Alkalmazott Matematikai Lapok **26** (2009), 179-191.

A STOKES-FELADAT ÉS A CROUZEIX–VELTE-FELBONTÁS

STOYAN GISBERT

Ebben a cikkben szeretnénk áttekintést adni saját és tanítványaink eredményei felett: a Stokes-rendszerre vonatkozó elsőfajú peremérték feladat esetén olyan diszkretizációkat kutatunk, amelyekre létezik egy 3 altérből álló speciális ortogonális felbontás. Ezzel nemcsak az analitikus megoldásnak egy jellegzetes tulajdonságát őrizzük meg, hanem lényegesen javul a diszkretizált egyenletek iteratív megoldási módszereinek hatékonysága. Más feladatokra is átvihető ez a technika.

1. A fizikai feladat

Az összenyomhatatlan közegek áramlását a következő matematikai modell írja le:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{D}(\vec{u})\vec{u} + \operatorname{grad} p = \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \qquad x \in \Omega \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

$$\vec{u} = 0, \qquad x \in \Gamma, \quad 0 < t \leq T, \tag{3}$$

ahol t az idő, ν a (kinematikus) viszkozitás, $\vec{u}$ a közeg sebesség vektora, a $\mathbf{D}(\vec{u})\vec{u}$ „inerciális tag” olyan vektor, amelynek i-edik komponense $\operatorname{div}(u_i\vec{u})$, továbbá p a (kinematikus) nyomás, $\rho\vec{f}$ a külső erők sűrűségét leíró vektor, és itt ρ a sűrűség. A feladat dimenziója $d = 2, 3$, Ω az áramlási tartomány, amelynek Γ pereméről feltesszük, hogy poligonális és Lipschitz-folytonos.

A fenti (1)–(2) rendszert (összenyomhatatlan) Navier–Stokes-egyenletrendszernek hívjuk, ebből (1) az impulzus megmaradását adja (a konstansnak vett ρ-val való osztása után), és (2) a tömegmegmaradási egyenlet, ugyancsak azután, hogy $\rho = \text{const}$-nak megfelelően egyszerűsítettük.

A (3) peremfeltétel nem az egyetlen lehetséges, ld. Gáspár Csaba cikkét ebben a kötetben. Viszont a 8. pont kivételével minden alábbi eredmény erre az esetre vonatkozik. Fizikailag arról van szó, hogy az Ω áramlási tartomány fala zárt és nem mozog maga, és ehhez a falhoz tapad le a folyadék.

(3)-on kívül még további mellékfeltételek szükségesek: mint kezdetiértéket az $\vec{u}(0,x)$-et egész Ω-ban kell előírni, ezenkívül a nyomás csak egy konstans erejéig van meghatározva: ha p megoldás, akkor $p+c$ is az, tetszőleges c konstanssal.

Ha (1)–(3)-ban csak az időt diszkretizáljuk, azaz szemidiszkretizációt hajtunk végre, akkor jutunk a következő alakra:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}^j}{\tau} - \nu\Delta\vec{u}^j + \operatorname{grad} p^j &= \frac{\vec{u}^{j-1}}{\tau} - \mathbf{D}(\vec{u}^{j-1})\vec{u}^{j-1} + \vec{f}^j, \\ \operatorname{div}\vec{u}^j &= 0, \qquad x \in \Omega, \\ \vec{u}^j &= 0, \qquad x \in \Gamma, \ \ 0 < j \le m, \ \ m = T/\tau, \end{aligned}$$

ahol $\vec{u}^j$ a $t_j := j\tau$ időponthoz tartozó sebesség approximációja. Mint kezdetiértéket az $\vec{u}^0 = \vec{u}(x,0)$-t kell előírni minden $x \in \Omega$-ra. Amit ezután minden j-re meg kell oldani, az már egy Stokes-típusú feladat $\vec{u}^j$ és p^j meghatározására.

Ehhez közel áll a klasszikus Stokes-feladat:

$$-\Delta\vec{u} + \operatorname{grad} p = \vec{f}, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = g, \qquad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$\vec{u} = 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{6}$$

Itt a ν viszkozitást 1-nek vettük; tipikusan $g = 0$. (1)-hez képest eltűnt a $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ (mert most az áramlás nem változik az idővel) és az inerciális tag (mert ez kicsi sebességek és kicsi deriváltjaik mellett másodrendű).

A (4)–(6) rendszer tehát olyan stacionáriusan áramló közeg leírását adja, amelynek sebessége kicsi. Ilyen helyzet mégis gyakorlatilag is érdekes lehet: pl. egy ipari baleset révén a levegőbe jutott szennyeződes leginkább akkor súlyos probléma, ha a szélsebességek kicsik.

(4)–(6)-ból a nyomás egyértelműen meg van határozva, megint csak egy tetszőleges additív konstanst nem számítva. Úgy, mint (1)–(3) esetén, ez arra mutat rá, hogy a feladat szinguláris. A megoldhatósági feltétel megkapható (5) integrálásával, felhasználva (6)-ot :

$$\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{u}\mathrm{d}x = \int_\Gamma \vec{u}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy g-t nem lehet tetszőlegesen megadni, hanem az Ω feletti integrálja nulla kell, hogy legyen. Fizikailag ez a feltétel azt fejezi ki, hogy a zárt falban áramló közeg esetén csak annyi tömeg keletkezhet, amennyi eltűnik: az összmérlegnek nullának kell lennie.

2. A gyenge megoldás

A (4)–(6) feladat úgynevezett gyenge megoldásával foglalkozunk a továbbiakban, amikor is keresett $\vec{u} \in V$, $p \in Q$ a szokásos V, Q Szoboljev-terekkel [8]:

$$V := \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \qquad Q := L_2(\Omega),$$

és legyen

$$L_{2,0}(\Omega) := \left\{ q \in L_2(\Omega), \int_\Omega q(x)\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

Ezek Hilbert-terek, amelyekhez az alábbi ismert skalárszorzatok tartoznak:

$$(\vec{u}, \vec{v})_1 := \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x, \quad \vec{u}, \vec{v} \in V,$$

$$(p, q)_0 := \int_\Omega p(x) q(x) \mathrm{d}x, \quad p, q \in Q,$$

és a következő normák:

$$\|\vec{u}\|_1 := (\vec{u}, \vec{u})_1^{1/2}, \quad \|p\|_0 := (p, p)_0^{1/2}.$$

Ezen jelölések segítségével felírható a következő variációs feladat, amely a gyenge megoldást definiálja (és egyben ez a végeselem módszer alapja is):

Keresett tehát $\vec{u} \in V$, $p \in Q$ úgy, hogy

$$a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) := (\vec{f}, \vec{v})_0 \qquad \text{minden } \vec{v} \in V\text{-re}, \tag{7}$$

$$b(\vec{u}, q) := (g, q)_0 \qquad \text{minden } q \in Q\text{-re}, \tag{8}$$

ahol teljesüljön $\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x = 0$, és

$$a(\vec{u}, \vec{v}) := (\vec{u}, \vec{v})_1 = (-\Delta \vec{u}, \vec{v})_0,$$

$$b(\vec{u}, q) := -(\operatorname{div} \vec{u}, q)_0.$$

Az átmenet (4)–(5)-ből (7)–(8)-ra úgy történik, hogy (4)-et skalárisan megszorozzuk a $\vec{v}$ tesztfüggvénnyel, majd parciálisan integráljuk (figyelembe véve a (6) peremfeltételeket). (5)-öt a q tesztfüggvénnyel szorozzuk meg és integráljuk.

A (7)–(8) variációs feladat megoldása, tehát a gyenge megoldás létezik, ha f, g olyanok, hogy $\vec{v} \to (\vec{f}, \vec{v})_0$, ill. $q \to (g, q)_0$ folytonos lineáris funkcionálokat definiál V-n, ill. Q-n. Pl. ha $\vec{f} \in (L_2(\Omega))^d$, $g \in L_{2,0}(\Omega)$, ld. [8] vagy [22], és mivel a Lipschitz-folytonos Ω esetén teljesül az úgynevezett „inf-sup-feltétel”, ld. 4. pont lent.

Ez a gyenge megoldás akkor egyértelmű, ha a p-vel kapcsolatos konstanst (ld. 1. pont) úgy határozzuk meg, hogy $\int_\Omega p\mathrm{d}x = 0$, azaz ha $p \in L_{2,0}(\Omega)$.

3. A Crouzeix–Velte-felbontás

A vektoranalízis ismert azonossága :

$$-\Delta = -\operatorname{grad}\operatorname{div} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}, \tag{9}$$

vagyis (V-t a V' lineáris funkcionálok terébe képező operátorokkal)

$$A = B + C,$$
$$\text{ahol } A = -\Delta, \quad B = -\operatorname{grad}\operatorname{div}, \quad C = \operatorname{rot}\operatorname{rot},$$

és a homogén Dirichlet-féle peremfeltételek miatt igaz a következő ortogonális felbontás, [4], [23]:

$$\left(H_0^1(\Omega)\right)^d = V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_\beta, \tag{10}$$

ahol az ortogonalitást a $\left(H_0^1(\Omega)\right)^d$ értelmében értjük, míg

$$V_0 := \ker\operatorname{div} = \{w \in V,\ \operatorname{div} w = 0\},$$
$$V_1 := \ker\operatorname{rot} = \{w \in V,\ \operatorname{rot} w = 0\}.$$

Itt a háromdimenziós esetben $\operatorname{rot} w$ a szokásos módon értendő, viszont a kétdimenziós esetben $\operatorname{rot} w$ jelöli a $\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2}$ skalárt, amelyet néhol $\operatorname{curl} w$-ként is jelölnek.

Hogyan függ össze (9) és (10)?
Használjuk a 2. pont jelöléseit és integráljuk parciálisan a (9)-ből következő relációt

$$(\vec{u}, \vec{v})_1 = (-\Delta\vec{u}, \vec{v})_0 = (-\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}, \vec{v})_0 + (\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}, \vec{v})_0.$$

A homogén peremfeltételek miatt ennek eredménye

$$(\vec{u}, \vec{v})_1 = (\operatorname{div}\vec{u}, \operatorname{div}\vec{v})_0 + (\operatorname{rot}\vec{u}, \operatorname{rot}\vec{v})_0. \tag{11}$$

Ha most $\vec{u} \in \ker\operatorname{div}$ és $\vec{v} \in \ker\operatorname{rot}$, akkor az egyenlőség jobb oldala nulla, vagyis $V_0 \perp V_1 = \ker\operatorname{div} \perp \ker\operatorname{rot}$ a V tér skalárszorzatának értelmében. Mind V_0, mind V_1 zárt alterek a V Hilbert-térben, és a $V_0 \oplus V_1$ altér ortogonális kiegészítő altere megint zárt altér V-ben – amit V_β-nak jelöltük.

4. A Schur-komplemens operátor és az inf-sup-feltétel

Legyen megint $A = -\Delta$, és mivel parciális integráció alapján grad adjungáltja $-\operatorname{div}$, írhatjuk a $B = -\operatorname{grad}\operatorname{div}$ operátort szorzatként mint $\tilde{B}^T\tilde{B}$, ahol $\tilde{B} = -\operatorname{div} :\ V \to Q$, $\tilde{B}^T = \operatorname{grad} : Q \to V'$. Akkor a (7)–(8) variációs feladatunk algebrai alakja:

$$\begin{pmatrix} A & \tilde{B}^T \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ g \end{pmatrix}.$$

A Laplace-operátor esetünkben pozitív definit és szimmetrikus (a homogén Dirichlet-féle peremfeltételeknek köszönhetően), így egyértelműen invertálható:

$$\vec{u} = A^{-1}\left(\vec{f} - \tilde{B}^T p\right). \tag{12}$$

Ezt behelyettesítve:

$$g = \tilde{B}A^{-1}\left(\vec{f} - \tilde{B}^T p\right) = \tilde{B}A^{-1}\vec{f} - Sp, \tag{13}$$

ahol

$$S := \tilde{B}A^{-1}\tilde{B}^T \quad \left(= \operatorname{div}(\Delta)_0^{-1}\operatorname{grad}\right) \tag{14}$$

a Stokes-feladat Schur-komplemens operátora. (Itt a 0 index Δ^{-1}-nél a homogén peremfeltételre utal.) Ez az S operátor Q-ban működik és szinguláris, mert minden konstans nyomást a nullára képezi le, de a magteren kívül, $L_{2,0}(\Omega)$-ban egyértelműen és stabil módon invertálható, ha teljesül az „inf-sup"-feltétel:

Van olyan $\beta_0 = \beta_0(\Omega)$ pozitív konstans, amellyel igaz

$$\inf_{0\neq q\in L_{2,0}} \sup_{\vec{v}\in V} \frac{b(\vec{v},q)}{\|\vec{v}\|_1\|q\|_0} \geq \beta_0. \tag{15}$$

Ez a feltétel biztosított, mert Ω Lipschitz-folytonos tartomány.
Érvényes ugyanis Nečas tétele [12]: van olyan $c = c(\Omega)$ konstans, hogy a $-\operatorname{div}\vec{v} = q$ egyenlet adott $q \in L_{2,0}$ esetén olyan $\vec{v} \in V$-vel megoldható, amelyre igaz $\|\vec{v}\|_1 \leq c\|q\|_0$.

Ekkor

$$b(\vec{v},q) = \|q\|_0^2 \quad \text{és} \quad \|\vec{v}\|_1 \leq c\|q\|_0,$$

így

$$\sup_{\vec{v}\in V} \frac{b(\vec{v},q)}{\|\vec{v}\|_1} \geq \frac{1}{c}\|q\|_0, \quad \text{tehát} \quad \beta_0 \geq \frac{1}{c}.$$

Az inf-sup-feltétel a Stokes–Schur-komplemens operátor invertálhatóságát jelenti $L_{2,0}(\Omega)$-ban:

$$\left(\frac{b(\vec{v},q)}{\|\vec{v}\|_1}\right)^2 = \frac{(\tilde{B}\vec{v},q)_0^2}{(A\vec{v},\vec{v})_0} = \frac{(\tilde{B}A^{-1}\tilde{B}^T q,q)_0^2}{(\tilde{B}^T q, A^{-1}\tilde{B}^T q)_0} = (Sq,q)_0,$$

ha $\vec{v} = A^{-1}\tilde{B}^T q$ tetszőleges $0 \neq q \in L_{2,0}(\Omega)$ elemmel, így S pozitív sajátértékeinek alsó korlátja β_0^2 :

$$\beta_0^2 \leq \left(\frac{b(\vec{v},q)}{\|\vec{v}\|_1\|q\|_0}\right)^2 = \frac{(Sq,q)_0}{\|q\|_0^2}.$$

Felső korlátja 1, mivel homogén Dirichlet-féle peremfeltétel esetén (ld. (11)) igaz

$$\|\operatorname{div}\vec{v}\|_0^2 \leq \|\operatorname{div}\vec{v}\|_0^2 + \|\operatorname{rot}\vec{v}\|_0^2 = \|\vec{v}\|_1^2,$$

és innen következik

$$\frac{(Sq,q)_0}{\|q\|_0^2} = \left(\frac{(\operatorname{div}\vec{v},q)_0}{\|\vec{v}\|_1\|q\|_0}\right)^2 \leq \left(\frac{\|\operatorname{div}\vec{v}\|_0}{\|\vec{v}\|_1}\right)^2 \leq 1.$$

A Stokes–Schur-komplemens operátor spektrumáról, és azon belül a legkisebb pozitív $\lambda_1 = \beta_0^2$ sajátértékről, szerezhető részletesebb információ a [23], [9], [7], [11] cikkek alapján. Innen tudható pl., hogy (mindig homogén Dirichlet-féle peremfeltétel esetén) a sajátértékek $[0,1]$-ből valók, hogy a kétdimenziós esetben a spektrum szimmetrikus $1/2$-re (ha λ sajátérték, akkor $1-\lambda$ is az, sőt, ha $\lambda \in (0,1)$, akkor ez egyenlő multiplicitás mellett érvényes). Maga az $1/2$ végtelen multiplicitású sajátérték, mint ahogyan 1 is ilyen. Továbbá, $\lambda_1 \le \frac{1}{2} - \frac{\sin\omega}{2\omega}$, ahol ω a legkisebb belső szög $\le \pi$ a tartomány peremén. A spektrum további tulajdonságait vizsgálják a tartomány peremének függvényében pl. a [26] és [27] cikkek. Amikor a peremen egy π-től különböző belső szög fordul elő, a spektrumnak folytonos része is van.

A háromdimenziós esetnek megfelelő S operátor spektrumáról lényegesen kevesebbet ismerünk, ld. pl. [5] és [23].

Befejezésül arra mutatunk rá, hogy az egyenletek diszkretizációja után a stabilitáshoz fontos a megfelelő *diszkrét* inf-sup feltétel. Ekkor (15)-ben a megfelelő diszkrét terek állnak, és a β_0 pozitív konstans h-tól független, ill. a megfelelő diszkrét S operátor legkisebb pozitív sajátértéke egy h-tól független konstanssal el van választva a nullától. Ezt a diszkrét inf-sup feltételt a diszkrét nyomás- és sebességtér alkalmas választásával lehet biztosítani, a diszkrét feltétel bizonyítása nem egyszerű és a mindenkori alkalmas térkombinációtól függ [2].

5. Az algebrai és a diszkrét Crouzeix–Velte-felbontás

Legyenek most $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit mátrixok, $A = B + C$, de A pozitív definit, úgy hogy (Au, v) skalárszorzat.

Ekkor

$$(Au, v) = (Bu, v) + (Cu, v).$$

Ebből azt látjuk, úgy, mint fent (11)-ből (legyen $u \in \ker B$, $v \in \ker C$ stb.), hogy érvényes (10) algebrai hasonmása, a következő **„algebrai Crouzeix–Velte-felbontás"**:

$$\mathbb{R}^n = \ker B \oplus \ker C \oplus W, \tag{16}$$

ahol az ortogonalitást $(A\cdot, \cdot)$ értelmében értjük.

Ez az ortogonális felbontás jellemezhető sajátértékekkel. Legyen ugyanis

$$\lambda A u = B u \quad (\text{ill. } \mu A v = C v). \tag{17}$$

Ekkor egyrészt $A = B + C$ miatt $\mu_i = 1 - \lambda_i$, másrészt

$$\begin{aligned} \ker B &= \operatorname{span}\left(u^{(i)}, \lambda_i = 0\right), \\ \ker C &= \operatorname{span}\left(u^{(i)}, \lambda_i = 1\right), \\ W &= \operatorname{span}\left(u^{(i)}, \lambda_i \in (0,1)\right). \end{aligned}$$

Összehasonlítva (10)-et és (16)-ot, azt látjuk, hogy a sebességi térben a 0 sajátértékek a divergenciamentes sebességeknek felelnek meg, az 1 sajátértékek a rotációmentes sebességeknek. Tehát ami itt az algebrai esetben szerepel, az az analitikus esetben is érvényes: a (10)-beli alterek indexei erre a sajátértékekkel való jellemzésre utalnak.

A legérdekesebb a harmadik altér, V_β, ill. W, amelynek függvényei se nem divergencia-, se nem rotációmentesek. A [15] dolgozatban egyebek mellett több feltételt adtunk, hogy ez a harmadik altér mikor nem triviális.

A (10) Crouzeix–Velte-felbontásnál ismertebb a Helmholtz–Weyl-felbontás [25], amelynek alakja

$$L_2 = \ker \operatorname{div} \oplus \ker \operatorname{rot} \oplus H.$$

Itt viszont a harmadik tér függvényei divergencia- és rotációmentesek, azaz harmonikusak. A közös tulajdonság az, hogy mindkét harmadik tér „peremeffektusokkal" kapcsolatos: egy harmonikus függvény már peremértékeivel definiált, és a V_β tér elemei biharmonikusok és a Neumann-peremértékeivel definiáltak [15] (míg Dirichlet-peremértékei homogének $V_\beta \subset V$-nek megfelelően).

Amennyiben a fenti B mátrix felbontható $B = \tilde{B}^T\tilde{B}$ alakban, akkor a $p = \tilde{B}u$ transzformációval (17)-ből nyerhetjük az $S := \tilde{B}A^{-1}\tilde{B}^T$ algebrai Stokes–Schur-komplemens operátorra (vö. (14)-gyel) vonatkozó

$$\lambda p = Sp$$

sajátérték feladatot, és ezalatt a transzformáció alatt csak a nulla sajátérték multiplicitása változhat – maguk a sajátértékek nem. Ez a (4)–(6) feladat bizonyos megfelelő diszkretizációihoz tartozó S operátorra azt jelenti, hogy a nyomás végeselem terében az 1 sajátérték multiplicitása magas, a nulla sajátérték multiplicitása 1. Közben az 1, ill. 0 sajátértékhez (17) révén tartozó sebességek a végeselem térben rotációmentesek, ill. divergenciamentesek.

Az algebrai Crouzeix–Velte-felbontás alapján meg lehet mutatni, hogy valóban vannak olyan differencia [13], [6], véges térfogat [20], [21] és végeselem approximációi [6], [15], [18], [19], [1] a Stokes-feladatnak, ahol az összes feltétel ($A = B + C$, A a $-\Delta$ operátornak megfelelő mátrix, tehát szimmetrikus és pozitív definit stb.) érvényes, így **diszkrét Crouzeix–Velte-felbontás**ról is lehet beszélni.

Emellett a kétdimenziós esetnek olyan bevált diszkretizációi is vannak, mint [3], amelyeknek nincsen olyan 3 alteres felbontásuk, amelyben a rotáció-, ill. divergenciamentes sebességek 1-1 alteret alkotnának, közben a hozzátartozó S mátrix spektruma nem $[0,1]$-ben van – mint az analitikus esetben –, hanem $[0,2)$-ben (sőt: $h \to 0$ esetén vannak 2-höz tartó sajátértékek) és magas multiplicitású sajátérték nincsen.

6. Iterációs módszerek a diszkrét Stokes-feladat megoldására

Az algebrai Crouzeix–Velte-felbontás megléte nemcsak szép matematikailag, hanem a numerikus megoldás során előnyös, mint ahogyan igazoltuk [14]-ben az

Uzawa, Arrow–Hurwitz és a konjugált gradiens módszerekre: gyorsabb konvergenciára ad lehetőséget és az Uzawa-, valamint az Arrow–Hurwitz-algoritmusok esetén optimális iterációs paraméterekre. (Speciális esetben, az egységnégyzetben megfogalmazott Stokes-feladat „staggered grid” approximációja esetén, ilyen lehetőséget már [10]-ben is vizsgálták.)

Példaként az Uzawa-iterációt említjük, amely a (12)–(14) egyenletek diszkrétizált verziójából jön létre:

$$\begin{aligned} &p_0 \text{ adott}, \quad k = 0, 1, \ldots\text{-ra:}\\ &\vec{u}_k = A^{-1}(\vec{f} - \tilde{B}^T p_k),\\ &p_{k+1} = p_k + \omega(\tilde{B}\vec{u}_k - g), \end{aligned}$$

ahol ω az iterációs paraméter.

Ez az ún. egyszerű iteráció a (diszkrét) nyomás-térbeli (13) egyenlet megoldására, ugyanis a második sort a harmadikba behelyettesítve következik

$$p_{k+1} = p_k + \omega(\tilde{B}A^{-1}(\vec{f} - \tilde{B}^T p_k) - g) = (I - \omega S)p_k + \omega(\tilde{B}A^{-1}\vec{f} - g).$$

Innen kapjuk a p_k közbülső nyomás $e_k := p_k - p$ hibájára (legyen p a diszkretizált (13) egyenlet pontos megoldása), hogy

$$e_{k+1} = (I - \omega S)e_k.$$

Ez a hibaegyenlet azonnal azt mutatja, hogy a diszkrét $\ker S$ térrel nem kell foglalkoznunk. Ez az altér remélhetőleg (és megfelelő diszkretizáció mellett valóban) egydimenziós, mint az analitikus feladat esetén a konstans nyomások altere, és e_k-nak ezen altérbeli része az iteráció alatt nem változik, így p_k-nak ezen része sem változik. Akkor ez a rész p_0-tól függ, amely tetszőlegesen választható – ami annak felel meg, hogy a feladat szinguláris.

A gyors konvergencia most a következőkkel kapcsolatos:

1. Egyetlen $\omega = 1$-gyel végrehajtott legelső iterációval eltüntethető az összes, a magas multiplicitású 1 sajátértékhez tartozó függvényrész a hibából, hiszen ha v bármely az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora S-nek, akkor érvényes $(I - S)v = 0$. Vagyis (a sebességek szintjén) eltűnt az egész diszkrét $\ker\operatorname{rot}$ altér a hibából.
2. Ezután a maradékhiba már W-ben van, így csak (alacsony dimenziójú) peremeffektusokkal kapcsolatos: W dimenziója a perempontok számával arányos.
3. A W-re szűkített operátor spektruma h-tól majdnem függetlenül igen keskeny. Itt most fontos a spektrum határainak tudása, és ha a W-re szűkített spektrum eleget tesz a

$$0 < m \le \lambda^h_{\min} \le \lambda^h_{\max} \le M$$

egyenlőtlenségnek, akkor m és M ismeretében az optimális iterációs paraméter szokásos módon [16] $\omega = \frac{2}{m+M}$-ből számítható.

4. Ha a kétdimenziós esetben az előzőkhöz hozzájön, hogy a diszkretizáció is egy 1/2-re szimmetrikus spektrumot eredményez (a „konform” végeselem esetben ez áll fenn – sőt ebben az esetben a tulajdonság független a tartománytól és triangulációjától [15]), akkor $\lambda_{\max}^h = 1 - \lambda_{\min}^h$, tehát ebben az esetben az optimális iterációs paraméter $\omega = \frac{2}{\lambda_{\min}^h + \lambda_{\max}^h} = 2$, függetlenül a tartománytól és a triangulációtól!

A kétdimenziós Stokes-feladat differencia és véges térfogat approximációi rendszerint az S spektrumának szimmetriáját 1/2-re nem adják vissza. Ekkor tanácsolható, hogy durva rácson számítsuk ki a $\lambda_{\min}^h$, $\lambda_{\max}^h$ értékeit, majd finom rácson használjuk, mert h-val csak lassan változnak.

7. Néhány számítási eredmény

Az alábbi számszerű eredményeket [14]-ből idézzük. Elsőnek tekintsük a Stokes-feladatot az egységnégyzetben, homogén elsőfajú peremfeltételek mellett, felosztva ezt a négyzetet $(N-1)^2$ kis négyzetre, mindegyik $h = 1/(N-1)$ hosszú oldalokkal. A feladatot diszkretizáltuk az ismert eltolt rácsrendszerű differencia approximáció segítségével, ld. [6], [13] vagy [17], 342. o. Ekkor az S spektrumának szimmetriája 1/2-re nem áll fenn, és például $N = 256$ esetén az optimális iterációs paraméter 2 helyett 1.84 volt.

Továbbá, létrehozva az adott diszkretizációhoz egy algebrai Stokes-feladatot ismert egzakt megoldással, a fenti elméletnek megfelelően egy Uzawa-lépést tettünk $\omega = 1$-gyel, majd ezután egyszer a spektrumból kiszámított ω_{opt} paraméterrel folytattuk, egyszer viszont $\omega = 2$-vel. Ennek során számoltuk azon lépések $it(\omega)$ számát (beleértve az $\omega = 1$-féle lépést), amely elegendő ahhoz, hogy a kiindulási nyomás-hibát az euklideszi normában a 10^{-10}-ed részére csökkentse.

N	4	8	16	32	64	128	256
$it\left(\tau_{\text{opt}}^h\right)$	14	20	26	31	35	39	41
q	0.1868	0.3153	0.4098	0.4728	0.5258	0.5458	0.5646
$it(2)$	62	58	55	56	55	55	53
q	0.6873	0.6722	0.6555	0.6603	0.6576	0.6540	0.6471

A táblázatban a q konvergencia rátát is mutatjuk. Ezt a nyomás $e_0 := \|e^{(0)}\|$ kezdeti és $e_m := \|e^{(m)}\|$ végső hibájának euklideszi normájából számítottuk ki: $q := (e_m/e_0)^{1/m}$, ahol $m = it(\omega)$.

Ezekből az eredményekből kirajzolódik, hogy $N \to \infty$ esetén q tart egy 0.6 körüli értékhez – és nem 1-hez. Ilyen értelemben a konvergencia h-tól független.

Következőnek a [24]-féle konjugált gradiens módszert alkalmazzuk a diszkretizált (13) egyenletek megoldására.

Különböző diszkretizációkat vizsgálva kísérletileg kiderül, hogy olyan diszkretizáció egyenleteit hatékonyabban meg lehet oldani, amelyeknél a diszkrét Crouzeix–Velte-felbontás létezik.

Az alábbi táblázatban SG jelenti az eltolt rácsrendszer (staggered grid) approximációját, Q1 a $Q_1 - Q_1$(macro)-végeselemeket [2] és CR az ismert Crouzeix–Raviart-elemeket [3]. Itt is $N = 1 + 1/h$, emögött mutatjuk a megfelelő diszkrét nyomás-tér dimenzióját (és igyekeztünk ezeknek lehetőleg közeli értékeket adni N választásával). A kilépési kritérium most az volt, hogy a maradékvektor végső és kiindulási euklideszi normáinak hányadosa 10^{-10} legyen, és it az ehhez szükséges lépésszám.

SG	$N(\dim P_h)$	7(36)	12(121)	24(529)	46(2025)
	it	10	12	14	15
	q	0.0728	0.1307	0.1706	0.2043
Q1	$N(\dim P_h)$	13(36)	23(121)	47(529)	91(2025)
	it	16	18	19	20
	q	0.2292	0.2602	0.2930	0.3061
CR	$N(\dim P_h)$	5(32)	9(128)	17(512)	33(2048)
	it	19	23	26	27
	q	0.2811	0.3647	0.4038	0.4225

Megjegyezzük, hogy a három módszer közül csak SG rendelkezik diszkrét Crouzeix–Velte-felbontással.

8. További feladatok

A homogén Dirichlet-feltétel mellett további peremfeltételekre sikerült a Crouzeix–Velte-felbontás meglétét úgy a Stokes-rendszer analitikus esetében, mint diszkretizációja után kimutatni, ld. [18]: pl. ha kétdimenziós esetben a tartomány téglalap, és a vízszintes oldalokon Dirichlet-feltétel van, a függőleges oldalokon periodikus feltétel. Általános tartomány esetén olyan nemstandard, de hasznos peremfeltétel is alkalmas a Crouzeix–Velte-felbontás megléte szempontjából, ahol a sebesség normálkomponense és rotációja nulla a peremen.

Az az eset, amikor a peremnek egyik részén Dirichlet-, a másik részén Neumann-feltétel adott, gyakori az áramlási feladatoknál, de nem vezet a három alteres Crouzeix–Velte-felbontásra. Ilyenkor viszont lehet tudni, hogy a spektrum $[0, d]$-ben van ($d = 2, 3$), és $\omega = d/2$ alkalmas iterációs paraméter.

Befejezésül megemlítjük, hogy van egy további fontos példa a Crouzeix–Velte-felbontás hasznosíthatóságára: a linearizált rugalmasságtani egyenletek [18]:

$$\begin{aligned} -(2\mu + \lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} &= \vec{f}, \quad x \in \Omega, \\ \vec{u} &= 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Amennyiben

$$\mu > 0 \text{ és } \lambda + \mu \geq 0,$$

akkor a Crouzeix–Velte-felbontás létezik. Itt

$$\sqrt{\mu}\,\mathrm{rot} =: \tilde{C}, \qquad \sqrt{2\mu+\lambda}\,\mathrm{div} =: \tilde{B},$$
$$A = B + C, \qquad B = \tilde{B}^T\tilde{B}, \qquad C = \tilde{C}^T\tilde{C}.$$

Ekkor $a(\vec{u},\vec{v}) = (A\vec{u},\vec{u})$ szimmetrikus és pozitív definit (érvényes a Korn-féle egyenlőtlenség) :

$$a(\vec{u},\vec{u}) \geq \mu\left\{(\mathrm{div}\,\vec{u},\mathrm{div}\,\vec{u})_0 + (\mathrm{rot}\,\vec{u},\mathrm{rot}\,\vec{u})_0\right\}.$$

Hivatkozások

[1] Baran Á., Stoyan G.: *Gauss–Legendre elements: a stable, higher order non-conforming finite element family.* Computing **79**,1 (2007), 1–21.

[2] Brezzi, F., Fortin, M.: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* New York: Springer 1991.

[3] Crouzeix, M., Raviart, P.–A.: *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations.* R.A.I.R.O. - Informatique Théoretique et Applications, R-3 (1973), 33–76.

[4] Crouzeix M.: *Étude d'une méthode de linéarisation. Résolution numérique des équations Stokes stationnaires.* In: Cahier de l'INRIA **12**, (1974), 139–244.

[5] Crouzeix, M.: *On an operator related to the convergence of Uzawa's algorithm for the Stokes equation.* In: Computational Science for the 21st Century (J. Périaux et al., eds.). New York: Wiley 1997, 242–249.

[6] Dobrowolski M., Stoyan G.: *Algebraic and discrete Velte decompositions.* BIT **41**, No. 3 (2001), 465–479.

[7] Friedrichs K.O.: *On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions of two variables.* Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 321–364.

[8] Girault V., Raviart P.-A.: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.* Springer, Berlin 1986.

[9] Horgan C.O., Payne L.E.: *On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz.* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 165–179.

[10] Kobelkov G.M., Orlova N.B.: *A fast method for solving the Stokes problem.* Vestnik Moskov. Univ. Ser. XV, Vychisl. Mat. Kibernet. **4** (1989), 39–45 (in Russian).

[11] Mikhlin S.G.: *The spectrum of the operator pencil of elasticity theory.* Uspekhi Mat. Nauk **28**, No. 3 (171) (1973), 43–82 (in Russian).

[12] Nečas J.: *Equations aux Dérivées Partielles.* Presses de l'Université de Montreal 1965.

[13] Stoyan G.: *Towards discrete Velte decompositions and narrow bounds for inf-sup constants.* CAMWA **38** (1999), 243–261.

[14] Stoyan G.: *Iterative Stokes solvers in the harmonic Velte subspace.* Computing **67** (2000), 13–33.

[15] Stoyan G.: $-\Delta$ = *-grad div + rot rot for matrices, with application to the finite element solution of the Stokes problem.* East-West Journal of Numerical Mathematics **8**, No. 4 (2000), 323–340.

[16] Stoyan G., Takó G.: *Numerikus módszerek I*, 2. kiadás Typotex, Budapest 2002. (A 3. kiadás interneten olvasható, ld. a http://numanal.inf.elte.hu/∼ stoyan honlapon „books" alatt.)

[17] Stoyan G., Takó G.: *Numerikus módszerek III*, Typotex, Budapest 1997.

[18] Stoyan G., Strauber Gy., Baran Á.: *Generalizations to discrete and analytical Crouzeix-Velte decompositions.* Numer. Lin. Algebra **11** (2004), 565-590.

[19] Stoyan G., Baran Á.: *Crouzeix-Velte decompositions for higher-order finite elements.* CAMWA **51** (2005), 967–986.

[20] Strauber Gy.: *Discrete Crouzeix-Velte decompositions on nonequidistant rectangular grids.* Annales Univ. Budapest **44** (2002), 63–82.

[21] Strauber Gy.: *Discrete Crouzeix-Velte decomposition for the disk domain.* Miskolc Mathematical Notes **6**,1 (2005), 129-141.

[22] Varnhorn W.: *The Stokes Equations.* Mathematical Research **76**, Akademie-Verlag Berlin 1994.

[23] Velte W.: *On optimal constants in some inequalities.* Lecture Notes in Math. 1431, 158–168. Springer, Berlin 1990.

[24] Verfürth, R.: *A combined conjugate gradient–multigrid algorithm for the numerical solution of the Stokes problem.* IMA J. Numer. Anal. **4**, 441–455 (1984).

[25] Weyl H.: *The method of orthogonal projection in potential theory.* Duke Math. J. **7** (1940), 411–444.

[26] Zsuppan S.: *On the spectrum of the Schur complement of the Stokes operator via conformal mapping.* Methods and Applications of Analysis **11**,1 (2004), 133–154.

[27] Zsuppán S.: *On connections between the Stokes-Schur and the Friedrichs operator, with applications to the inf-sup problem.* Annales Univ. Budapest **48** (2005), 151–171.

STOYAN GISBERT
Eötvös Lóránd Tudományegyetem
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/c
stoyan@numanal.inf.elte.hu

Alkalmazott Matematikai Lapok (2009)

THE STOKES PROBLEM AND THE CROUZEIX-VELTE DECOMPOSITION

Stoyan Gisbert

In this paper a survey of the author's and his disciples' results is presented on the research on the discretizations for solving the first-type boundary value problem for the Stokes equations so that the discretizations preserve the existence of a special 3-subspace orthogonal decomposition. In this way not only a characteristic property of the analytic case is preserved, but also the efficiency of the iterative solution methods for the discretized equations is significantly improved. This technique is transmissible to other problems.