) - w(Z \setminus \{k\}) = 4M|N|3^{|Z|-1}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} w((T \setminus \{k\}) \cup \{l\}) - w(T \setminus \{k\}) - w((Z \setminus \{k\}) \cup \{l\}) + w(Z \setminus \{k\}) = \\ = 4M|N|3^{|Z|-1}(3^{|T \setminus Z|} - 1). \end{aligned} \tag{11}$$

Összefoglalva a (10) és (11) egyenlőtlenségeket

$$w_l'(T) - w_l'(Z) > 0.$$

A másik két eset bizonyítását ($k \notin T$ és $k \in T \setminus Z$) az olvasóra bízzuk.

Legyen $i \in N\backslash\{k\}$ tetszőlegesen rögzített. Megismételve a fenti eljárást ($v = w$, $k = i$) megkapjuk $z(i)$-t. Ekkor $z(i)'_i = w'_i$, és $\forall T, Z \subseteq N \setminus \{i\}$-re, hogy $Z \subset T$: $w'_i(T) - w'_i(Z) > 0$, tehát $z(i)$ szigorúan konvex játék.

A 2. pont: A (szigorúan) gyengén-szubadditív / (szigorúan) szubadditív / konkáv játékok osztálya tartalmazza a szigorúan konkáv játékok osztályát. Könnyen látható, hogy vehetjük tetszőleges (szigorúan) gyengén-szubadditív / (szigorúan) szubadditív / konkáv játék duálisát, és alkalmazhatjuk az 1. pontot[5], majd vehetjük az 1. pont által produkált játékok duálisait. □

A 6.4. segédtétel azért fontos, mert nem minden vizsgált játékosztály EMP-zárt.

Megjegyzés. A 6.3. segédtétel bizonyításából látható, hogy a (szigorúan) konvex, (szigorúan) gyengén-szuperadditív, (szigorúan) monoton, additív, (szigorúan) gyengén-szubadditív, (szigorúan) konkáv játékosztályok EMP-zártak. Az a közös ezekben a játékosztályokban, hogy jól jellemezhetőek játékosaik határhozzájárulási függvényeivel. Ez a tulajdonság felelős az EMP-zártságért.

A lényeges, (szigorúan) szuperadditív, (szigorúan) szubadditív játékosztályok azonban nem EMP-zártak.

6.2. Példa. (1) Legyen $v \doteq (0, 0, 10, 50, 0, 0, 20)$, ahol $S \doteq \{1, 2\}$ ekvivalencia halmaz v-ben. v lényeges játék, azonban az egyetlen olyan játék, amiben N ekvivalencia halmaz és $w'_3 = v'_3$ a $(10, 10, 10, 10, 10, 10, -20)$, ami nem lényeges játék.

(2) Legyen $v \doteq (0, 0, 0, 10, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 62, 62, 62, 62, 103)$, ahol $S \doteq \{1, 2, 3\}$ ekvivalencia halmaz v-ben. v szigorúan szuperadditív játék, de az egyetlen olyan játék amelyben N ekvivalencia halmaz és $w'_4 = v'_4$ a $(10, 10, 10, 10, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 72, 72, 72, 72, 113)$, ami nem szuperadditív játék.

(3) Legyen $v \doteq (100, 100, 100, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, ahol $S \doteq \{1, 2, 3\}$ ekvivalencia halmaz v-ben. v szigorúan szubadditív játék, de az egyetlen olyan játék amelyben N ekvivalencia halmaz és $w'_4 = v'_4$ a $(10, 10, 10, 10, -89, -89, -89, -89, -89, -89, -90, -90, -90, -90, -90)$, ami nem szubadditív játék.

Megjegyzés. Ha $|N| \leq 3$, akkor a (szigorúan) szuperadditív, (szigorúan) szubadditív játékosztályok (N a játékosok halmaza) rendre egybeesnek a (szigorúan) gyengén-szuperadditív, (szigorúan) gyengén-szubadditív játékosztályokkal, így EMP-zártak. Továbbá, ha $|N| \leq 2$, akkor a lényeges játékok osztálya egybeesik a szigorúan konvex játékok osztályával, így EMP-zárt.

A fenti eredményeket (6.1. tétel, 6.3., 6.4. segédtételek) összefoglalva a következő eredményt kapjuk.

[5] Fontos látni, hogy tetszőleges (szigorúan) szubadditív / (szigorúan) gyengén-szubadditív játék duálisa nem feltétlenül (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív játék. pl. $v \doteq (4, 4, 4, 4, 4, 4, 7)$ szigorúan szubadditív, de $\bar{v}$ nem gyengén-szuperadditív. Továbbá, tetszőleges (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív játék duálisa nem feltétlenül (szigorúan) szubadditív / (szigorúan) gyengén-szubadditív játék. Pl. $v \doteq (0, 0, 0, 3, 1, 2, 4)$ szigorúan szuperadditív, de $\bar{v}$ nem gyengén-szubadditív.

6.2. Következmény. *ψ a lényeges / (szigorúan) konvex / (szigorúan) szuperadditív / (szigorúan) gyengén-szuperadditív / (szigorúan) monoton / additív / (szigorúan) gyengén-szubadditív / (szigorúan) szubadditív / (szigorúan) konkáv játékok osztályán értelmezett megoldás pontosan akkor PO, ETP és EMP, ha $\psi = \phi$.*

7. Összefoglalás

A 3.1., 3.2., 4.1., 4.2., 4.3., 5.3., 5.4., 5.5., 6.2. következmények és a 4.2. következményt követő megjegyzés összefoglalása az 1. táblázatban látható.

$\surd$ azt jelenti, hogy az adott karakterizáció (oszlop) érvényes az adott játékosztályon (sor). Zárójelek között arra utalunk, aki először kapta meg az adott eredményt. $\emptyset$ azt jelenti, hogy az adott karakterizáció (oszlop) nem érvényes az adott játékosztályon (sor). Végül, szögletes zárójelek között a feltételt adjuk meg, amely mellet az adott jellemzés igaz, pl. $\surd$ $[|N| \neq 2]$ azt jelenti, hogy az adott játékosztályon ha $|N| \neq 2$, akkor érvényes, ha $|N| = 2$, akkor nem érvényes az adott karakterizáció.

8. Appendix

Bizonyítás.[A 6.3. segédtétel bizonyítása] Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ olyan, hogy $S \subset N$ ekvivalencia halmaz v-ben, és $k \in N \setminus S$ tetszőlegesen rögzített. A 6.2. segédtétel bizonyításából látszik, hogy $\exists w \in \mathcal{G}^N$, hogy $S \cup \{k\}$ ekvivalencia halmaz w-ben és $w'_k = v'_k$. Továbbá, $\forall T \subseteq N$-re, hogy $T \cap (S \cup \{k\}) = \emptyset$, $T \neq \emptyset$: $w(T)$ tetszőlegesen rögzített lehet. Tehát az egyetlen dolog, amit meg kell mutatnunk (kivéve az additív játékok triviális esetét), hogy tudunk olyan értékeket rendelni ezekhez a koalíciókhoz, hogy az így kapott w benne legyen a kívánt játékosztályban.

(1) Az additív játékok osztálya: Köztudott, hogy $z \in \mathcal{G}^N$ pontosan akkor additív, ha $\forall i \in N$-re $\exists c_i \in \mathbb{R}$, hogy $\forall T \subseteq N \setminus \{i\}$-re $z'_i(T) = c_i$.
Legyen $c^* \doteq v'_k(\emptyset)$. Továbbá, $\forall T \subseteq N$-re legyen
$$w(T) \doteq c^*|T|.$$
Világos $w'_k = v'_k$, w additív, és N ekvivalencia halmaz w-ben.

(2) A szigorúan konvex játékok osztálya: A $z \in \mathcal{G}^N$ játék pontosan akkor szigorúan konvex, ha $\forall i \in N$-re, $\forall T, Z \subseteq N \setminus \{i\}$-re, hogy $Z \subset T$: $z'_i(Z) < z'_i(T)$ (lásd a 2.1. segédtételt).
Legyen $M > \max\limits_{T \subset N} \mid v'_k(T) \mid$ tetszőlegesen rögzített. Továbbá, legyen
$$w(T) \doteq M|N|3^{|T|}, \tag{12}$$
ahol $T \cap (S \cup \{k\}) = \emptyset$, $T \neq \emptyset$, és legyen $w(\emptyset) \doteq 0$.

	Hart és Mas-Colell [8]	Shapley [20]	van den Brink [1]	Young [22]
lényeges	$\emptyset$	$\surd$ $[\lvert N\rvert \neq 2]$	$\surd$ $[\lvert N\rvert \neq 2,3]$	$\surd$
szigorúan konvex	$\surd$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\surd$
konvex	$\surd$	$\surd$ ([16])	$\surd$	$\surd$
szigorúan szuperadditív	$\surd$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\surd$
szuperadditív	$\surd$	$\surd$ ([20])	$\surd$	$\surd$ ([22])
szigorúan gyengén-szuperadditív	$\surd$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\surd$
gyengén-szuperadditív	$\surd$	$\surd$ ([16])	$\surd$	$\surd$
szigorúan monoton	$\surd$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\surd$
monoton	$\surd$	$\surd$ ([7])	$\surd$	$\surd$
additív	$\surd$	$\surd$ ([16])	$\surd$	$\surd$
gyengén-szubadditív	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
szigorúan gyengén-szubadditív	$\surd$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\surd$
szubadditív	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
szigorúan szubadditív	$\surd$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\surd$
konkáv	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
szigorúan konkáv	$\surd$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\emptyset$ $[\lvert N\rvert > 1]$	$\surd$

1. táblázat. A Shapley-érték axiomatizációi

Legyen $l \in N \setminus (S \cup \{k\})$ tetszőlegesen rögzített, és $T, Z \subseteq N \setminus \{l\}$ olyan, hogy $Z \subset T$. Ekkor (9)-ből

$$\begin{aligned} w'_l(T) &= w(T \cup \{l\}) - w(T) = \\ &= w((T \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) + \\ &+ \sum_{i=1}^{m} w'_{l_i}(((T \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) - \\ &- \ w(T \setminus (S \cup \{k\})) - \sum_{i=1}^{m} w'_{l_i}((T \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} w'_l(Z) &= w(Z \cup \{l\}) - w(Z) = \\ &= w((Z \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} w'_{l_i}(((Z \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) - \\ &- \ w(Z \setminus (S \cup \{k\})) - \sum_{i=1}^{n} w'_{l_i}((Z \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}), \end{aligned}$$

ahol $m \doteq |(S \cup \{k\}) \cap T|$, $n \doteq |(S \cup \{k\}) \cap Z|$, és

$$\begin{aligned} \{l_1, \ldots, l_n\} &\doteq (S \cup \{k\}) \cap Z = (S \cup \{k\}) \cap (Z \cup \{l\}) \subseteq \{l_1, \ldots, l_m\} \doteq \\ &\doteq (S \cup \{k\}) \cap T = (S \cup \{k\}) \cap (T \cup \{l\}). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ha $T \setminus (S \cup \{k\}) = Z \setminus (S \cup \{k\})$, akkor a bizonyítás kész. Tegyük tehát fel, hogy $Z \setminus (S \cup \{k\}) \subset T \setminus (S \cup \{k\})$. Mivel v szigorúan konvex játék és $S \cup \{k\}$ ekvivalencia halmaz w-ben, így $\forall i \leq n$-re

$$\begin{aligned} 2M &> w'_{l_i}(((T \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) - \\ &- \ w'_{l_i}((T \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) > 0, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} 2M &> w'_{l_i}(((Z \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) - \\ &- \ w'_{l_i}((Z \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) > 0, \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} &w'_{l_i}(((T \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) - \\ &- w'_{l_i}((T \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) - \\ &- w'_{l_i}(((Z \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) + \\ &+ w'_{l_i}((Z \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) > -2M. \end{aligned}$$

$n < |N|$, tehát

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} w'_{l_i}(((T \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) - \\ &- \sum_{i=1}^{m} w'_{l_i}((T \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) - \\ &- \sum_{i=1}^{n} w'_{l_i}(((Z \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} w'_{l_i}((Z \setminus (S \cup \{k\})) \cup \{l_1, \ldots, l_{i-1}\}) > -2M|N|.\end{aligned} \tag{13}$$

Ugyanakkor, (12)-ből

$$w((T \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) - w(T \setminus (S \cup \{k\})) = 2M|N|3^{|T \setminus (S \cup \{k\})|},$$

és

$$w((Z \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) - w(Z \setminus (S \cup \{k\})) = 2M|N|3^{|Z \setminus (S \cup \{k\})|},$$

így $Z \subset T$-ből következik, hogy (emlékezzünk $Z \setminus (S \cup \{k\}) \subset T \setminus (S \cup \{k\})$)

$$\begin{aligned}&w((T \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) - w(T \setminus (S \cup \{k\})) - \\ &- w((Z \cup \{l\}) \setminus (S \cup \{k\})) + w(Z \setminus (S \cup \{k\})) = \\ &= 2M|N|3^{|Z \setminus (S \cup \{k\})|}(3^{|(T \setminus Z) \setminus (S \cup \{k\})|} - 1) > 2M|N|.\end{aligned} \tag{14}$$

Összefoglalva a (13) és (14) egyenlőtlenségeket

$$w'_l(T) - w'_l(Z) > 0.$$

$w'_k = v'_k$, v szigorúan konvex, $\forall i \in S \cup \{k\}$-re $i \sim^w k$, továbbá $l \in N \setminus (S \cup \{k\})$ és $T, Z \subseteq N \setminus \{l\}$, $Z \subset T$ tetszőlegesen rögzítettek voltak, így w szigorúan konvex játék.

(3) A szigorúan konkáv játékok osztálya: A $z \in \mathcal{G}^N$ játék pontosan akkor szigorúan konkáv, ha $\forall i \in N$-re, $\forall T, Z \subseteq N \setminus \{i\}$-re, hogy $Z \subset T$: $z'_i(Z) > z'_i(T)$ (lsd. a 2.1. segédtételt).

A 2.2. segédtételből $\bar{v}$ szigorúan konvex játék és S ekvivalencia halmaz $\bar{v}$-ben. Ekkor a (2) pontból $\exists z$ olyan szigorúan konvex játék, hogy $S \cup \{k\}$ ekvivalencia halmaz z-ben, és $z'_k = \bar{v}'_k$. A 2.2. segédtétel miatt $\bar{z}$ szigorúan konkáv játék, és $S \cup \{k\}$ ekvivalencia halmaz z-ben.

Megmutatjuk, hogy $\bar{z}'_k = v'_k$.

$\forall T \subseteq N \setminus \{k\}$-ra

$$\bar{v}'_k(T) = v(N \setminus T) - v(N \setminus (T \cup \{k\})) = v'_k(N \setminus (T \cup \{k\})),$$

így $\forall T \subseteq N \setminus \{k\}$-ra
$$z'_k(T) = v'_k(N \setminus (T \cup \{k\})).$$
Magyarán szólva, $\forall T \subseteq N \setminus \{k\}$-ra
$$z'_k(N \setminus (T \cup \{k\})) = v'_k(N \setminus ((N \setminus (T \cup \{k\})) \cup \{k\})) = v'_k(T).$$
z duálisát véve, $\forall T \subseteq N \setminus \{k\}$-ra
$$\bar{z}'_k(T) = z'_k(N \setminus (T \cup \{k\})),$$
tehát $\forall T \subseteq N$-re
$$\bar{z}'_k(T) = v'_k(T).$$
Végül, legyen $w \mathrel{\hat{=}} \bar{z}$.

□

Hivatkozások

[1] van den Brink R.: *An axiomatization of the Shapley value using a fairness property*, International Journal of Game Theory **30**, 309–319. (2001)

[2] Chun Y.: *A New Axiomatization of the Shapley Value*, Games and Economic Behavior **1**, 119–130. (1989)

[3] Chun Y.: *On the Symmetric and Weighted Shapley Values*, International Journal of Game Theory **20**, 183–190. (1991)

[4] Csóka P.: *Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció*, Közgazdasági Szemle **50**, 855–880. (2003)

[5] Driessen T.: *Cooperative games, sollutions and applications*, Kluwer Academic Press, Boston / Dordrecht / London (1988)

[6] Dubey P.: *On the uniqueness of the Shapley value*, International Journal of Game Theory **4**, 131–139. (1975)

[7] Einy E.: *The Shapley value on some lattices of monotonic games*, Mathematical Social Sciences **15**, 1–10. (1988)

[8] Hart S., Mas-Colell A.: *Potential, value, and consistency*, Econometrica **57**, 589–614. (1989)

[9] Hart S., A. Mas-Colell: *The Potential of the Shapley Value*, The Shapley Value, Roth A. E. (szerkesztő), Cambridge University Press, 127–137. (1988)

[10] Lange F., M. Grabisch: *A recursive solution concept for multichoice games*, Acta Polytechnica Hungarica **5**, 47–57. (2008)

[11] Moretti S., F. Patrone: *Transversality of the Shapley value*, Top **16**, 1–41. (2008)

[12] MOULIN H.: *Axioms of cooperative decision making*, Cambridge University Press (1988)

[13] MYERSON R. B.: *Graphs and cooperation in games*, Mathematics of Operations Research **2**, 225–229. (1977)

[14] NEYMAN A.: *Uniqueness of the Shapley value*, Games and Economic Behavior **1**, 116–118. (1989)

[15] VAN DEN NOUWELAND A., TIJS S., MASCHLER M.: *Monotonic games are spanning network games*, International Journal of Game Theory **21**, 419–427. (1993)

[16] PELEG B., SUDHÖLTER P.: *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Kluwer Academic Publishers, Boston / Dordrecht / London (2003)

[17] PINTÉR M.: *Regressziós játékok*, Szigma **38**, 131–148. (2007)

[18] ROTH A. E.: *The Shapley Value as a von Neumann-Morgenstern Utility*, Econometrica **45**, 657–664. (1977)

[19] ROTH A. E.: *The expected value of playing a game* in A. E. Roth, ed., The Shapley Value, Cambridge University Press, 51–70. (1988)

[20] SHAPLEY L. S.: *A Value for n-Person Games*, Contributions to the Theory of Games Volume II (Annals of Mathematical Studies **28**, editors: Kuhn, H. W. – Tucker, A. W.) 307–317. (1953)

[21] SHAPLEY L. S.: *A Comparison of Power Indices and a Nonsymmetric Generalization*, P-5872, The Rand Corporation, Santa Monica, CA. (1977)

[22] YOUNG H. P.: *Monotonic Solutions of Cooperative Games*, International Journal of Game Theory **14**, 65–72. (1985)

(Beérkezett: 2008. március 19.)

PINTÉR MIKLÓS
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 13–15.
miklos.pinter@uni-corvinus.hu

ON AXIOMATIZATIONS OF THE SHAPLEY VALUE[6]

MIKLÓS PINTÉR

The Shapley value is one of the most popular solution concepts for games in coalitional form. It is usual in the literature to axiomatize the Shapley value. In this paper we consider four axiomatizations of the Shapley value: Hart and Mas-Colell's approach based on potential, Shapley's original, van den Brink's and Young's characterizations. We examine the validity of the above four characterizations on sixteen sub-classes of transferable utility games. We summarize our results in a table.

[6]The author thanks the Hungarian Scientific Research Fund (OTKA) and the János Bolyai Research Scholarship of the Hungarian Academy of Sciences for financial support.