

SZTOCHASZTIKUS HÁLÓZATOKKAL KAPCSOLATOS, RITKÁN  
BEKÖVETKEZŐ ESEMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉGBECSLÉSE  
EXPONENCIÁLIS, ILLETVE BÉTA ELOSZLÁS ESETÉN<sup>1</sup>

GOUDA ASHRAF<sup>2</sup> ÉS SZÁNTAI TAMÁS<sup>3</sup>

A dolgozat sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésével foglalkozik. Ehhez hatékony eszköznek bizonyul a jól ismert fontosság szerinti mintavétel (*Importance Sampling*, IS). Az IS alap gondolata az, hogy a véletlen rendszert módosított paraméter halmaz mellett szimuláljuk, mely által a különben ritkán bekövetkező esemény nagyobb eséllyel következik be. A legnagyobb probléma az, hogy az IS-eljárásban használandó optimálisan módosított paraméter halmazt, az úgynevezett vonatkoztatási paramétereket általában nehéz meghatározni. Az IS-eljárás ezen problémájának megoldására Rubinstein (1997) kidolgozta a kereszt entrópia (*Cross Entropy*, CE) módszert, majd a munkatársaival együtt alkalmazta azt sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésére exponenciális eloszlás esetén (lásd De Boer, Kroese, Mannor és Rubinstein (2002)).

Ebben a dolgozatban teszteljük ezt a szimulációs eljárást közepes- és nagyméretű sztochasztikus hálózatokra, valamint a nyers Monte Carlo (*Crude Monte Carlo*, CMC) szimulációval történő összehasonlításával megadjuk annak hatékonyságát. A szóráscsökkentés szimulációs algoritmus hatékonyságát a következőképpen mérjük. Kiszámítjuk a becslés szórásnégyzetének és a meghatározásához szükséges CPU-időnek a szorzatát, majd ezt a szorzatot viszonyítjuk a CMC-módszerre számított hasonló szorzat értékéhez. Ezt a mutatót eredetileg Hammersley és Handscombe (1967) javasolták különböző szóráscsökkentő algoritmusok hatékonyságának összemérésére.

A dolgozat fő eredményeként kiterjesztjük a CE-módszert sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésére béta eloszlás esetén. Ekkor az IS-eloszlás vonatkoztatási paramétereinek meghatározásához nemlineáris egyenletrendszer numerikus megoldására van szükség. Ezt Newton–Raphson-iterációval tesszük meg, mikor is a vonatkoztatási paraméterek meghatározására fordított CPU-idő már nem hanyagolható el. Erre vonatkozó numerikus eredményeket is megadjuk a dolgozatban.

**Kulcsszavak:** kereszt entrópia (CE), fontosság szerinti mintavétel (IS), ritkán bekövetkező események, legrövidebb út probléma, exponenciális és béta eloszlás, Newton–Raphson-módszer.

<sup>1</sup>Elhangzott a XXVII. Magyar Operációkutatási Konferencián, Balatonöszödön (2007. június 7–9.).

<sup>2</sup>A BME Matematika Intézet volt PhD hallgatója

<sup>3</sup>A dolgozat megírásához vezető munkát részben az OTKA T047340 számú pályázata támogatta.

## 1. Bevezetés

A sztochasztikus szimuláció hasznos eszköznek bizonyul a gyakorlatban, széles körben alkalmazzák különböző becslési feladatok megoldására. Hasznos segédessz-köznek bizonyul továbbá sztochasztikus programozási feladatok numerikus megoldása során is, lásd Prékopa András sztochasztikus programozás könyvét, Prékopa (1995). A könyv megjelenése óta Deák István, lásd Deák (2001), (2002), illetve Fábrián Csaba és Szőke Zoltán, lásd Fábrián, Szőke (2007) dolgoztak ki sztochasztikus szimuláción alapuló, illetve azt haszonnal alkalmazó, sztochasztikus programozási feladatokat megoldó numerikus optimalizálási algoritmusokat. Sok esetben azonban a standard sztochasztikus szimuláció alkalmazása korlátokba ütközik. A standard sztochasztikus szimulációval nem kezelhető problémák egy fontos osztálya az, amely ritkán bekövetkező események szimulációját igényli. Mivel ezek az események egy standard szimuláció során csak rendkívül ritkán következnek be, olyan nagy elemszámú mintát kellene szimulálni, ami túl nagy CPU-időt igényelne. Ezért az elmúlt évtizedtől kezdődően különböző módszereket, eljárásokat fejlesztettek ki a ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésére.

Lieber, Rubinstein és Elmakis (1997) és Rubinstein (1997) kidolgozták a CE (*Cross Entropy*) módszert. Ez egy adaptív eljárás az IS (*Importance Sampling*) eljárásban használt, úgynevezett vonatkoztatási paraméterek becslésére. A CE-módszert úgy lehet tekinteni, mint egy modell alapú optimalizálási eljárást, amely a következő két fázisból áll:

1. Véletlen vektorok mintájának adott véletlen mechanizmus szerinti generálása.
2. A véletlen mechanizmus paramétereinek az eredmények ismeretében történő megváltoztatása, hogy a következő iterációban bizonyos értelemben jobb mintát lehessen előállítani.

A CE-módszer legfontosabb tulajdonsága az, hogy fejlett szimulációs módszeren alapuló, szabatos matematikai keretet ad a vonatkoztatási paraméterek bizonyos értelemben „optimális” aktualizálására. A ritkán bekövetkező események valószínűségbecslése pedig azért fontos feladat, mert ezzel garantálni lehet különféle mérnöki rendszerek megbízható működését. Tekintsünk példaként egy telekommunikációs rendszert, amely nagyon sok felhasználó hívásait fogadja. Normális működési körülmények között bármelyik felhasználó hívását csak nagyon kis valószínűséggel utasíthatja vissza a rendszer. Ahhoz, hogy ezt a nagyon kis valószínűséget becsülni tudjunk, az egész rendszert nagyon hosszú ideig kellene valós működési körülmények között szimulálni. Az ilyen valószínűségek becslésére jobb ezért az IS-eljárást használni, amely során a rendszert megváltoztatott paraméterekkel szimuláljuk úgy, hogy a különben ritkán bekövetkező esemény nagyobb valószínűséggel következzen be. Ennek az eljárásnak az alkalmazásában a legnagyobb nehézséget az okozza, hogy általában nagyon nehéz a szimuláció során alkalmazandó működtetési paramétereket optimálisan megválasztani. A CE-módszer előnye az, hogy egyszerű adaptív eljárást ad a közel optimális vonatkoztatási paraméterek becslésére, mely

által lehetővé válik, hogy a rendszer módosított körülmények közötti szimulációjával becsülni tudjuk az egyes hívások normális működési körülmények közti visszatartásának a nagyon kicsi valószínűségét is, azaz, hogy alkalmazni tudjuk az IS-eljárást. A CE-módszer egy további jó tulajdonsága az aszimptotikus konvergencia is.

A dolgozat további részeiben a következők szerint fogunk haladni. A 2. szakaszban a CE-módszer alap módszertanát ismertetjük. A 3. szakaszban exponenciális, illetve béta eloszlású véletlen mennyiségekkel leírt sztochasztikus hálózatokban felépítő, ritkán bekövetkező események becslési eljárásait adjuk meg. Végül a 4. szakaszban numerikus példákon hasonlítjuk össze a nyers Monte Carlo-módszerrel és a CE-módszerrel meghatározott vonatkoztatási paraméterekkel működtetett IS-eljárással nyert becslések hatékonyságát.

## 2. A CE-módszeren alapuló IS-eljárás általános módszere

Ebben a szakaszban röviden áttekintjük azokat az alapelveket, amelyek a ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésre alkalmazott CE alapú IS-eljárás helyességét igazolják. Tekintsünk egy véletlen rendszert, amelyet az  $\mathcal{X}$  térben értékeket felvevő  $\mathbf{X}$  véletlen vektor ír le. Legyen  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  egy, az  $\mathcal{X}$  tér fölötti paraméteres sűrűségfüggvény család. Tegyük fel, hogy a rendszert leíró  $\mathbf{X}$  véletlen vektor sűrűségfüggvénye  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}^*)$ , ahol  $\mathbf{v}^*$  egy rögzített paraméter vektor. Legyen  $S(\mathbf{X})$  a vizsgált véletlen rendszer egy jellemzője, és keressük annak a valószínűségét, hogy  $S(\mathbf{X})$  értéke nagyobb, mint egy  $\gamma$  valós szám. Így tehát diszkrét esemény szimulációval becsülnünk kell az

$$L = P(S(\mathbf{X}) > \gamma) = E[H(\mathbf{X})] \quad (1)$$

valószínűséget, ahol  $E$  a várható érték és  $H(\mathbf{x})$  az alábbi karakterisztikus függvény:

$$H(\mathbf{x}) = I_{\{S(\mathbf{x}) > \gamma\}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } S(\mathbf{x}) > \gamma, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az (1) valószínűség közvetlenül is becsülhető CMC-szimulációval, ha veszünk egy  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  mintát az  $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)$  sűrűségfüggvénnyel definiált valószínűségeloszlásból és kiszámítjuk  $L$ -re az alábbi torzítatlan becslést:

$$\hat{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(\mathbf{X}^{(i)}).$$

Ha azonban  $\gamma$  elég nagy, akkor az  $L$  valószínűség nagyon kicsi tud lenni, és ekkor az  $\{S(\mathbf{X}) > \gamma\}$  esemény ritkán bekövetkezőnek lesz nevezhető. Ebben az esetben a CMC-szimuláció az  $L$  érték elég pontos becsléséhez nagyon nagy mintát fog igényelni, azaz  $n$ -nek nagyon nagyoknak kell lenni. Egy másik lehetőség az IS-eljárás

alkalmazása, lásd Rubinstein és Melamed (1998), Rubinstein (1997) és Rubinstein (1999). Ha az  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  mintát egy, az  $\mathcal{X}$  tér fölötti tetszőleges másik  $g(\mathbf{x})$  sűrűségfüggvénnyel definiált valószínűségeloszlásból vesszük, akkor az  $L$  érték becslését a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\hat{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(\mathbf{X}^{(i)}) W(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^*), \quad (2)$$

ahol  $W(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) = f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)/g(\mathbf{x})$  az úgynevezett likelihood hányados. Ennek a becslésnek a torzítatlanságát a következő átalakítás-sorozat igazolja:

$$\begin{aligned} L &= P(S(\mathbf{X}) > \gamma) = E_f[H(\mathbf{X})] \\ &= \int I_{\{S(\mathbf{x}) > \gamma\}} f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) d\mathbf{x} \\ &= \int I_{\{S(\mathbf{x}) > \gamma\}} \frac{f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)}{g(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int I_{\{S(\mathbf{x}) > \gamma\}} W(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= E_g[H(\mathbf{X})W(\mathbf{X}; \mathbf{v}^*)] \end{aligned}$$

A  $g(\mathbf{x})$  sűrűségfüggvény megfelelő választása mellett ezt a becslést IS-eljárásnak nevezhetjük. A cél az, hogy a szimuláció alapjául szolgáló mértéket olyanra cseréljük, azaz a  $g(\mathbf{x})$  sűrűségfüggvényt úgy válasszuk meg, hogy a (2) torzítatlan becslés szórása a lehető legkisebb legyen. Könnyen belátható, hogy ennek a problémának a megoldását a

$$g(\mathbf{x}) = \frac{H(\mathbf{x})f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)}{C} \quad (3)$$

sűrűségfüggvény adja, ahol a normáló tényező értéke

$$C = \int H(\mathbf{x})f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) d\mathbf{x}.$$

Ez azt jelenti, hogy a módosított szimulációhoz használható legjobb eloszlás az eredeti  $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)$  sűrűségfüggvény által generált eloszlásnak a ritkán bekövetkező eseménnyel, mint feltétellel vett feltételes eloszlása lenne, hiszen a (3) sűrűségfüggvénnyel alkalmazott IS-eljárás a keresett valószínűség nulla szórású, torzítatlan becslését adná. Ezt az eloszlást azonban nem tudjuk használni, mivel a normáló tényezőjét nem ismerjük, hiszen az éppen a becsülni kívánt valószínűség értékével azonos:

$$C = \int H(\mathbf{x})f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) d\mathbf{x} = E_f[H(\mathbf{X})] = P(S(\mathbf{X}) > \gamma) = L.$$

Ezért csak arra törekedhetünk, hogy a (3) sűrűségfüggvényt jól közelítő sűrűségfüggvényt találjunk.

Két valószínűségi mérték közti távolság mérésére a Kullback–Leibler-féle kereszt entrópiát használhatjuk. Ez a következő. Legyen  $g(\mathbf{x})$  és  $h(\mathbf{x})$  két sűrűségfüggvény. Ezek Kullback–Leibler-féle kereszt entrópiája definíció szerint

$$CE = \int g(\mathbf{x}) \log \frac{g(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} d\mathbf{x}. \quad (4)$$

Ha  $g(\mathbf{x})$  és  $h(\mathbf{x})$  azonosak, akkor  $CE = 0$ , különben  $CE > 0$ .

A (3) optimális sűrűségfüggvényt jól közelítő sűrűségfüggvény keresésekor korlátozzuk a figyelmünket azokra, amelyek ugyanabba a paraméteres sűrűségfüggvény családba tartoznak, mint az eredeti. Így a feladatunk olyan  $\hat{\mathbf{v}}$  paraméter vektor keresése, hogy az  $f(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{v}})$  sűrűségfüggvény a lehető legjobban közelítse a (3) sűrűségfüggvényt. Ebből a célból helyettesítsük a (4) képletben a  $g(\mathbf{x})$  sűrűségfüggvényt az optimális (3) sűrűségfüggvénnyel, a  $h(\mathbf{x})$  sűrűségfüggvényt pedig  $f(\mathbf{x}; \mathbf{v})$ -vel és keressük azt a  $\hat{\mathbf{v}}$  paraméter vektort, amelyre az így nyert kifejezés minimális értékű:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= \arg \min_{\mathbf{v}} \int CH(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) \log \frac{CH(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)}{f(\mathbf{x}; \mathbf{v})} dx \\ &= \arg \min_{\mathbf{v}} \left[ \int CH(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) \log CH(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) dx \right. \\ &\quad \left. - \int CH(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) \log f(\mathbf{x}; \mathbf{v}) dx \right] \\ &= \arg \max_{\mathbf{v}} \int H(\mathbf{x}) \log f(\mathbf{x}; \mathbf{v}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Ennek a maximalizálási feladatnak a közelítő megoldására Rubinstein (1997) egy iterációs algoritmus dolgozott ki. Ehhez legyen  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \dots$  paraméter vektorok egy sorozata, és annak  $\mathbf{v}_k$  elemével írjuk az (5) maximalizálási feladatot a következő alakba:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= \arg \max_{\mathbf{v}} \int H(\mathbf{x}) \log f(\mathbf{x}; \mathbf{v}) f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*) dx \\ &= \arg \max_{\mathbf{v}} \int H(\mathbf{x}) \log f(\mathbf{x}; \mathbf{v}) \frac{f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)}{f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k)} f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k) dx \\ &= \arg \max_{\mathbf{v}} E_{\mathbf{v}_k} [H(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*, \mathbf{v}_k) \log f(\mathbf{x}; \mathbf{v})], \end{aligned} \quad (6)$$

ahol

$$W(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*, \mathbf{v}_k) = \frac{f(\mathbf{x}; \mathbf{v}^*)}{f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k)}.$$

A következő algoritmus Rubinstein CE-algoritmusának egy módosított változata, melyet De Boer és munkatársai dolgoztak ki (lásd De Boer at el. (2002)). A módosítás az algoritmus 5. lépésében látható és egy új  $\lambda$  simító paraméter bevezetéséből áll.

2.1. *Algoritmus.* Az általános CE-módszeren alapuló IS-eljárás.

1. Lépés. Válasszunk egy kezdő  $\mathbf{v}_0$  paraméter vektort. Erre megfelel például  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^*$ . Válasszunk egy nullához közeli  $\rho$  pozitív számot a rendszerjellemező függvény mintaértékei  $(1 - \rho)$  kvantilisének számításához. Legyen  $k = 0$ , és menjünk a 2. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
2. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k)$  sűrűségfüggvény szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  véletlen mintát.
3. Lépés. Számítsuk ki a rendszerjellemező függvény  $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$  mintaértékét minden  $i$ -re és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe:  $S^{(1)} \leq \dots \leq S^{(n)}$ . Legyen  $\hat{\gamma}_{k+1}$  a rendszerjellemező függvény mintaértékeinek az  $(1 - \rho)$  kvantilise, azaz  $\hat{\gamma}_{k+1} = S^{(\lfloor (1-\rho)n \rfloor)}$ , feltéve, hogy ez az érték kisebb, mint  $\gamma$ . Különben legyen  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$ .
4. Lépés. Ugyanezt a véletlen mintát használva, a

$$\sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{X}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^*, \mathbf{v}_k) \nabla \log f(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}) = \mathbf{0}^T. \quad (7)$$

egyenlet megoldásával adjunk becslést a  $\mathbf{v}_{k+1}$  vektorra.

5. Lépés. Simítsuk az új paraméter vektort az alábbi képlet szerint:

$$\mathbf{v}_{k+1} := \lambda \mathbf{v}_{k+1} + (1 - \lambda) \mathbf{v}_k,$$

ahol  $0 \leq \lambda \leq 1$  előre rögzített simító paraméter.

6. Lépés. Ha  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$ , akkor legyen az utolsó  $\mathbf{v}_{k+1}$  paraméter vektor a  $\hat{\mathbf{v}}$  vonatkoztatási paraméter, és menjünk a 7. lépésre, különben legyen  $k = k + 1$ , és ismételjük a 2–6. lépéseket, ameddig el nem érjük a  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$  egyenlőséget.
7. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{v}})$  sűrűségfüggvény szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^*, \hat{\mathbf{v}}).$$

Ekkor a becslés becslt szórásnégyzete:

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W^2(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^*, \hat{\mathbf{v}}) - \hat{L}^2 \right) / N.$$

### 3. Alkalmazás a legrövidebb út hosszára vonatkozó valószínűség becslésére

A legrövidebb út probléma egy hálózat egy adott csúcsából egy másikba vezető legrövidebb út megkeresését jelenti. Az út mentén az egymás utáni csúcsokat összekötő éleknek mindig a haladási irányba kell mutatni. Az ilyen utakat szokás irányított utaknak is nevezni. Tegyük fel, hogy adott egy  $G(N, A)$  véletlen hálózat, ahol  $N$  a csúcsok halmaza és  $A$  az élek halmaza. Az élekhez tevékenységek  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  véletlen időtartamait rendeljük, miközben feltesszük, hogy azok nemnegatívak.

Egy adott csúcsból, mondjuk  $O$ -ból megkeresni a legrövidebb utat egy másik csúcsba, mondjuk  $R$ -be nem könnyebb, mint több, akár az összes csúcsból az  $R$ -be vezető legrövidebb utak megkeresése. Ezért gyakran definiálják úgy is a legrövidebb út problémát, mint az összes  $N$ -beli csúcsból egy rögzített  $R \in N$  csúcsba vezető legrövidebb út megkeresésének a feladatát. A továbbiakban amikor legrövidebb útról beszélünk, azalatt mindig az  $O$  kiindulási csúcsból az  $R$  cél csúcsba vezető legrövidebb utat fogjuk érteni.

Tegyük fel először, hogy az  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$  tevékenységi időtartamok független,  $\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*$  várható értékű, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, ezért az együttes valószínűségi sűrűségfüggvényük a következő:

$$f(\mathbf{x}; \alpha^*) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{x_j}{\alpha_j^*}\right) \prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j^*}.$$

Ekkor a (6) képletbeli likelihood hányados:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \alpha_k) &= \frac{f(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*)}{f(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha_k)} \\ &= \exp\left(-\sum_{j=1}^m X_j^{(i)} \left(\frac{1}{\alpha_j^*} - \frac{1}{\alpha_{kj}}\right)\right) \prod_{j=1}^m \frac{\alpha_{kj}}{\alpha_j^*}, \end{aligned}$$

ahol  $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})^T$  a  $k$ -adik iteráció paraméter vektora és  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  egy az  $f(\mathbf{x}; \alpha_k)$  sűrűségfüggvényű eloszlásból vett véletlen minta. A  $f(\mathbf{x}; \alpha)$  sűrűségfüggvény logaritmus:

$$\log f(\mathbf{x}; \alpha) = -\sum_{j=1}^m \log \alpha_j - \sum_{j=1}^m \frac{x_j}{\alpha_j}.$$

$\alpha_j$  szerinti parciális deriválás után:

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x}; \alpha)}{\partial \alpha_j} = -\frac{1}{\alpha_j} + \frac{x_j}{\alpha_j^2}.$$

Így a (7) egyenlet most a következő speciális alakot ölti:

$$\sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \alpha_k) \left( -\frac{1}{\alpha_j} + \frac{x_j}{\alpha_j^2} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (8)$$

A (8) egyenletből  $\alpha_j, j = 1, \dots, m$  explicit módon kifejezhető, ezért a 2.1. algoritmus a következőképpen alakul:

*3.1. Algoritmus.* A CE-módszeren alapuló IS-eljárás exponenciális eloszlás esetén.

1. Lépés. Válasszuk kezdésnek az  $\alpha_0 = \alpha^*$  paraméter vektort. Legyen  $\rho$  egy nullához közeli pozitív szám, melyet a rendszerjellemző függvény mintavértékei  $(1 - \rho)$  kvantilisének számításához használunk. Legyen  $k = 0$ , és menjünk a 2. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
2. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \alpha_k)$  sűrűségfüggvényű exponenciális eloszlás szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  véletlen mintát.
3. Lépés. Számítsuk ki az  $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$  legrövidebb úthosszakat minden  $i$ -re, és rendezzük ezeket monoton növekvő sorrendbe:  $S^{(1)} \leq \dots \leq S^{(n)}$ . Legyen  $\hat{\gamma}_{k+1}$  a legrövidebb utak  $(1 - \rho)$  minta kvantilise, azaz  $\hat{\gamma}_{k+1} = S^{[(1-\rho)n]}$ , feltéve, hogy ez kisebb, mint  $\gamma$ . Különben legyen  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$ .
4. Lépés. Ugyanezt a véletlen mintát használva, az

$$\alpha_{k+1,j} = \frac{\sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \alpha_k) X_j^i}{\sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \alpha_k)}, \quad j = 1, \dots, m.$$

explicit képletek segítségével adjunk becslést a  $\alpha_{k+1}$  paramétervektorra.

5. Lépés. Simítsuk az új paraméter vektort az alábbi képlet szerint:  $\alpha_{k+1} := \lambda \alpha_{k+1} + (1 - \lambda) \alpha_k$ , ahol  $0 \leq \lambda \leq 1$  előre rögzített simító paraméter.
6. Lépés. Ha  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$ , akkor legyen az utolsó  $\alpha_{k+1}$  paraméter vektor az  $\hat{\alpha}$  vonatkoztatási paraméter, és menjünk a 7. lépésre, különben legyen  $k = k + 1$ , és ismételjük a 2–6. lépéseket, ameddig el nem érjük a  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$  egyenlőséget.
7. Lépés. Generáljunk egy  $\hat{\alpha}$  paraméter vektorú, exponenciális eloszlású  $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$  véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \hat{\alpha}).$$



Ekkor a becslés becült szórásnégyzete:

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W^2(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \hat{\alpha}) - \hat{L}^2 \right) / N.$$

Tegyük fel most, hogy az  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$  tevékenységi időtartamok független,  $\alpha_i^*, \beta_i^*, i = 1, \dots, m$  paraméterű, béta eloszlású valószínűségi változók, ezért az együttes valószínűségi sűrűségfüggvényük a következő:

$$f(\mathbf{x}; \alpha^*, \beta^*) = \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(\alpha_j^* + \beta_j^*)}{\Gamma(\alpha_j^*) \Gamma(\beta_j^*)} \left( \frac{1}{b-a} \right)^{\alpha_j^* + \beta_j^* - 1} \\ \times (x_j - a)^{\alpha_j^* - 1} (b - x_j)^{\beta_j^* - 1},$$

ahol

$$a \leq x_j \leq b, \alpha_j^* > 0, \beta_j^* > 0, j = 1, \dots, m.$$

A (6) képletbeli likelihood hányados a következőképpen alakul:

$$W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \alpha_k, \beta_k) = \frac{f(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*)}{f(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha_k, \beta_k)} \\ = \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(\alpha_j^* + \beta_j^*)}{\Gamma(\alpha_j^*) \Gamma(\beta_j^*)} \frac{\Gamma(\alpha_{kj}) \Gamma(\beta_{kj})}{\Gamma(\alpha_{kj} + \beta_{kj})} (b-a)^{\alpha_{kj} + \beta_{kj} - \alpha_j^* - \beta_j^*} \\ \times (b - X_j^{(i)})^{\beta_j^* - \beta_{kj}} (X_j^{(i)} - a)^{\alpha_j^* - \alpha_{kj}}.$$

Az  $f(\mathbf{x}; \alpha, \beta)$  sűrűségfüggvény logaritmus:

$$\log f(\mathbf{x}; \alpha, \beta) = \sum_{j=1}^m [\log \Gamma(\alpha_j + \beta_j) - \log \Gamma(\alpha_j) - \log \Gamma(\beta_j) \\ + (1 - \alpha_j - \beta_j) \log(b-a) + (\alpha_j - 1) \log(x_j - a) \\ + (\beta_j - 1) \log(b - x_j)].$$

$\alpha_j$  szerinti parciális deriválás után:

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x}; \alpha, \beta)}{\partial \alpha_j} = \psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\alpha_j) - \log(b-a) + \log(x_j - a).$$

$\beta_j$  szerinti parciális deriválás után:

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{x}; \alpha, \beta)}{\partial \beta_j} = \psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\beta_j) - \log(b-a) + \log(b - x_j).$$

Itt

$$\psi(x) = \frac{d \log(\Gamma(x))}{dx} = \frac{\frac{d}{dx} \Gamma(x)}{\Gamma(x)}$$

az úgynevezett digamma függvény.

Így a (7) egyenlet most a következő két egyenletrendszer alakját ölti:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \alpha_k, \beta_k) \times \\ & \times \left[ \psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\alpha_j) - \log(b-a) + \log(X_j^{(i)} - a) \right] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$j = 1, \dots, m$$

és

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \alpha_k, \beta_k) \times \\ & \times \left[ \psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\beta_j) - \log(b-a) + \log(b - X_j^{(i)}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$j = 1, \dots, m.$$

A (9) és (10) egyenletrendszerekből azt kapjuk, hogy

$$\psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\alpha_j) - \log(b-a) = A_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (11)$$

$$\psi(\alpha_j + \beta_j) - \psi(\beta_j) - \log(b-a) = B_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (12)$$

ahol

$$A_j = \frac{- \sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \alpha_k, \beta_k) \log(X_j^{(i)} - a)}{\sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \alpha_k, \beta_k)}$$

és

$$B_j = \frac{- \sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \alpha_k, \beta_k) \log(b - X_j^{(i)})}{\sum_{i=1}^n I_{\{S(\mathbf{x}^{(i)}) > \hat{\gamma}_{k+1}\}} W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \alpha_k, \beta_k)}.$$

Az  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  változókra vonatkozó (11) és (12) nemlineáris egyenletrendszert Newton–Raphson-módszerrel oldjuk meg, jelölje a megoldásvektort  $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

3.2. *Algoritmus.* A CE-módszeren alapuló IS-eljárás béta eloszlás esetén.

1. Lépés. Válasszuk kezdésnek az  $\alpha_0 = \alpha^*, \beta_0 = \beta^*$  paraméter vektorokat. Legyen  $\rho$  egy nullához közeli pozitív szám, melyet a rendszerjellemző függvény mintaértékei  $(1 - \rho)$  kvantilisének számításához használunk. Legyen  $k = 0$ , és menjünk a 2. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
2. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \alpha_k, \beta_k)$  sűrűségfüggvényű béta eloszlás szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  véletlen mintát.
3. Lépés. Számítsuk ki az  $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$  legrövidebb úthosszakokat minden  $i$ -re, és rendezzük ezeket monoton növekvő sorrendbe:  $S^{(1)} \leq \dots \leq S^{(n)}$ . Legyen  $\hat{\gamma}_{k+1}$  a legrövidebb utak  $(1 - \rho)$  minta kvantilise, azaz  $\hat{\gamma}_{k+1} = S^{[(1-\rho)n]}$ , feltéve, hogy ez kisebb, mint  $\gamma$ . Különben legyen  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$ .
4. Lépés. Ugyanezt a véletlen mintát használva a (11), a (12) nemlineáris egyenletrendszer Newton–Raphson-módszerrel történő megoldásával adjunk becslést az  $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$  paraméter vektorokra.
5. Lépés. Simítsuk az új paraméter vektort az alábbi képlet szerint:  $\alpha_{k+1} := \lambda \alpha_{k+1} + (1 - \lambda) \alpha_k$  és  $\beta_{k+1} := \lambda \beta_{k+1} + (1 - \lambda) \beta_k$ , ahol  $0 \leq \lambda \leq 1$  előre rögzített simító paraméter.
6. Lépés. Ha  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$ , akkor legyenek az utolsó  $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$  paraméter vektorok az  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  vonatkoztatási paraméter vektorok, és menjünk a 7. lépésre, különben legyen  $k = k + 1$ , és ismételjük a 2–6. lépéseket, ameddig el nem érjük a  $\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma$  egyenlőséget.
7. Lépés. Generáljunk egy  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  paraméter vektorú, béta eloszlású  $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$  véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \hat{\alpha}, \hat{\beta}).$$

Ekkor a becslés becsült szórásnégyzete:

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W^2(\mathbf{X}^{(i)}; \alpha^*, \beta^*, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) - \hat{L}^2 \right) / N.$$

A CE-módszeren alapuló IS-eljárás alapgondolata az, hogy a  $\rho (\gg L)$  paraméter érték választásától függően létrehoz egy  $\{\hat{v}_k\}$  és egy  $\{\hat{\gamma}_k\}$  sorozatot, melyek közül az első tart az IS-eljárásban majd használandó vonatkoztatási paraméter vektorhoz, a második pedig monoton nemcsökkenő módon tart a ritkán bekövetkező esemény megadásában szereplő  $\gamma$  paraméter értékéhez. Sajnos azonban a  $\rho$  paraméter helytelen megválasztásával az is előfordulhat, hogy a  $\rho$  paramétertől

függő minta kvantilisek értékeire a  $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k, \rho) > \hat{\gamma}(\mathbf{v}_{k-1}, \rho)$  egyenlőtlenség egyetlen  $k$  értékre sem következik be, mikor is az eljárás nem konvergál. Ezért is érdemes az eljárás alkalmazásakor nem túl kicsi  $\rho$  paraméter értéket használni. Hogy ezt a problémát biztosan elkerüljük, azért a CE-módszeren alapuló IS-eljárás következő módosítását javasoljuk. Ha a  $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k, \rho)$  minta kvantilis nem teljesíti a  $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k, \rho) > \hat{\gamma}(\mathbf{v}_{k-1}, \rho)$  egyenlőtlenséget, akkor helyettesítsük a  $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k, \rho)$  minta kvantilist az előző  $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_{k-1}, \rho)$  értékkel, és azzal becsüljük a vonatkoztatási paraméter vektorokat, ha pedig  $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k, \rho) \geq \gamma$ , akkor legyen  $\hat{\gamma}(\mathbf{v}_k, \rho) = \gamma$ , és kezdjük el az IS-becslés számítását. Minden más esetben menjünk a következő iterációra, és addig folytassuk az eljárást, ameddig a konvergencia meg nem valósul. Az alábbiakban megadjuk a módosított algoritmus általános alakját, amely azután a korábbiakhoz hasonló módon specializálható az exponenciális, illetve béta eloszlású tevékenységi időkkel bíró sztochasztikus hálózatokban a legrövidebb út problémával kapcsolatos, ritkán bekövetkező esemény valószínűségének a becslésére.

*3.3. Algoritmus.* Az általános CE-módszeren alapuló IS-eljárás módosított változata.

1. Lépés. Válasszunk egy kezdő  $\mathbf{v}_0$  paraméter vektort. Erre megfelel például  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^*$ . Válasszunk egy nullához közeli  $\rho$  pozitív számot a rendszerjellemező függvény mintaértékei  $(1 - \rho)$  kvantilisének számításához.
2. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_0)$  sűrűségfüggvény szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  véletlen mintát. Számítsuk ki a rendszerjellemező függvény  $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$  mintaértékét minden  $i$ -re, és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe:  $S^{(1)} \leq \dots \leq S^{(n)}$ . Legyen  $\hat{\gamma}_0$  a rendszerjellemező függvény mintaértékeinek az  $(1 - \rho)$  kvantilise, azaz  $\hat{\gamma}_0 = S^{(\lceil (1-\rho)n \rceil)}$ . Legyen  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$ ,  $k = 1$ , és menjünk a 3. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
3. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k)$  sűrűségfüggvény szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  véletlen mintát. Számítsuk ki a rendszerjellemező függvény  $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$  mintaértékét minden  $i$ -re, és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe:  $S^{(1)} \leq \dots \leq S^{(n)}$ . Legyen  $\hat{\gamma}_k$  a rendszerjellemező függvény mintaértékeinek az  $(1 - \rho)$  kvantilise, azaz  $\hat{\gamma}_k = S^{(\lceil (1-\rho)n \rceil)}$ .
4. Lépés. Ha  $\hat{\gamma}_k \geq \gamma$ , akkor legyen  $\hat{\gamma}_k = \gamma$ ; különben, ha  $\hat{\gamma}_k < \hat{\gamma}_{k-1}$ , akkor legyen  $\hat{\gamma}_k = \hat{\gamma}_{k-1}$ , és a (7) egyenlet megoldásával adjunk becslést a  $\mathbf{v}_k$  vektorra.
5. Lépés. Simítsuk az új paraméter vektort az alábbi képlet szerint:  $\mathbf{v}_k := \lambda \mathbf{v}_k + (1 - \lambda) \mathbf{v}_{k-1}$ , ahol  $0 \leq \lambda \leq 1$  előre rögzített simító paraméter.
6. Lépés. Ha  $\hat{\gamma}_k = \gamma$ , akkor legyen az utolsó  $\mathbf{v}_k$  paraméter vektor a  $\hat{\mathbf{v}}$  vonatkoztatási paraméter, és menjünk a 7. lépésre, különben legyen  $k = k + 1$ , és ismételjük a 3–6. lépéseket, ameddig el nem érjük a  $\hat{\gamma}_k = \gamma$  egyenlőséget.
7. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{v}})$  sűrűségfüggvény szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét

az alábbi IS-beccsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^*, \hat{\mathbf{v}}).$$

Ekkor a becslés becslt szórásnégyzete:

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W^2(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^*, \hat{\mathbf{v}}) - \hat{L}^2 \right) / N.$$

A  $\rho$  paraméter értéke központi szerepet játszik a CE-algoritmus konvergenciájában, sőt a konvergencia várhatóan csak akkor valósul meg, ha  $\rho$  már „kellőképpen” kicsi értékű. Annak az előre történő meghatározása, hogy milyen kicsi  $\rho$  érték fogadható már el, igen nehéz feladat. Ezt a problémát áthidalandó  $\rho$  értékét adaptív módon lehet változtatni (lásd Rubinstein (1999), Homem-de Mello és Rubinstein (2002)). A 2.1. algoritmus egy ilyen értelmű módosítását jelenti a következő algoritmus. Ehhez a következő konstansok használatára van szükség:  $\rho$ ; ( $0.01 \leq \rho \leq 0.1$ ),  $\theta > 1.0$ ,  $\delta > 0.0$  és  $0.0 < \lambda \leq 1.0$ .

*3.4. Algoritmus.* Az általános CE-módszeren alapuló IS-eljárás Homem-de Mello és Rubinstein-féle módosítása.

1. Lépés. Válasszunk egy kezdő  $\mathbf{v}_0$  paraméter vektort. Erre megfelel például  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^*$ . Válasszunk egy nullához közeli  $\rho_0$  pozitív számot a rendszerjellemező függvény mintaértékei  $(1 - \rho_0)$  kvantilisének számításához.
2. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_0)$  sűrűségfüggvény szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  véletlen mintát. Számítsuk ki a rendszerjellemező függvény  $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$  mintaértékét minden  $i$ -re, és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe:  $S^{(1)} \leq \dots \leq S^{(n)}$ . Legyen  $\hat{\gamma}_0$  a rendszerjellemező függvény mintaértékeinek az  $(1 - \rho_0)$  kvantilise, azaz  $\hat{\gamma}_0 = S^{(\lceil (1 - \rho_0)n \rceil)}$ . Legyen  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$ ,  $k = 1$ , és menjünk a 3. lépésre az iteráció elkezdéséhez.
3. Lépés. Az aktuálisan rendelkezésre álló mintát használva, a (7) egyenlet megoldásával adjunk becslést a  $\mathbf{v}_k$  paraméter vektorra.
4. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \mathbf{v}_k)$  sűrűségfüggvény szerinti új  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  véletlen mintát, és legyen  $\rho_k = \rho$ .
5. Lépés. Számítsuk ki a rendszerjellemező függvény  $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$  mintaértékét minden  $i$ -re, és rendezzük azokat nagyság szerint növekvő sorrendbe:  $S^{(1)} \leq \dots \leq S^{(n)}$ . Legyen  $\hat{\gamma}_k$  a rendszerjellemező függvény mintaértékeinek az  $(1 - \rho_k)$  kvantilise, azaz  $\hat{\gamma}_k = S^{(\lceil (1 - \rho_k)n \rceil)}$ .
6. Lépés. Ha  $\hat{\gamma}_k \geq \gamma$ , akkor legyen  $\hat{\gamma}_k = \gamma$ , és a (7) egyenlet megoldásával adjunk becslést a  $\mathbf{v}_k$  paraméter vektorra. Legyen ez a  $\hat{\mathbf{v}}$  vonatkoztatási paraméter és menjünk a 8. lépésre.

7. Lépés. Különbön ellenőrizzük, hogy létezik-e olyan  $\bar{\rho}$  érték, hogy  $S^{[(1-\bar{\rho})n]} \geq \min\{\gamma, \hat{\gamma}_{k-1} + \delta\}$ .
  - 7.1. Ha  $\bar{\rho} = \rho_k$ , akkor legyen  $k = k + 1$ , és ismételjük az iterációt a 3. lépéstől.
  - 7.2. Ha  $\bar{\rho} < \rho_k$ , akkor legyen  $\rho_k = \bar{\rho}$ , és menjünk az 5. lépésre.
  - 7.3. Ha létezik ilyen  $\bar{\rho}$ , akkor legyen  $n = \theta n$ , és menjünk a 4. lépésre.
8. Lépés. Generáljunk egy  $f(\mathbf{x}; \hat{\nu})$  sűrűségfüggvény szerinti  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  véletlen mintát. Becsüljük a ritkán bekövetkező esemény valószínűségét az alábbi IS-becsléssel:

$$\hat{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^*, \hat{\nu}).$$

Ekkor a becslés becslt szórásnégyzete:

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}^{(i)}) W^2(\mathbf{X}^{(i)}; \mathbf{v}^*, \hat{\nu}) - \hat{L}^2 \right) / N.$$

#### 4. Numerikus eredmények

Ebben a szakaszban olyan numerikus példákat mutatunk be, amelyek szemléltetik a CE-módszeren alapuló IS-eljárás alkalmazhatóságát, és a nyers Monte Carlo-módszerhez viszonyított hatékonyságát exponenciális, illetve béta eloszlású tevékenységeket tartalmazó kis, közepes és nagyméretű sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események valószínűségbecslésére. A nyers Monte Carlo-módszerhez viszonyított hatékonyságot a Hammersley és Handscombe (1967) klasszikus könyvében javasolt

$$\text{hatékonyság} = \frac{\text{szórásnégyzet} \times \text{CPU-idő (CMC)}}{\text{szórásnégyzet} \times \text{CPU-idő (CE)}}$$

mutatóval fogjuk mérni.

A számításokat Fortran nyelvű kóddal, 2.4 GHz órajelű, Intel © Pentium © proceszoros számítógépen végeztük el.

*4.1. Példa.* Kisméretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők béta eloszlásúak.

Ebben a példában egy 4 csúcú és 5 élű sztochasztikus hálózatot tekintünk ([6] 1. ábra). Felteszszük, hogy a tevékenységi idők független, béta eloszlású valószínűségi változók. Legyenek a kezdeti paraméterek a következők:

$$\alpha = (0.350, 0.400, 0.310, 0.430, 0.420) \text{ és } \beta = (0.350, 0.440, 0.310, 0.430, 0.420).$$

Tegyük fel, hogy annak a valószínűségét akarjuk becsülni, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint  $\gamma = 1.99$ . Az  $N = 200000$  mintaelemszámú CMC-eljárás  $8.0 \times 10^{-5}$  becslést adott, míg a CE-módszeren alapuló IS-eljárás  $\rho = 0.05$  paraméterrel,  $n = 2000$  elemszámú mintával végzett 5 iterációt követő  $N = 200000$  mintaelemszámú IS-becsléssel  $4.2 \times 10^{-5}$  becslést eredményezett. Az ehhez szükséges többlet számolási igény minimális volt, ezért az IS-eljárás által elért szórás-csökkenés 1312 hatékonyságot eredményezett. Az alábbi táblázat a béta eloszlások vonatkoztatási paramétereinek és a  $\hat{\gamma}_k = S^{[(1-\rho)^n]}$   $(1 - \rho)$ -kvantilisek konvergáló sorozatát mutatja:

**1. táblázat.** A béta eloszlású vonatkoztatási paraméterek iterációnkénti változása.

$k$	$\hat{\alpha}$					$\hat{\beta}$					$\hat{\gamma}_k$
0	0.35	0.40	0.31	0.43	0.42	0.35	0.44	0.31	0.43	0.42	
1	0.58	0.69	0.31	0.75	0.71	0.35	0.45	0.31	0.45	0.43	1.42
2	1.25	1.26	0.31	1.35	1.53	0.36	0.46	0.30	0.45	0.44	1.70
3	3.05	2.70	0.32	2.52	2.59	0.36	0.46	0.31	0.46	0.44	1.93
4	6.23	5.55	0.31	5.09	5.26	0.37	0.47	0.30	0.48	0.45	1.96
5	12.1	10.3	0.31	10.1	11.6	0.37	0.50	0.31	0.50	0.47	1.99

Az alábbi táblázat a nyers Monte Carlo-szimulációnak erre a feladatra elért eredményeit tartalmazza. A továbbiak során ehhez fogjuk viszonyítani a különböző CE-módszereken alapuló IS-eljárások hatékonyságát.

**2. táblázat.** Kisméretű hálózat nyers Monte Carlo-szimulációval nyert eredményei.

a csúcok száma = 4	az élek száma = 5	$\gamma = 1.99$	minta méret = $2 \times 10^5$
	becslés	szórás	CPU-idő
CMC	$8.0 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-5}$	2.42

**3. táblázat.** A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek összehasonlító táblázata.

		Alap				Módosított				Homem de Mello és Rubinstein			
		$n = 2 \times 10^3$				$n = 2 \times 10^3$				$n = 2 \times 10^3$			
		$N = 2 \times 10^5$				$N = 2 \times 10^5$				$N = 2 \times 10^5$			
$\rho$	$\lambda$	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság
0.10	0.1	$4.3 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-7}$	5126.5	$4.3 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-7}$	5106.3	$4.2 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-7}$	<b>1113.2</b>	$4.2 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-7}$	<b>1113.2</b>
0.10	0.5	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-7}$	5346.9	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.8 \times 10^{-7}$	3454.4	$4.2 \times 10^{-5}$	$6.8 \times 10^{-7}$	418.1	$4.2 \times 10^{-5}$	$6.8 \times 10^{-7}$	418.1
0.10	0.7	$4.2 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-7}$	<b>9190.5</b>	$4.2 \times 10^{-5}$	$1.8 \times 10^{-7}$	<b>9302.8</b>	$4.3 \times 10^{-5}$	$4.7 \times 10^{-7}$	879.5	$4.3 \times 10^{-5}$	$4.7 \times 10^{-7}$	879.5
0.10	1.0	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-7}$	3717.7	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.8 \times 10^{-7}$	3568.1	$4.3 \times 10^{-5}$	$9.4 \times 10^{-7}$	219.5	$4.3 \times 10^{-5}$	$9.4 \times 10^{-7}$	219.5
0.05	0.1	$4.3 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-7}$	1900.6	$4.3 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-7}$	1934.4	$4.2 \times 10^{-5}$	$7.4 \times 10^{-7}$	311.2	$4.2 \times 10^{-5}$	$7.4 \times 10^{-7}$	311.2
0.05	0.5	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-7}$	4208.7	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-7}$	4215.5	$4.1 \times 10^{-5}$	$9.0 \times 10^{-7}$	238.3	$4.1 \times 10^{-5}$	$9.0 \times 10^{-7}$	238.3
0.05	0.7	$4.2 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-7}$	2393.2	$4.2 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-7}$	2389.7	$4.3 \times 10^{-5}$	$7.1 \times 10^{-7}$	395.2	$4.3 \times 10^{-5}$	$7.1 \times 10^{-7}$	395.2
0.05	1.0	$4.0 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-6}$	223.2*	$4.0 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-6}$	226.7*	$4.3 \times 10^{-5}$	$7.6 \times 10^{-7}$	353.8	$4.3 \times 10^{-5}$	$7.6 \times 10^{-7}$	353.8
0.01	0.1	$4.3 \times 10^{-5}$	$4.3 \times 10^{-7}$	1426.6	$4.3 \times 10^{-5}$	$4.3 \times 10^{-7}$	1424.8	$4.2 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-6}$	85.0	$4.2 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-6}$	85.0
0.01	0.5	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-7}$	5788.9	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-7}$	5755.5	$3.9 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-6}$	51.2	$3.9 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-6}$	51.2
0.01	0.7	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-7}$	3990.4	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-7}$	3958.7	$4.2 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-6}$	54.1	$4.2 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-6}$	54.1
0.01	1.0	$4.2 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-7}$	7127.4	$4.2 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-7}$	7193.9	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-6}$	65.3	$4.2 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-6}$	65.3



**4. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 1.99$ ,  $n = 2 \times 10^3$

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
1	1.195	1.197	1.197
2	1.414	1.417	1.417
3	1.575	1.588	1.620
4	1.722	1.725	1.750
5	1.828	1.828	1.832
6	1.894	1.893	1.899
7	1.937	1.936	1.934
8	1.961	1.961	1.958
9	1.973	1.973	1.973
10	1.983	1.983	1.981
11	1.989	1.989	1.990
12	1.990	1.990	

**5. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.05$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\gamma = 1.99$ ,  $n = 2 \times 10^3$

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
1	1.395	1.395	1.398
2	1.419	1.419	1.908
3	1.908	1.908	1.990
4	1.985	1.984	
5	1.990	1.990	

**6. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.01$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\gamma = 1.99$ ,  $n = 2 \times 10^3$

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
1	1.741	1.741	1.741
2	1.777	1.777	1.990
3	1.983	1.983	
4	1.990	1.990	

**7. táblázat.** A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek az összehasonlító táblázata

		Alap			Módosított			Homem de Mello és Rubinstein		
		$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
$\rho$	$\lambda$	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság
0.10	0.1	$6.7 \times 10^{-6}$	$2.1 \times 10^{-7}$	1514.6	$7.1 \times 10^{-6}$	$2.4 \times 10^{-7}$	996.9	$6.6 \times 10^{-6}$	$2.9 \times 10^{-7}$	303.1
0.10	0.5	$8.3 \times 10^{-6}$	$8.0 \times 10^{-7}$	136.7	$8.1 \times 10^{-6}$	$9.8 \times 10^{-7}$	91	$6.6 \times 10^{-6}$	$2.4 \times 10^{-7}$	1531.4
0.10	0.7	$8.7 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-6}$	47.4	$9.4 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^{-7}$	17.2	$7.0 \times 10^{-6}$	$4.2 \times 10^{-7}$	485.9
0.10	1.0	$2.8 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-5}$	0.38	$7.1 \times 10^{-6}$	$1.6 \times 10^{-6}$	32.6	$6.6 \times 10^{-6}$	$3.8 \times 10^{-7}$	621
0.05	0.1	$7.5 \times 10^{-6}$	$2.6 \times 10^{-7}$	1116.1	$7.2 \times 10^{-6}$	$2.4 \times 10^{-7}$	1399.8	$7.3 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-7}$	911.8
0.05	0.5	$6.6 \times 10^{-6}$	$3.6 \times 10^{-7}$	668.8	$2.9 \times 10^{-6}$	$3.6 \times 10^{-7}$	677.4	$7.4 \times 10^{-6}$	$4.7 \times 10^{-7}$	391.6
0.05	0.7	$6.2 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-7}$	366	$3.7 \times 10^{-8}$	$5.0 \times 10^{-9}$	366.7	$6.7 \times 10^{-6}$	$4.9 \times 10^{-7}$	369.6
0.05	1.0	$6.3 \times 10^{-6}$	$6.4 \times 10^{-7}$	223.3	$6.8 \times 10^{-6}$	$6.4 \times 10^{-6}$	226.8	$8.9 \times 10^{-6}$	$2.4 \times 10^{-6}$	15.1
0.01	0.1	$6.9 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-7}$	344.0	$6.8 \times 10^{-6}$	$4.7 \times 10^{-7}$	394.8	$6.8 \times 10^{-6}$	$6.8 \times 10^{-7}$	182
0.01	0.5	$6.3 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-6}$	4.7	$1.2 \times 10^{-6}$	$3.6 \times 10^{-6}$	6.9	$1.7 \times 10^{-5}$	$6.4 \times 10^{-6}$	2.1
0.01	0.7	$6.6 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-6}$	31.3	$6.9 \times 10^{-8}$	$7.0 \times 10^{-7}$	182.4	$2.9 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-6}$	47.6
0.01	1.0	$1.7 \times 10^{-6}$	$3.1 \times 10^{-7}$	946.7	$1.7 \times 10^{-10}$	$2.6 \times 10^{-6}$	13.1	$9.1 \times 10^{-6}$	$7.9 \times 10^{-6}$	1.5

4.2. *Példa.* Közepes méretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők béta eloszlásúak.

A következő példában a Prékopa, Long és Szántai (2003) dolgozatban közölt közepes méretű sztochasztikus hálózatot használtuk. Ennek 28 csúcsa és 66 éle van. Az 1-es és a 28-as csúcsok rendre a kezdő- és a végcsúcsok. Az élek tevékenységi időket reprezentálnak, amelyek független béta eloszlásúak.

A paraméter vektorok komponenseinek véletlenszerűen adtunk  $1.0 + u(0, 1)$  kezdeti értékeket (melyek a valódi paraméter értékekkel egybeesnek). Itt  $u(0, 1)$  a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számot jelent. A CE-fázis minta elemszáma  $n = 2000$  volt, a  $\rho$  paramétert a  $0.01 \leq \rho \leq 0.1$ , a  $\lambda$  paramétert a  $0.0 < \lambda < 1.0$  feltételnek elegettevően választottuk. Annak a valószínűségét becsültük, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint  $\gamma = 3$ . Az  $N = 200000$  mintaelemszámú CMC-eljárás  $1.5 \times 10^{-5}$  becslést adott. A különböző CE-módszeren alapuló IS-eljárások hatékonyságát ehhez az eredményhez viszonyítva adtuk meg a következő táblázatban.

**8. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.05$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\gamma = 3$ ,  $n = 2 \times 10^3$

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
1	2.171	2.164	2.167
2	2.456	2.171	2.436
3	2.663	2.456	2.728
4	2.875	2.663	3.000
5	3.000	2.875	
6		3.000	

**9. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 3$ ,  $n = 2 \times 10^3$

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
1	2.030	2.044	2.044
2	2.112	2.111	2.112
3	2.138	2.135	2.150
4	2.205	2.187	2.195
5	2.197	2.215	2.255
6	2.272	2.245	2.288

9. táblázat: (folytatás)

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
7	2.278	2.279	2.306
8	2.343	2.311	2.356
9	2.359	2.349	2.418
10	2.385	2.374	2.434
11	2.415	2.383	2.481
12	2.431	2.408	2.513
13	2.453	2.459	2.541
14	2.461	2.484	2.577
15	2.491	2.488	2.603
16	2.533	2.516	2.649
17	2.574	2.539	2.676
18	2.578	2.557	2.709
19	2.592	2.578	2.749
20	2.600	2.591	2.769
21	2.631	2.635	2.818
22	2.671	2.640	2.863
23	2.665	2.663	2.869
24	2.696	2.663	2.914
25	2.719	2.672	2.939
26	2.747	2.698	3.000
27	2.759	2.722	
28	2.740	2.740	
29	2.769	2.754	
30	2.774	2.776	
31	2.809	2.783	
32	2.837	2.822	
33	2.851	2.839	
34	2.852	2.851	
35	2.887	2.884	
36	2.909	2.899	
37	2.957	2.906	
38	2.974	2.929	
39	3.000	2.948	

9. táblázat: (folytatás)

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
40		2.960	
41		2.978	
42		2.999	
43		3.000	

**10. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.01$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\gamma = 3$ ,  $n = 2 \times 10^3$

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
1	2.388	2.421	2.421
2	2.699	2.743	2.743
3	2.962	3.000	3.000
4	3.000		

*4.3. Példa.* Nagyméretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők béta eloszlásúak.

Ebben a példában egy véletlenszerűen előállított, viszonylag nagyméretű sztochasztikus hálózatot használtunk. Ennek 500 csúcsa és 1000 éle volt. Az élek sztochasztikusan független, béta eloszlású tevékenységi időket reprezentáltak. A paraméter vektorok komponenseinek véletlenszerűen adtuk  $0.1 + 8.0 \times u(0, 1)$  kezdeti értékeket (melyek a valódi paraméter értékekkel egybeesnek). A CE-fázis minta elemszáma  $n = 2000$  volt, a  $\rho$  paramétert a  $0.01 \leq \rho \leq 0.1$ , a  $\lambda$  paramétert a  $0.0 < \lambda < 1.0$  feltételnek elegettevően választottuk. Annak a valószínűségét becsültük, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint  $\gamma = 52.0$ . Az  $N = 200000$  mintaelemszámú CMC-eljárás  $5.0 \times 10^{-5}$  becslést adott. A különböző CE-módszeren alapuló IS-eljárások hatékonyságát ehhez az eredményhez viszonyítva adtuk meg a következő táblázatban.

**11. táblázat.** A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek az összehasonlító táblázata ( $\rho = 0.01$  esetén mindig  $n = 4 \times 10^3$  elemszámú mintát használtunk)

		Alap			Módosított			Homem de Mello és Rubinstein		
		$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
$\rho$	$\lambda$	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság
0.10	0.1	$3.3 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-6}$	12.42	$3.3 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-6}$	12.4	$3.5 \times 10^{-5}$	$5.3 \times 10^{-6}$	4.3
0.10	0.5	$1.9 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-6}$	8.1*	$1.9 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-6}$	8.2*	$1.3 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-6}$	40.4
0.10	0.7	$4.9 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-6}$	69.4	$4.9 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-6}$	69.8	$5.4 \times 10^{-5}$	$4.0 \times 10^{-5}$	0.1
0.10	1.0	$1.0 \times 10^{-6}$	$4.4 \times 10^{-6}$	763.1	$1.0 \times 10^{-6}$	$4.4 \times 10^{-7}$	765.1	$2.9 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-6}$	122.8
0.05	0.1	$3.5 \times 10^{-5}$	$7.9 \times 10^{-6}$	2.6	$3.7 \times 10^{-5}$	$7.8 \times 10^{-5}$	3.09	$3.0 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-6}$	12
0.05	0.5	$2.3 \times 10^{-6}$	$5.4 \times 10^{-7}$	546.9	$4.7 \times 10^{-6}$	$2.0 \times 10^{-6}$	39.5	$1.8 \times 10^{-5}$	$9.4 \times 10^{-7}$	2.0
0.05	0.7	$1.2 \times 10^{-6}$	$4.4 \times 10^{-7}$	767.9	$3.8 \times 10^{-7}$	$1.4 \times 10^{-7}$	7388.8	$2.4 \times 10^{-6}$	$8.7 \times 10^{-7}$	209.5
0.05	1.0	$1.9 \times 10^{-7}$	$8.5 \times 10^{-8}$	20001.3	$1.9 \times 10^{-7}$	$5.5 \times 10^{-8}$	48182.2	$1.2 \times 10^{-6}$	$4.1 \times 10^{-6}$	986.7
0.01	0.1	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.5 \times 10^{-5}$	12.7	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.5 \times 10^{-5}$	12.7	$3.0 \times 10^{-5}$	$6.8 \times 10^{-5}$	2.8
0.01	0.5	$5.1 \times 10^{-7}$	$3.5 \times 10^{-7}$	1279.2	$5.1 \times 10^{-7}$	$3.5 \times 10^{-7}$	1307.8	$2.3 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-5}$	0.7
0.01	0.7	$2.5 \times 10^{-10}$	$1.5 \times 10^{-10}$	$\infty$	$2.5 \times 10^{-10}$	$1.5 \times 10^{-10}$	$\infty$	$1.3 \times 10^{-7}$	$6.0 \times 10^{-8}$	47212.8
0.01	1.0	$7.5 \times 10^{-9}$	$1.8 \times 10^{-9}$	56069280	$2.1 \times 10^{-9}$	$1.8 \times 10^{-9}$	56126172.1	$3.0 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-5}$	1.0

**12. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.02$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $\gamma = 52$ ,  $n_1 = 2 \times 10^3$

1	48.139	48.371	48.371
2	48.447	48.371	48.520
3	48.674	48.520	48.692
4	48.887	48.676	48.719
5	49.102	48.904	49.002
6	49.077	49.097	49.206
7	49.510	49.335	49.486
8	49.700	49.463	49.683
9	49.796	49.468	49.756
10	50.027	49.630	50.073
11	50.152	50.008	50.190
12	50.448	50.197	50.409
13	50.436	50.522	50.409
14	50.575	50.610	50.417
15	50.857	50.726	50.939
16	51.268	51.418	50.965
17	51.361	51.418	51.026
18	51.506	51.472	51.370
19	51.777	51.472	51.669
20	51.564	51.806	52.000
21	51.885	52.000	
22	52.000		

**13. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.01$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\gamma = 52$ ,  $n_1 = 2 \times 10^3$

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
1	48.855	48.855	48.855
2	48.865	48.865	52.000
3	50.736	50.736	
4	52.000	52.000	

**14. táblázat.** A  $\hat{\gamma}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  értékek különböző CE-verziók melletti konvergenciája, amikor  $\rho = 0.05$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\gamma = 52$ ,  $n_1 = 2 \times 10^3$

$t$	Alap	Módosított	HdM és R
1	47.439	47.537	47.566
2	49.391	49.409	49.508
3	51.159	51.131	52.000
4	52.000	52.000	

*4.4. Példa.* Kisméretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők exponenciális eloszlásúak.

Ebben a példában ugyanazt a 4 csúcsú és 5 élű sztochasztikus hálózatot tekintjük, mint amelyet a béta eloszlású, kisméretű sztochasztikus hálózat esetén már használtunk. Felteszszük, hogy a tevékenységi idők független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyenek a kezdeti paraméterek a következők:  $\mathbf{v} = (0.350, 0.400, 0.310, 0.430, 0.420)$ . Tegyük fel, hogy annak a valószínűségét akarjuk becsülni, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint  $\gamma = 2$ . A CE-eljárási részben mindig  $n = 2000$  elemű mintát használtunk, kivéve a  $\rho = 0.04$  eseteket, amikor a 3. iterációt követően áttértünk az  $N = 200000$  elemű minták használatára. Az alábbi táblázat az exponenciális eloszlások vonatkoztatási paramétereit, valamint a  $\hat{\gamma}_k = S^{[(1-\rho)^n]}$   $(1 - \rho)$ -kvantilisek konvergáló sorozatát mutatja:

**15. táblázat.** Az exponenciális eloszlású vonatkoztatási paraméterek iterációnkénti változása.

$k$	$\hat{v}_1$	$\hat{v}_2$	$\hat{v}_3$	$\hat{v}_4$	$\hat{v}_5$	$\hat{\gamma}$
0	0.25	0.40	0.10	0.30	0.20	
1	0.64	0.74	0.10	0.58	0.45	0.78
2	1.45	1.44	0.11	0.53	0.64	1.66
3	1.69	1.66	0.11	0.66	0.75	2.00

Az alábbi táblázat a nyers Monte Carlo-szimulációnak erre a feladatra elért eredményeit tartalmazza. A továbbiak során ehhez fogjuk viszonyítani a különböző CE-módszereken alapuló IS-eljárások hatékonyságát.

**16. táblázat** Kisméretű hálózat nyers Monte Carlo-szimulációval nyert eredményei

a csúcsok száma = 4	az élek száma = 5	$\gamma = 2$	minta méret = $2 \times 10^5$
	becslés	szórás	CPU-idő
CMC	$3.5 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-5}$	0.20



**17. táblázat.** A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparaméterei melletti eredményeinek az összehasonlító táblázata

		Alap			Módosított			Homem de Mallo és Rubinstein		
		$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$			$n = 2 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
$\rho$	$\lambda$	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság
0.10	0.1	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-7}$	765.1	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-7}$	1094.7	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-7}$	1020
0.10	0.5	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.3 \times 10^{-7}$	945.5	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.3 \times 10^{-7}$	809.8	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.3 \times 10^{-7}$	1013.9
0.10	0.7	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-7}$	885.5	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-7}$	739.1	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-7}$	946.5
0.10	1.0	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-7}$	930.2	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-7}$	708.7	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-7}$	985.2
0.05	0.1	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-7}$	1172	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-7}$	824.1	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-7}$	1245
0.05	0.5	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-7}$	966.4	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-7}$	606.2	$1.6 \times 10^{-5}$	$4.0 \times 10^{-7}$	1013.5
0.05	0.7	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-7}$	1001	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-7}$	712.5	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-7}$	1065.4
0.05	1.0	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-7}$	550.6	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-7}$	764.9	$1.6 \times 10^{-5}$	$5.7 \times 10^{-7}$	577.7
0.01	0.1	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.9 \times 10^{-7}$	660.5	$1.7 \times 10^{-5}$	$4.9 \times 10^{-7}$	368.6	$1.7 \times 10^{-5}$	$4.0 \times 10^{-7}$	712.4
0.01	0.5	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-7}$	727.2	$1.7 \times 10^{-5}$	$4.2 \times 10^{-7}$	419.8	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-7}$	770.3
0.01	0.7	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-7}$	740.6	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.5 \times 10^{-7}$	586.6	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-7}$	773.2
0.01	1.0	$1.6 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-7}$	370.3	$1.6 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-7}$	369.2	$1.6 \times 10^{-5}$	$4.6 \times 10^{-6}$	384.8

4.5. *Példa.* Közepes méretű sztochasztikus hálózat esete, amelyben a tevékenység idők exponenciális eloszlásúak.

A következő példában is a Prékopa, Long és Szántai (2003) dolgozatban közölt közepes méretű sztochasztikus hálózatot használtuk. Ennek 28 csúcsa és 66 éle van. Az 1-es és a 28-as csúcsok rendre a kezdő- és a végcsúcsok. Az élek tevékenységi időket reprezentálnak, amelyek független exponenciális eloszlásúak. A paraméter vektorok komponenseinek véletlenszerűen adtunk  $1.0 + u(0, 1)$  kezdeti értékeket (melyek a valódi paraméter értékekkel egybeesnek). Itt  $u(0, 1)$  a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számot jelent. A  $\rho$  paramétert a  $0.001 \leq \rho \leq 0.01$ , a  $\lambda$  paramétert a  $0.0 < \lambda < 1.0$  feltételnek elegettevően választottuk. Annak a valószínűségét becsültük, hogy a legrövidebb út hossza nagyobb, mint  $\gamma = 2$ .

Az alábbi táblázat a nyers Monte Carlo-szimulációnak erre a feladatra elért eredményeit tartalmazza. A továbbiak során ehhez fogjuk viszonyítani a különböző CE-módszereken alapuló IS-eljárások hatékonyságát.

**18. táblázat.** Kisméretű hálózat nyers Monte Carlo-szimulációval nyert eredményei

a csúcsok száma = 4	az élek száma = 5	$\gamma = 2$	minta méret = $2 \times 10^5$
	becslés	szórás	CPU-idő
CMC	$1.5 \times 10^{-5}$	$8.6 \times 10^{-6}$	10.13

**19. táblázat.** A CE-módszeren alapuló IS-eljárás különböző verziói és kezdőparamétereinek melletti eredményeinek az összehasonlító táblázata

		Alap			Módosított			Homem de Mello és Rubinstein		
		$n = 4 \times 10^3$			$n = 4 \times 10^3$			$n = 4 \times 10^3$		
		$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$			$N = 2 \times 10^5$		
$\rho$	$\lambda$	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság	becslés	szórás	haté- kony- ság
0.001	0.1	$1.2 \times 10^{-7}$	$5.6 \times 10^{-8}$	$\infty$	$2.5 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-7}$	277.2	$6.8 \times 10^{-7}$	$2.6 \times 10^{-7}$	$5.41$
0.001	0.5	$2.7 \times 10^{-9}$	$1.7 \times 10^{-9}$	$\infty$	$3.5 \times 10^{-7}$	$2.7 \times 10^{-7}$	811.8	$1.7 \times 10^{-8}$	$1.2 \times 10^{-8}$	$\infty$
0.001	0.7	$1.0 \times 10^{-11}$	$9.0 \times 10^{-12}$	$\infty$	$8.4 \times 10^{-7}$	$4.5 \times 10^{-7}$	296.5	$1.1 \times 10^{-10}$	$5.2 \times 10^{-10}$	$\infty$
0.001	1.0	$1.6 \times 10^{-14}$	$9.3 \times 10^{-16}$	$\infty$	$3.7 \times 10^{-9}$	$3.2 \times 10^{-9}$	$\infty$	$1.6 \times 10^{-11}$	$1.3 \times 10^{-11}$	$\infty$
0.005	0.1	$2.2 \times 10^{-6}$	$5.5 \times 10^{-7}$	113.8	$3.7 \times 10^{-6}$	$7.3 \times 10^{-7}$	112.8	$7.9 \times 10^{-7}$	$4.7 \times 10^{-7}$	167.7
0.005	0.5	$1.8 \times 10^{-7}$	$1.1 \times 10^{-7}$	4071	$7.3 \times 10^{-7}$	$4.6 \times 10^{-7}$	273.6	$1.8 \times 10^{-7}$	$1.1 \times 10^{-7}$	4113.6
0.005	0.7	$4.8 \times 10^{-16}$	$4.8 \times 10^{-16}$	$\infty$	$3.6 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-7}$	5396.9	$4.2 \times 10^{-16}$	$4.1 \times 10^{-16}$	$\infty$
0.005	1.0	****	****	-	$3.2 \times 10^{-8}$	$2.9 \times 10^{-8}$	$\infty$	****	****	-
0.010	0.1	$1.3 \times 10^{-8}$	$6.3 \times 10^{-9}$	$\infty$	$3.0 \times 10^{-6}$	$5.1 \times 10^{-7}$	142.2	$2.8 \times 10^{-7}$	$1.4 \times 10^{-7}$	1462.7
0.010	0.5	$6.7 \times 10^{-12}$	$5.4 \times 10^{-12}$	$\infty$	$1.8 \times 10^{-6}$	$5.7 \times 10^{-7}$	170.6	$6.8 \times 10^{-12}$	$5.4 \times 10^{-12}$	$\infty$
0.010	0.7	$2.2 \times 10^{-7}$	$6.8 \times 10^{-8}$	$\infty$	$3.4 \times 10^{-10}$	$2.1 \times 10^{-10}$	$\infty$	$6.9 \times 10^{-15}$	$6.8 \times 10^{-15}$	$\infty$
0.010	1.0	****	****	-	$9.0 \times 10^{-9}$	$2.4 \times 10^{-10}$	$\infty$	****	****	-

### Hivatkozások

- [1] ASMUSSEN, S. AND RUBINSTEIN, R.Y., (1995). *Steady state rare events simulation in queueing models and its complexity properties*. In *Advances in Queueing: Theory, Methods and Open Problems*, 429–461. CRC Press.
- [2] DEÁK, I., (2001). *Computer experiences with successive regression approximations for solving equations*, Optimization Theory (F. Gianessi, P. Pardalos, T. Rapcsák eds.) Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 65–80.
- [3] DEÁK, I., (2002). *Computing two-stage stochastic programming problems by successive regression approximations*, Stochastic Optimizatin Techniques – Numerical Methods and Technical Applications (ed. K. Marti) Springer LNEMS Vol. **513**, 91–102.
- [4] DE BOER, P.T., (2000). *Analysis and efficient simulation of queueing models of telecommunication systems*. Ph.D. thesis, University of Twente.
- [5] DE BOER, P.T., KROESE, D.P. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2002). *A fast cross entropy method for estimating buffer overflows in queueing networks*. In *Fourth Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems, RESIM/COP 2002*.
- [6] DE BOER, P.T., KROESE, D.P., MANNOR, S. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2005). *A tutorial on the cross entropy method*. *Annals of Operations Research* **134** (1) 19–67.
- [7] DE BOER, P.T., NICOLA, V.F. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2000). *Adaptive importance sampling simulation of queueing networks*, [www.cs.utwente.nl/~ptdeboer/ce/html](http://www.cs.utwente.nl/~ptdeboer/ce/html).
- [8] FÁBIÁN, C. I. AND SZŐKE, Z., (2007). *Solving two-stage stochastic programming problems with level decomposition*, *Computational Management Science* **4** (2007), 313–353.
- [9] GARVELS, M.J.J., (2000). *The splitting method in rare event simulation*. Ph.D. thesis, University of Twente.
- [10] HAMMERSLEY, J.M. AND HANDSCOMB, D.C., (1967). *Monte Carlo Methods*. London Methuen & Coltd.
- [11] HOMEM-DE MELLO, T. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2002a). *Rare event probability estimation for static models via cross-entropy and importance sampling*. Submitted for publication.
- [12] HOMEM-DE MELLO, T. AND RUBINSTEIN, R.Y., (2002b). *Estimation of Rare event probabilities using cross-entropy*. In *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference*, ed. E. Yucesan C.-H. Chen, J.L. Snowdon, and J.M. Charnes.
- [13] KEITH, J. AND KROESE, D.P., *SABRES: Sequence Alignment by Rare Event Simulation*. Submitted, [www.maths.uq.edu.au/~kroese/publications.html](http://www.maths.uq.edu.au/~kroese/publications.html).
- [14] LIEBER, D., RUBINSTEIN, R.Y. AND ELMAKIS, (1997). *Quick estimation of rare events in stochastic networks*. *IEEE Transactions on Reliability*, **46**(2), 254–265.
- [15] KLEIJNEN, J.P.C. AND RUBINSTEIN, R.Y., (1996). *Optimization and sensitivity analysis of computer simulation models by the score function method*. *European Journal of Operations Research*, **88**, 413–427.
- [16] MCLACHLAN, G. AND KRISHNAN, T., (1997). *The EM algorithm and extensions*. John Wiley & Sons.
- [17] PRÉKOPA A., (1995). *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht és Akadémiai Kiadó, Budapest.

- [18] PRÉKOPA, A., LONG, J. AND SZÁNTAI, T., (2003). *New bounds and approximation for the probability distribution of the length of the critical path*. in: Marti K, Ermoliev Y, Pflug G. (eds) *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Dynamical Stochastic Optimization*, Vol. **532**. Springer, Berlin, 293–320.
- [19] RUBINSTEIN, R.Y., (1997). *Optimization of computer simulation models with rare events*. *European Journal of Operations Research*, **99**, 89–112.
- [20] RUBINSTEIN, R.Y., (1999). *The Cross-Entropy method for combinatorial and continuous Optimization*. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **1**, 127–190.
- [21] RUBINSTEIN, R.Y., (2001). *Combinatorial optimization, cross-entropy, ants and rare events*. In S. Uryasev and P.M. Pardalos, editors, *Stochastic Optimization: Algorithms and Applications*, Kluwer, 304–358.
- [22] RUBINSTEIN, R.Y., (2002). *Cross-entropy and rare events for maximal cut and partition problems*, *Acm Transactions on Modeling and Computer Simulation*, Vol. **12**, No. **1**, 27–53.
- [23] RUBINSTEIN, R.Y. AND KROESE, D., (2002). *Lecture notes on the cross-entropy method*. Manuscript.
- [24] RUBINSTEIN, R.Y. AND MELAMED, B., (1998). *Modern Simulation and Modeling*, John Wiley & Sons, New York.
- [25] RUBINSTEIN, R.Y. AND SHAPIRO, A., (1993). *Discrete Event Systems: Sensitivity Analysis and Stochastic Optimization via the Score Function Method*, John Wiley & Sons, New York.
- [26] SHAHABUDDIN, P., (1995). *Rare Event Simulation of Stochastic Systems*, Proceedings of the 1995 Winter Simulation Conference, Washington, D.C., IEEE Press, 178–185.

(Beérkezett: 2007. szeptember 25.)

GOUDA ASHRAF és SZÁNTAI TAMÁS  
BMGE, TTK  
Matematikai Intézet  
1111 Budapest, Műgyetem rkp. 3.  
szantai@math.bme.hu

ESTIMATION OF RARE EVENT PROBABILITIES IN STOCHASTIC NETWORKS  
WITH EXPONENTIAL AND BETA PROBABILITY DISTRIBUTIONS

ASHRAF GOUDA AND TAMÁS SZÁNTAI

The paper is dealing with estimation of rare event probabilities in stochastic networks. The well known variance reduction technique, called Importance Sampling (IS) is an effective tool for doing this. The main idea of IS is to simulate the random system under a modified set of

*Alkalmazott Matematikai Lapok (2009)*

parameters, so as to make the occurrence of the rare event more likely. The major problem of the IS technique is that the optimal modified parameters, called reference parameters to be used in IS are usually very difficult to obtain. Rubinstein(1997) developed the Cross Entropy (CE) method for the solution of this problem of IS technique and then he and his collaborators applied this for estimation of rare event probabilities in stochastic networks with exponential distribution (see P.T. De Boer, D.P. Kroese, S. Mannor and R.Y. Rubinstein(2004)). In this paper we test this simulation technique also for medium sized stochastic networks and compare its effectiveness to the simple crude Monte Carlo (CMC) simulation. The effectiveness of a variance reduction simulation algorithm is measured in the following way. We calculate the product of the necessary CPU time and the estimated variance of the estimation. This product is compared to the same for the simple Crude Monte Carlo simulation. This was originally used for comparison of different variance reduction techniques by Hammersley and Handscombe (1967). The main result of the paper is the extension of CE method for estimation of rare event probabilities in stochastic networks with beta distributions. In this case the calculation of reference parameters of the importance sampling distribution requires numerical solution of a nonlinear equation system. This is done by applying a Newton–Raphson iteration scheme. In this case the CPU time spent for calculation of the reference parameter values can not be neglected. Numerical results are also presented.