*Alkalmazott Matematikai Lapok* **26** (2009), 365-379.

# ITERÁCIÓFÜGGETLEN LÉPÉSHOSSZ ÉS LÉPÉSBECSLÉS A DIKIN-ALGORITMUS ALKALMAZÁSÁBAN A LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADATRA

MIKLÓS ZOLTÁN, TAKÁCS SZABOLCS

Az alábbi cikkben bemutatjuk a Dikin ellipszoid módszert a lineáris programozási feladatra az [1] könyvben található fejezet alapján. A fenti hivatkozáson a komplexitás vizsgálat egyik bizonyítása hibás.

A hibát kijavítva az eredetinél pontosabb tételt kapunk. Egy iterációfüggetlen lépéshosszt határozunk meg a Dikin ellipszoid módszerhez, melynek segítségével az algoritmus lépésigényére felső becslést lehet adni.

A cikkben található jelölések a könnyebb érthetőség kedvéért az [1] könyv jelöléseivel egyeznek meg.

## 1. Bevezetés

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Tekintsük az alábbi primál-duál feladatpárt:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{P}) \qquad \min\left\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}, \\ &(\mathbf{D}) \qquad \max\left\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} : A^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\right\}. \end{aligned}$$

A gyenge dualitás tétel alkalmazásával az alábbi feltételek adódnak:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} - \mathbf{z} &= \mathbf{b}, & \mathbf{x} &\geq \mathbf{0},\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \\ A^T\mathbf{y} + \mathbf{w} &= \mathbf{c}, & \mathbf{y} &\geq \mathbf{0},\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \zeta, & \zeta &\geq 0. \end{aligned}$$

Ezt homogenizálva a *Goldman–Tucker-rendszer*t kapjuk:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} - \mathbf{z} &= \xi\mathbf{b}, & \mathbf{x} &\geq \mathbf{0},\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \\ -A^T\mathbf{y} - \mathbf{w} &= -\xi\mathbf{c}, & \mathbf{y} &\geq \mathbf{0},\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \qquad (GT) \\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \zeta, & \xi &\geq 0,\ \zeta \geq 0. \end{aligned}$$

Vezessük be a fenti (GT) rendszerre az alábbi jelöléseket:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A & -\mathbf{b} \\ -A^T & 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \\ \zeta \end{pmatrix} \qquad (GT).$$

Így az alábbi speciális ferdén szimmetrikus feladatot kell megoldanunk – ahol $M$ ferdén szimmetrikus mátrix $\left(M^T = -M\right)$:

$$M\mathbf{u} = \mathbf{s}, \qquad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}.$$

A fenti rendszerre az alábbi tétel fogalmazható meg:

1.1. Tétel. *Legyen adott a $(P)$ és $(D)$ primál-duál lineáris programozási feladatpár. Ekkor:*

**i.** *A (P) és (D) feladatok tetszőleges $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ optimális megoldáspárja, a megfelelő $(GT)$ rendszer egy megoldását adja $\xi = 1, \ \zeta = 0$ választással.*

**ii.** ***(Goldman–Tucker-tétel)*** *A $(GT)$ egyenlőtlenség-rendszernek van szigorúan komplementáris megoldása, azaz olyan megoldás, melyre $\mathbf{u} + \mathbf{s} > \mathbf{0}$.*

**iii.** *A $(GT)$ rendszer tetszőleges $(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}, \xi, \mathbf{z}, \mathbf{w}, \zeta)$ megoldására:*

*(1)* ***(Erős dualitás tétel)*** *Ha $\xi > 0$ és $\zeta = 0$, akkor $\left(\frac{\mathbf{x}}{\xi}, \frac{\mathbf{y}}{\xi}\right)$ optimális megoldáspárját adja a (P) és (D) feladatoknak.*

*(2)* ***(Iránymenti korlátosság tétel)*** *Ha $\xi = 0$ és $\zeta > 0$, akkor vagy (P), vagy (D), vagy mindkettő nem megengedett. Amennyiben csak az egyik feladat üres, úgy a másik feladat nem korlátos.*

**iv.** *A $\xi\zeta > 0$ eset nem fordul elő.*

Az 1.1. tétel alapján elegendő a (GT) rendszert vizsgálni. A (GT) rendszer átírható az alábbi lineáris programozási feladattá:

$$\min\left\{\mathbf{0}^T\mathbf{u} : M\mathbf{u} = \mathbf{s}, \ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\right\}.$$

### 1.1. A ferdén szimmetrikus feladat

Általánosabb alakban szokás a (GT) feladatot felírni:

*1.1. Definíció.* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ \mathbf{M}^T = -\mathbf{M}, \ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{q} \geq 0.$

A ferdén szimmetrikus önduális feladat (Skew Symmetric Problem) – $(SP)$:

$$\min\left\{\mathbf{x}^T\mathbf{s} : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}, \ \mathbf{x}, \mathbf{s} \geq 0\right\}.$$

A megengedettségi tartományt

$$\mathcal{F} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n} : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}, \ \mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{s} \geq 0\right\}\text{-el,}$$

a belső pontok halmazát

$$\mathcal{F}^0 = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n} : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s},\ \mathbf{x} > 0,\ \mathbf{s} > 0\right\}\text{-al}$$

jelöljük.

Az (SP) feladatban $\mathbf{x}^T\mathbf{s} = \mathbf{q}^T\mathbf{x}$, mert bármely $\mathbf{x}$ vektorra $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} = 0$ az M mátrix ferde szimmetriája miatt.

Tekintsük az alábbi definíciót:

*1.2. Definíció.* Az $\mathbf{x}$ pont $\varepsilon$-*optimális*, ha a dualitásrés legfeljebb $\varepsilon$, azaz ha $\mathbf{x}^T\mathbf{s} \le \varepsilon$.

$(SP)_\varepsilon$-nak nevezzük a következő megengedettségi feladatot:

$$(SP)_\varepsilon : \begin{cases} M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s} & \text{(megoldás)} \\ \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{s} > \mathbf{0} & \text{(megengedett, sőt: } \textit{belső pont}\text{)} \\ \mathbf{x}^T\mathbf{s} \le \varepsilon & (\varepsilon\text{-optimális}). \end{cases}$$

Az $\varepsilon$-optimális belsőpontos megoldások halmazát $\mathcal{F}^o_\varepsilon$-al jelöljük.

Ismert egy kerekítési eljárás, mely egy megfelelő $\varepsilon$-optimális megoldásból elő tud állítani egy optimális megoldást – ehhez $\varepsilon$-t kellően kicsire kell választani. Erről bővebben [1] alatt található információ.

Elegendő tehát egy $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n}$ $\varepsilon$-optimális belső pontos megoldást előállítani.

*1.3. Definíció.* Legyen $\mu > 0$ tetszőleges. Ekkor az $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) > \mathbf{0}$ belső pontos megoldást, ha $\mathbf{x}\mathbf{s} = \mu\mathbf{e}$, $\mu$-*centrum*nak nevezzük. A $\mu$-centrumok összességét *centrális út*nak hívjuk és $\mathcal{C}$-vel jelöljük.

Amennyiben létezik belső pont, úgy a $\mu$-centrum egyértelműen létezik. Ha $\mu$-vel tartunk a nullához belső pontok egy konvergens sorozata mentén, akkor:

**i.** a $\mu$-centrumok határértéke szigorúan komplementáris megoldását adja az (SP) feladatnak

**ii.** ha a dualitásrés $\varepsilon$-t már nem haladja meg, úgy a $\mu$-centrum az $(SP)_\varepsilon$ egy megoldását szolgáltatja.

Általános esetben elméletileg az ellipszoid módszerrel eldönthető, hogy létezik-e belső pont, vagy sem. Továbbá belső pontot is szolgáltat a végső ellipszoid középpontjaként. Ez a gyakorlatban nem praktikus.

Amennyiben $\mathbf{q} = 0$ – mint az eredeti esetben – úgy az alábbi beágyazás végezhető el:

$$\begin{aligned} &\min \lambda\theta \\ M\mathbf{x} + \mathbf{r}\theta &= \mathbf{s} \\ -\mathbf{r}^T\mathbf{x} + \lambda &= \nu \\ \mathbf{x}, \theta, \mathbf{s}, \nu &\ge 0, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Így az $(\overline{SP})$ feladatot kapjuk. Ez egy $n+1$ dimenziós feladat, az alábbi szereposztásban:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} M & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \qquad \overline{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

A változók: $\overline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \theta \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \nu \end{pmatrix}$, míg a célfüggvény: $\min \lambda\theta$.

$\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{e}}$, $\overline{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{e}}$ pontosan akkor belső pont, ha $\lambda = n+1$, $\mathbf{r} = \mathbf{e} - M\mathbf{e}$.

Tehát a fenti $\mu$, $\lambda$ választás esetén az $(\overline{SP})$ feladatnak az $\mathbf{e}$ vektor mindig belső pontja a fenti választás mellett. Legyen az $(\overline{SP})$ feladatnak $(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{s}})$ szigorúan komplementáris megoldása. Mivel az $(\overline{SP})$ feladat célfüggvénye a $\theta$ változó $(n+1)$-szerese, így ennek a változónak minden optimális megoldásban nulla az értéke, mert az optimális célfüggvényérték 0. Emiatt $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – szigorúan komplementáris – megoldása az $(SP)$ feladatnak.

## 2. Dikin-irány és átparaméterezés

Legyen $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ belső pont. Keressünk olyan $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n}$ irányt, amely teljesíti az

$$M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s}$$

ferde altér feltételt. Az ilyen irányt az $(SP)$ feladat *recessziós irányának* nevezzük, az $\mathbf{x}^+ := \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, $\mathbf{s}^+ := \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}$ pontot pedig a $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ recessziós irány menti *teljes lépésnek* hívjuk. Ha adott egy $\alpha > 0$ lépéshossz is, akkor az $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}$, $\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \alpha\Delta\mathbf{s}$ pontot *$\alpha$-val tompított lépésnek* nevezzük, függetlenül attól, hogy $\alpha < 1$ teljesül, vagy sem. Világos, hogy egy $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ vektor pontosan akkor teljesíti a ferde altér feltételt, ha az irányában vett teljes lépés nem vezet ki az

$$M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}$$

ferde affin altérből.

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg az $\mathbf{x}^T\mathbf{s}$ dualitásrés a lépés hatására! Felhasználva, hogy $\Delta\mathbf{x}^T\Delta\mathbf{s} = \Delta\mathbf{x}^T M\Delta\mathbf{x} = 0$, a lépés végrehajtása után a dualitásrés az

$$\left(\mathbf{x}^+\right)^T \mathbf{s}^+ = \mathbf{x}^T\mathbf{s} + \alpha\left(\mathbf{x}^T\Delta\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\Delta\mathbf{x}\right) + \alpha^2\left(\Delta\mathbf{x}^T\Delta\mathbf{s}\right) = \mathbf{x}^T\mathbf{s} + \alpha\left(\mathbf{x}^T\Delta\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\Delta\mathbf{x}\right)$$

alakot ölti. Ebből a dualitásrés megváltozására az

$$\left(\mathbf{x}^+\right)^T \mathbf{s}^+ - \mathbf{x}^T\mathbf{s} = \alpha\left(\mathbf{x}^T\Delta\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\Delta\mathbf{x}\right)$$

képletet nyerjük.

Szeretnénk meghatározni egy olyan recessziós irányt, amely recessziós irányban vett teljes lépés a lehető legnagyobb dualitásrés csökkenést eredményez. Ilyen irány természetesen nem mindig létezik, hiszen az alterünk általában nem korlátos az $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ irány mentén. Azonban ezen a problémán könnyen segíthetünk, ha az iránykeresést megszorítjuk a ferde altér egy kompakt részhalmazára.

Ezért tekintjük – Dikin ötlete alapján – az alábbi relaxált feladatot:

$$\min\left\{\mathbf{x}\Delta\mathbf{s} + \mathbf{s}\Delta\mathbf{x} : M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s},\ \left\|\frac{\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}}\right\|^2 \le 1\right\}.$$

Ebben a relaxált iránykeresési feladatban egy szigorúan konvex, kompakt halmazon minimalizálunk egy lineáris célfüggvényt. Emiatt egyrészt egyértelműen létezik a feladat megoldása, másrészt meg fogjuk mutatni, hogy ezen – a kompakt feltételek mellett a dualitásrés csökkenését maximalizáló – irányra képlet is adható. A szóbanforgó szigorúan kompakt, konvex halmazt *Dikin-ellipszoidnak* nevezzük.

$$\mathcal{E}_D := \left\{(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}) : M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s},\ \left\|\frac{\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}}\right\|^2 \le 1\right\}.$$

Vezessük be a következő konstansokat, illetve konstans vektorokat:

$$\mu := \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{s}}{n},\ \mathbf{d} := \sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{s}}},\ \mathbf{u} := \sqrt{\frac{\mathbf{xs}}{\mu}}.$$

Ezek a dimenziótól és a belső ponttól ugyan függenek, viszont az iránytól nem, ezért tényleg konstansnak tekinthetjük őket. Segítségükkel átparaméterezzük az iránykeresési feladatot (ahol $\mathbf{xs}$ szokásos Hadamard-szorzatot jelöli).

**Az első koordináta-transzformáció:**

$$\mathbf{p}_x := \sqrt{\mu}\mathbf{d}^{-1}\Delta\mathbf{x},\ \mathbf{p}_s := \sqrt{\mu}\mathbf{d}\Delta\mathbf{s} \ \Leftrightarrow\ \Delta\mathbf{x} = \frac{\mathbf{d}\mathbf{p}_x}{\sqrt{\mu}},\ \Delta\mathbf{s} = \frac{\mathbf{d}^{-1}\mathbf{p}_s}{\sqrt{\mu}}. \qquad (1)$$

**A második koordináta-transzformáció:**

$$\mathbf{p} := \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s.$$

2.1. Lemma. *A második koordináta-transzformáció inverze létezik és*

$$\mathbf{p}_x = (I + DMD)^{-1}\mathbf{p},$$
$$\mathbf{p}_s = DMD(I + DMD)^{-1}\mathbf{p},$$

*ahol $D := diag(\mathbf{d})$, azaz $d$ elemeiből álló diagonális mátrix.*

*Bizonyítás.* Az első koordináta-transzformáció (1) miatt:

$$M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s} \ \Leftrightarrow\ M(\mathbf{d}\mathbf{p}_x) = \mathbf{d}^{-1}\mathbf{p}_s \ \Leftrightarrow \mathbf{p}_s = DMD\mathbf{p}_x,$$

tehát

$$\mathbf{p} = (I + DMD)\mathbf{p}_x.$$

Továbbá létezik $(I + DMD)^{-1}$, mert $I + DMD$-nek nincsen nulla sajátértéke, ugyanis:

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{z}\| = 1 \ : \mathbf{z}^T(I + DMD)\mathbf{z} = 1.$$

Ezzel a lemma állítását bebizonyítottuk. □

**A harmadik koordináta-transzformáció:**

$$\overline{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}}\mathbf{u}. \tag{2}$$

Azért ezt az átskálázást használjuk, mert e mentén a transzformáció mentén a Dikin-ellipszoid az $\mathbb{R}^n$ egységgömbjébe, míg a lineáris célfüggvényünk az átskálázott tér lineáris függvényébe transzformálódik.

– Ferde-altér feltétel:

$$M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s} \ \Leftrightarrow \ DMD\mathbf{p}_x = \mathbf{p}_s \ \Leftrightarrow \ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow \ \overline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n.$$

– Dikin-ellipszoid:

$$\left\|\frac{\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}}\right\|^2 \leq 1 \ \Leftrightarrow \ \left\|\frac{\mathbf{p}_x}{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{p}_s}{\mathbf{u}}\right\|^2 \leq 1 \ \Leftrightarrow \ \left\|\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}}\right\|^2 \leq 1 \ \Leftrightarrow \ \|\overline{\mathbf{p}}\|^2 \leq 1.$$

– Célfüggvény:

$$\mathbf{s}^T\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\Delta\mathbf{s} = (\mu\mathbf{u})^T(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s) = (\mu\mathbf{u})^T\mathbf{p} = \left(\mu\mathbf{u}^2\right)^T\overline{\mathbf{p}}.$$

Tehát a relaxált iránykeresési feladat áttranszformált alakja:

$$\min\left\{\mu\left(\mathbf{u}^2\right)^T\overline{\mathbf{p}} : \ \|\overline{\mathbf{p}}\|^2 \leq 1\right\}.$$

Vezessük be a $\mathbf{v} = \mu\mathbf{u}^2$ jelölést! A következő – szemléletesen nyilvánvaló – lemma könnyen bizonyítható.

2.2. Lemma. *A* $\min\left\{\mathbf{v}^T\overline{\mathbf{p}} : \ \|\overline{\mathbf{p}}\|^2 \leq 1\right\}$ *feladat megoldása létezik és egyértelmű, sőt előáll az alábbi*

$$\overline{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

*alakban.*

Ez a mi esetünkben azt jelenti, hogy $\overline{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|}$. Transzformáljuk ezt vissza az eredeti alakba.

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{x} &= \sqrt{\mu}D(I+DMD)^{-1}\frac{-\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|} = \\ &= -D(I+DMD)^{-1}\frac{(\mathbf{xs})^{\frac{3}{2}}}{\|\mathbf{xs}\|} = -(S+XM)^{-1}\frac{(\mathbf{xs})^2}{\|\mathbf{xs}\|}.\end{aligned}$$

Az első egyenlőséghez a koordináta-transzformációk inverzeit, a második egyenlőséghez $\mathbf{u}$ definícióját, majd a harmadikhoz az alábbi összefüggést alkalmaztuk:

$$\begin{aligned}D(I+DMD)^{-1}(XS)^{-\frac{1}{2}} &= \left[(XS)^{\frac{1}{2}}D^{-1} + \left([XS]^{\frac{1}{2}}D\right)M\left(DD^{-1}\right)\right]^{-1} = \\ &= (S+XM)^{-1},\end{aligned}$$

ahol $X = diag(\mathbf{x})$ és $S = diag(\mathbf{s})$.

*2.1. Definíció.* $\Delta\mathbf{x}$ *Dikin-irány*:

$$\Delta\mathbf{x} = -(S+XM)^{-1}\frac{(\mathbf{xs})^2}{\|\mathbf{xs}\|}.$$

Dikin-iránynak nevezzük a Dikin-irány minden transzformált vektorát is.

Azaz $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}) \equiv (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_s) \equiv \mathbf{p} \equiv \overline{\mathbf{p}}$, ahol $\overline{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|}$. Az ekvivalenciák azt jelentik, hogy a különböző koordináták ugyanannak az iránynak a koordinátái a bevezetett négy koordinátarendszerben, ezenkívül meg is kaphatók egymásból a három koordináta-transzformáció segítségével.

## 3. A Dikin-algoritmus és annak komplexitása

A Dikin-irányban megtett teljes Dikin-lépés dualitásrés változása:

$$\mu\left(\mathbf{u}^2\right)^T\overline{\mathbf{p}} = \mu\left(\mathbf{u}^2\right)^T\left(-\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|}\right) = -\mu\|\mathbf{u}^2\| = -\|\mathbf{xs}\| < 0.$$

Az $(SP)_\varepsilon$ feladatnak konstruktív módon szeretnénk egy megoldását előállítani olymódon, hogy elindulunk egy tetszőleges $\mathbf{x}$ belső pontból, majd onnan a Dikin-irányban meglépjük az $\alpha > 0$-val módosított Dikin-lépést az $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}$ pontba ($\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \alpha\Delta\mathbf{s}$). Csak belső pontból lépünk, mivel a Dikin-ellipszoid nem értelmes külső- vagy határpont esetén.

Így az eddigiek alapján:

*3.1. Algoritmus. Dikin-algoritmus* az $(SP)_\varepsilon$ feladatra:
inicializáljuk $\mathbf{x}$-et,
amíg $\mathbf{x}^T\mathbf{s} > \varepsilon$,
számítsuk ki $\Delta\mathbf{x}$-et,
válasszuk meg $\alpha$-t,
cseréljük ki $\mathbf{x}$-et $\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x}$-re.

Az algoritmusban szereplő $\alpha$ lépéshossz megválasztásáról a 4. fejezetben fogunk szót ejteni.

3.1. LEMMA. *Az $0 \leq \alpha$-val korrigált Dikin-lépésre*

$$(\mathbf{x}^+)^T\mathbf{s}^+ \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{x}^T\mathbf{s}.$$

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^+ &= \mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x} = \sqrt{\mu}\mathbf{d}(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{p}_x),\\
\mathbf{s}^+ &= \mathbf{s} + \alpha\Delta\mathbf{s} = \sqrt{\mu}\mathbf{d}^{-1}(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{p}_x),\\
\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+ &= \mu\left(\mathbf{u}^2 + \alpha\mathbf{u}(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s) + \alpha^2\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s\right),
\end{aligned}$$

amire alkalmazva, hogy $\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s = \mathbf{p} = -\frac{\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|}$, az $\alpha$-val korrigált Dikin-lépésre:

$$\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+ = \mu\left(\mathbf{u}^2 - \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|}\alpha + (\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s)\alpha^2\right) \tag{3}$$

egyenlet adódik. Mivel a Dikin-irány ortogonális, azaz

$$\mathbf{p}_x^T\mathbf{p}_s = 0, \text{ és } \mathbf{e}^T\frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} = \|\mathbf{u}^2\|,$$

ezért az új dualitásrés:

$$\left(\mathbf{x}^+\right)^T\mathbf{s}^+ = \mu\left(\|\mathbf{u}\|^2 - \alpha\|\mathbf{u}^2\|\right) \leq \mu\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\|\mathbf{u}\|^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{x}^T\mathbf{s}.$$

Az egyenlőtlenség a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség miatt teljesül. Ez alapján ugyanis $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{e}^T\mathbf{u}^2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{u}^2\|$. □

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *Tegyük fel, hogy $0 \leq \alpha \leq \sqrt{n}$. Ekkor a Dikin-algoritmus legfeljebb*

$$\left\lceil \log\left(\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{x}^0}{\varepsilon}\right)\frac{\sqrt{n}}{\alpha^*}\right\rceil$$

*iterációt hajt végre, ahol $\alpha^* = inf\{\alpha\}$ a választott lépéshosszak infimuma és $\mathbf{x}^0$ az algoritmus kezdőpontja.*

*Bizonyítás.*

$$\left(1-\frac{\alpha^*}{\sqrt{n}}\right)^k \mathbf{q}^T\mathbf{x} \le \varepsilon,$$

$$k \ge \frac{\log\left(\frac{\varepsilon}{\mathbf{q}^T\mathbf{x}}\right)}{\log\left(1-\frac{\alpha^*}{\sqrt{n}}\right)} \ge_{(*)} \frac{\sqrt{n}}{\alpha^*}\log\left(\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

ahol $(*)$ teljesül, mert

$$\log\left(1-\frac{\alpha^*}{\sqrt{n}}\right) \le -\frac{\alpha^*}{\sqrt{n}},$$

hiszen $1+t \le e^t$, ahol $t = -\frac{\alpha^*}{\sqrt{n}}$. □

## 4. A lépéshossz megválasztása

Túl nagy lépéshossz esetén (pl: $\alpha \approx \sqrt{n}$) előfordulhat, hogy kilépünk a belső pontok halmazából, így a következő lépésben nem tudjuk majd kiszámítani a Dikin-irányt. Az sem világos, hogy hogyan fogunk majd onnan visszatalálni a megengedettségi tartomány belsejébe.

Túl kicsi lépéshosszak esetén (azaz: $\alpha^* = 0$) az a veszély fenyeget minket, hogy nem fogjuk tudni a dualitásrést $\varepsilon$ alá csökkenteni, esetleg még véges számú lépésben sem. Vezessük be a következő elnevezéseket!

*4.1. Definíció.* Az $\alpha$ lépéshossz *megengedett*, ha

$$\mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x},\ \mathbf{s} + \alpha\Delta\mathbf{s} > \mathbf{0},$$

és *iterációfüggetlen*, ha $\alpha = \alpha^*$ minden lépésben.

Célunk az iterációfüggetlen és megengedett $\alpha$ lépéshossz megkonstruálása. Ehhez szükségünk lesz a centrális úttól való eltérés mértékére, melynek segítségével értelmezni tudjuk majd a centrális út $\tau$-környezetét. Nevezzük a konstans $\alpha$ lépéshosszt *$\tau$-megfelelőnek*, ha bármely $\tau$-környezetbeli pontból is hajtsuk végre, az $\alpha$-val tompított Dikin lépés $\tau$-környezetbeli pontot eredményez. Világos, hogy $\tau$-megfelelő lépéshossz iteráció-független – hiszen konstans. Ezzel egyidejűleg belsőpontos is, mert a $\tau$-környezetet a belső pontok részhalmazaként fogjuk értelmezni.

A $\tau$-megfelelő lépéshossz egzisztenciáját fogjuk bebizonyítani.

*4.2. Definíció.* Legyen az $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ belső pont *centralitásának a mértéke*:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\max(\mathbf{xs})}{\min(\mathbf{xs})}.$$

Világos, hogy $\delta(\mathbf{x}) \geq 1$, és a $\delta(\mathbf{x}) = 1$ egyenlőség azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ a centrális úton fekszik. Ezenkívül nyilván

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\max \mathbf{u}^2}{\min \mathbf{u}^2} ,$$

hiszen $\mathbf{u}^2 = \frac{\mathbf{xs}}{\mu}$.

*4.3. Definíció.* Legyen $\tau > 1$, $\tau \in \mathbb{R}$. A centális út $\tau$*-környezete* azon belső pontok összessége, melyekre a centralitás mértéke nem haladja meg a $\tau$ mértéket. Másszóval

$$V_\tau = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{F}^0 : \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq \tau \right\}.$$

Világos, hogy bármely $\mathbf{x}$ $\tau$-környezetbéli ponthoz léteznek a $\tau_1, \tau_2 > 0$ pozitív valós számok úgy, hogy

$$\tau = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \qquad \tau_2 \geq \max\left(\mathbf{u}^2\right), \qquad \tau_1 \leq \min\left(\mathbf{u}^2\right).$$

Kiemeljük, hogy ezek a számok nagyban függenek az $\mathbf{x}$ belső pont környezetbeli megválasztásától.

Emlékezzünk vissza a Dikin-algoritmus lépésbecslésében használt (3)

$$\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+ = \mu \left( \mathbf{u}^2 - \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|}\alpha + (\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s)\alpha^2 \right)$$

összefüggésre. Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

$$f_\alpha(t) := t - \alpha\frac{t^2}{\|\mathbf{u}^2\|}, \qquad H := \max\{\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s\}, \qquad h := \min\{\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s\}.$$

Megjegyezzük, hogy értelme van vektort polinomba helyettesíteni. A környezetben maradás bizonyításához a következő formális becslést szeretnénk végrehajtani:

$$\frac{\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+}{\mu} = \left(\mathbf{u}^+\right)^2 = \left( \underbrace{\mathbf{u}^2 - \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|}\alpha}_{f_\alpha(\mathbf{u}^2)} + \underbrace{(\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s)\alpha^2}_{h\alpha^2 \leq \sim \leq H\alpha^2} \right)$$

$$1 \underbrace{\leq}_{(C3)} \delta\left(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+\right) = \frac{\max\left(\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+\right)}{\min\left(\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+\right)} = \frac{\max(\mathbf{u}^+)^2}{\min(\mathbf{u}^+)^2} \underbrace{\leq}_{(C1)} \frac{f_\alpha(\tau_2) + H\alpha^2}{f_\alpha(\tau_1) + h\alpha^2} \underbrace{\leq}_{(C2)} \tau.$$

Formális becslésünk érvényességéhez a $(C1)$, $(C2)$ és $(C3)$ egyenlőtlenségeket kell biztosítanunk.

- (C1) feltétele: $f_\alpha$ monoton növő a $[0,\tau_2]$ intervallumon.
- (C2) feltétele: $f_\alpha(\tau_2)+H\alpha^2 \le \tau\left(f_\alpha(\tau_1)+h\alpha^2\right)$.
- (C3) feltétele: $f_\alpha(\tau_1)+h\alpha^2 > 0$.

Vegyük észre, hogy a $(C3)$ feltétel automatikusan teljesül, feltéve, hogy teljesül a $(C1)$ becslés feltétele, és ezen kívül még szigorúan teljesül a $(C2)$ becslés feltétele is. Valóban,

$$f_\alpha(\tau_1)+h\alpha^2 \underbrace{\le}_{(C1)} f_\alpha(\tau_2)+H\alpha^2 \underbrace{\lneqq}_{(C2)} \tau\left(f_\alpha(\tau_1)+h\alpha^2\right),$$

és átrendezve

$$(\tau-1)\left(f_\alpha(\tau_1)+h\alpha^2\right) > 0.$$

Figyelembe véve, hogy $\tau > 1$, a $(C3)$ feltételt kapjuk.

Világos, hogy a $(C1)$ és a $(C3)$ feltételből következik, hogy $\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$. Ha ez minden $\alpha$-nál kisebb lépéshosszra is teljesül, akkor a lépés folytonossága miatt $\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$, tehát a tompított Dikin-lépés belső pontot eredményez. Hogy az $\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$ szorzat minden $\alpha$-nál kisebb lépéshosszra is pozitív, az a $(C1)$ és $(C2)$ tulajdonságok "leszálló" jellegéből fog adódni, amit később be fogunk majd bizonyítani.

Összefoglalva, ha az $\alpha$ lépéshossz a $\tau$-környezet bármelyik pontjában teljesíti a $(C1)$ és a $(C2)$ feltételeket, akkor az $\alpha$ lépéshossz $\tau$-megengedett. Ez az eszmefuttatás indokolja a következő definíció bevezetését.

*4.4. Definíció.* Azt mondjuk, hogy az $\alpha$ lépéshossz kielégíti a *Dikin-feltételt a $\tau$-környezetre vonatkozólag*, ha bármely $(\mathbf{x},\mathbf{s})$ $\tau$-környezetbeli pontra:

- $f_\alpha$ monoton növő a $[0,\tau_2]$ intervallumon, és
- $f_\alpha(\tau_2)+\alpha^2 H < \tau\left(f_\alpha(\tau_1)+\alpha^2 h\right)$ is teljesül.

Ha ez a feltétel a $\tau$-környezetnek csak egy rögzített $(\mathbf{x},\mathbf{s})$ pontjában teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az $\alpha$ lépéshossz lokálisan teljesíti a Dikin-feltételt ebben a pontban.

Most rátérünk a Dikin-feltétel pontbeli karakterizálására.

4.1. LEMMA. *Az $\alpha > 0$ lépéshossz pontosan akkor teljesíti a lokális Dikin-feltételt, ha egyrészt $\alpha \le \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2}$, másrészt ha $\alpha < \frac{\tau-1}{H-\tau h}\frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|}$.*

*Bizonyítás.* $f_\alpha$ egy konkáv másodfokú polinom 0 és $\frac{\|\mathbf{u}^2\|}{\alpha}$ gyökökkel, tehát $f_\alpha$ monoton növő a $\left[0, \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\alpha}\right]$ intervallumon. Így $f_\alpha$ pontosan akkor monoton növő a $[0,\tau_2]$-n, ha $\tau_2 \le \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\alpha}$.

A lokális Dikin-tulajdonság második feltétele:

$$\tau_2 - \alpha \frac{\tau_2^2}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 H = f_\alpha(\tau_2) + \alpha^2 H < \tau \left( f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h \right) = \tau \left[ \tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 h \right].$$

Ezt az $\alpha$-ban másodfokú kifejezést átrendezve

$$(H - \tau h)\alpha^2 + \frac{\tau\tau_1^2 - \tau_2^2}{\|\mathbf{u}^2\|}\alpha + \tau_2 - \tau\tau_1 < 0$$

egyenlőtlenség adódik.

Felhasználva, hogy

- $\tau_2 - \tau\tau_1 = 0$, mert $\tau = \frac{\tau_2}{\tau_1}$ és
- $\tau\tau_1^2 - \tau_2^2 = (1-\tau)\tau_1\tau_2$,

átrendezéssel a

$$(H - \tau h)\alpha < \frac{(\tau - 1)\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|}$$

egyenlőtlenség adódik, ami az állítással ekvivalens, ugyanis $H - \tau h \geq 0$, mert $H \geq 0$ és $h \leq 0$, hiszen $\mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_s = 0$. □

4.1. Következmény. *Ha egy $\alpha$ lépéshossz teljesíti a lokális-, vagy globális Dikin-feltételt, akkor minden nála kisebb pozitív lépéshossz is teljesíti.*

A következő lemma bizonyítását lényegében már el is végeztük.

4.2. Lemma. *Ha az $\alpha$ lépéshosszra teljesül a lokális/globális Dikin-feltétel, akkor*

**i.** $\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$,

**ii.** $\delta(\mathbf{x}^+) \leq \tau$.

*Tehát az $\alpha$ lépéshossz lokálisan/globálisan $\tau$-megfelelő.*

*Bizonyítás.* A Dikin-feltétel teljesüléséből adódik, hogy

$$\delta\left(\mathbf{x}^+\right) = \frac{\max\left(\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+\right)}{\min\left(\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+\right)} \leq \frac{\mu\left(f_\alpha(\tau_2) + \alpha^2 H\right)}{\mu\left(f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h\right)} \leq \tau,$$

azaz a lemma második felét igazoltuk. Továbbá (3)-ból, $f_\alpha$ és $h$ definíciójából következik, hogy

$$\mathbf{x}^+\mathbf{s}^+ \geq \left(f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h\right)\mathbf{e}.$$

Azt kell megmutatni, hogy ez az alsó korlát pozitív. A Dikin-lépés folytonossága miatt ebből már következik, hogy $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$. A Dikin-feltétel felhasználásval:

$$\tau\left(f_\alpha(\tau_1)+\alpha^2 h\right) > f_\alpha(\tau_2)+\alpha^2 H > f_\alpha(\tau_1)+\alpha^2 h.$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$(\tau-1)\left(f_\alpha(\tau_1)+\alpha^2 h\right) > 0.$$

Miután $\tau > 1$, így az állítást beláttuk. □

Hátramaradt még a globálisan $\tau$-megfelelő lépéshossz létezésének a bizonyítása.

4.3. Lemma. *Legyen* $\mathbf{x}$ *a* $\tau$*-környezet tetszőleges pontja. Ekkor:*

**i.** $\frac{1}{\tau\sqrt{n}} \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2}$,

**ii.** $\frac{4(\tau-1)}{\tau+1}\frac{1}{\tau\sqrt{n}} < \frac{\tau-1}{H-\tau h}\frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|}$.

*Bizonyítás.*

**i.**

$$\frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2} \geq \frac{\|\tau_1\mathbf{e}\|}{2\tau_2} = \frac{\tau_1\sqrt{n}}{2\tau_2} \geq \frac{\tau_1}{\tau_2\sqrt{n}} = \frac{1}{\tau\sqrt{n}}.$$

**ii.**

- $H-\tau h \leq (\tau+1)\|\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s\|_\infty$, ami $H$ és $h$ definíciójából következik.
- $\|\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{4}$, ugyanis $\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s = \frac{\left((\mathbf{p}_x+\mathbf{p}_s)^2-(\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_s)^2\right)}{4}$, így a következő becslés nyerhető:

$$-\frac{(\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_s)^2}{4} \leq \mathbf{p}_x\mathbf{p}_s \leq \frac{(\mathbf{p}_x+\mathbf{p}_s)^2}{4}.$$

  Miután $\mathbf{p}_x^T\mathbf{p}_s = 0$, ezért $\|\mathbf{p}_x+\mathbf{p}_s\|^2 = \|\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_s\|^2$. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{p}_x\mathbf{p}_s \leq \frac{\|\mathbf{p}_x+\mathbf{p}_s\|^2}{4}\mathbf{e}.$$

- $\|\mathbf{p}\|^2 \leq \tau_2$, mivel

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \left\|\frac{\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|}\right\| \leq \|\mathbf{u}\|_\infty^2 \left\|\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|}\right\|^2 \leq \tau_2.$$

- $\left\|\mathbf{u}^2\right\| \leq \left\|\mathbf{u}^2\right\|_\infty \|\mathbf{e}\| \leq \tau_2\sqrt{n}$.

Így

$$\frac{\tau-1}{H-\tau h}\frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|} \geq \frac{4(\tau-1)}{(\tau+1)\tau_2}\frac{\tau_1\tau_2}{\sqrt{n}\tau_2} = \frac{4(\tau-1)}{\tau+1}\frac{1}{\tau\sqrt{n}}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a lemmát. □

4.2. KÖVETKEZMÉNY. *Minden $\tau > 1$ számra:*

$$0 < \min\left\{\frac{1}{\tau\sqrt{n}}, \frac{4(\tau-1)}{\tau+1}\frac{1}{\tau\sqrt{n}}\right\} \leq \min\left\{\frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2}, \frac{\tau-1}{H-\tau h}\frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|} \ : \ \mathbf{x} \in V_\tau\right\}.$$

*Ezen kívül bármely $\alpha > 0$ lépéshossz globálisan $\tau$-megfelelő, ha*

$$0 < \alpha \leq \min\left\{\frac{1}{\tau\sqrt{n}}, \frac{4(\tau-1)}{\tau+1}\frac{1}{\tau\sqrt{n}}\right\}.$$

*Megjegyzés.*
$$\frac{1}{\tau\sqrt{n}} = \frac{4(\tau-1)}{\tau+1}\frac{1}{\tau\sqrt{n}} \iff \tau = \frac{5}{3}.$$

4.1. TÉTEL. *Legyen $\mathbf{x}^0$ belső pont. Ha $\mathbf{x}^0$ a centrális út valamelyik pontja, akkor válasszuk a $\tau > 1$ környezetet tetszőlegesen. Ha $\mathbf{x}^0$ nem a centrális úton van, akkor legyen $\tau = \delta(\mathbf{x})$.*

$$\alpha := \begin{cases} \frac{4(\tau-1)}{\tau+1}\frac{1}{\tau\sqrt{n}} & 1 < \tau \leq \frac{5}{3}, \\ \frac{1}{\tau\sqrt{n}} & \tau > \frac{5}{3}. \end{cases}$$

*Ekkor az $\mathbf{x}^0$ pontból indított Dikin-algoritmus az $(SP)_\varepsilon$ feladatot legfeljebb*

$$\begin{cases} \left\lceil \frac{(\tau+1)}{4(\tau-1)} n\tau \log\left(\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{x}^0}{\varepsilon}\right)\right\rceil & 1 < \tau \leq \frac{5}{3}, \\ \left\lceil n\tau \log\left(\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{x}^0}{\varepsilon}\right)\right\rceil & \tau > \frac{5}{3}. \end{cases}$$

*iterációban megoldja.*

*Bizonyítás.* A 4.2. következmény alapján $\alpha$ globálisan $\tau$-megfelelő lépéshossz. Valóban, hiszen
$$\frac{1}{\tau\sqrt{n}} < \frac{4(\tau-1)}{\tau+1}\frac{1}{\tau\sqrt{n}}$$
pontosan akkor teljesül, ha $\tau > \frac{5}{3}$. Ezért $\alpha$ belsőpontos is, azaz belső pontból belső pontba jutunk, így a tompított Dikin-lépés minden iterációban belsőpontos megoldást generál, csökkentett dualitásréssel. Megálláskor a dualitásrés nem haladja meg az $\varepsilon$ hibakorlátot, tehát a Dikin-algoritmus az $(SP)_\varepsilon$ feladat megoldását szolgáltatja.

A lépésszám a kezdeti dualitásrés és az $\varepsilon$ hibakorlát arányának a bitleírásában polinomiális.

Valóban, az 3.1. következmény, $\alpha$ iterációfüggetlensége és definíciója a kívánt

$$\left\lceil \log\left(\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{x}^0}{\varepsilon}\right)\frac{\sqrt{n}}{\alpha^*}\right\rceil = \left\lceil \log\left(\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{x}^0}{\varepsilon}\right)\frac{\sqrt{n}}{\alpha}\right\rceil = \begin{cases} \left\lceil \frac{(\tau+1)}{4(\tau-1)} n\tau \log\left(\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{x}^0}{\varepsilon}\right)\right\rceil & 1 < \tau \leq \frac{5}{3}, \\ \left\lceil n\tau \log\left(\frac{\mathbf{q}^T\mathbf{x}^0}{\varepsilon}\right)\right\rceil & \tau > \frac{5}{3} \end{cases}$$

lépésszámkorlátot szolgáltatja. □

## 5. Összefoglalás

Az [1] könyv 456. oldalán található Lemma E.4 bizonyításában az (E.16) lépés hibás, mert az összehasonlított vektorok minimális és maximális értéke nem feltétlenül ugyanazon koordinátán vétetnek fel. Ezt a lépést kijavítva egy élesebb tételhez jutottunk, miközben az eredeti bizonyítás gondolatmenete továbbra is alkalmazható volt.

Fontos megjegyezni, hogy a javítással nem változott meg az algoritmus komplexitása, illetve az eredeti tétel állítása érvényben maradt.

## Hivatkozások

[1] Cornelis Roos, Tamás Terlaky, Jean-Philippe Vial: *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Second Edition, 65–70, 451–459; Springer, 2005

*(Beérkezett: 2008. június 17.)*

MIKLÓS ZOLTÁN
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter Sétány 1/c.
miklosz@cs.elte.hu

TAKÁCS SZABOLCS
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter Sétány 1/c.
tretarkhon@gmail.com

### IMPROVEMENT ON THE PROOF OF 'A POLYNOMIAL DIKIN-TYPE PRIMAL-DUAL ALGORITHM FOR LINEAR PROGRAMMING'

Zoltán Miklós and Szabolcs Takács

The Dikin ellipsoid method for linear programming is presented in our paper on the basis of [1]. We correct a mistake in the proof of a technical lemma for the complexity analysis of the algorithm, then we propose a new selection rule for the environment parameter by correcting the mistake in question. Further, we determine an iteration independent steplength and prove an upper bound for the complexity.