

ITERÁCIÓFÜGGETLEN LÉPÉSHOSSZ ÉS LÉPÉSBECSLÉS A DIGIN-ALGORITMUS ALKALMAZÁSÁBAN A LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADATRA

MIKLÓS ZOLTÁN, TAKÁCS SZABOLCS

Az alábbi cikkben bemutatjuk a Dikin ellipszoid módszert a lineáris programozási feladatra az [1] könyvben található fejezet alapján. A fenti hivatkozáson a komplexitás vizsgálat egyik bizonyítása hibás.

A hibát kijavítva az eredetinél pontosabb tételt kapunk. Egy iterációfüggetlen lépéshosszt határozunk meg a Dikin ellipszoid módszerhez, melynek segítségével az algoritmus lépésigényére felső becslést lehet adni.

A cikkben található jelölések a könnyebb érthetőség kedvéért az [1] könyv jelöléseivel egyeznek meg.

1. Bevezetés

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Tekintsük az alábbi primál-duál feladatpárt:

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}) \quad & \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \\(\mathbf{D}) \quad & \max \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} : \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}.\end{aligned}$$

A gyenge dualitás tétel alkalmazásával az alábbi feltételek adódnak:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{z} &= \mathbf{b}, & \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{w} &= \mathbf{c}, & \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \zeta, & \zeta &\geq 0.\end{aligned}$$

Ezt homogenizálva a *Goldman-Tucker-rendszert* kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{z} &= \xi \mathbf{b}, & \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{w} &= -\xi \mathbf{c}, & \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \zeta, & \xi &\geq 0, \zeta \geq 0.\end{aligned} \tag{GT}$$

Vezessük be a fenti (GT) rendszerre az alábbi jelöléseket:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A & -\mathbf{b} \\ -A^T & 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (GT).$$

Így az alábbi speciális ferdén szimmetrikus feladatot kell megoldanunk – ahol M ferdén szimmetrikus mátrix ($M^T = -M$):

$$M\mathbf{u} = \mathbf{s}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}.$$

A fenti rendszerre az alábbi tétel fogalmazható meg:

1.1. TÉTEL. Legyen adott a (P) és (D) primál-duál lineáris programozási feladatpár. Ekkor:

- i. A (P) és (D) feladatok tetszőleges (\mathbf{x}, \mathbf{y}) optimális megoldaspárja, a megfelelő (GT) rendszer egy megoldását adja $\xi = 1, \zeta = 0$ választással.
- ii. **(Goldman–Tucker-tétel)** A (GT) egyenlőtlenség-rendszernek van szigorúan komplementáris megoldása, azaz olyan megoldás, melyre $\mathbf{u} + \mathbf{s} > \mathbf{0}$.
- iii. A (GT) rendszer tetszőleges $(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}, \xi, \mathbf{z}, \mathbf{w}, \zeta)$ megoldására:
 - (1) **(Erős dualitás tétel)** Ha $\xi > 0$ és $\zeta = 0$, akkor $\left(\frac{\mathbf{x}}{\xi}, \frac{\mathbf{y}}{\xi}\right)$ optimális megoldaspárját adja a (P) és (D) feladatoknak.
 - (2) **(Iránymenti korlátosság tétel)** Ha $\xi = 0$ és $\zeta > 0$, akkor vagy (P) , vagy (D) , vagy mindkettő nem megengedett. Amennyiben csak az egyik feladat üres, úgy a másik feladat nem korlátos.
- iv. A $\xi\zeta > 0$ eset nem fordul elő.

Az 1.1. tétel alapján elegendő a (GT) rendszert vizsgálni. A (GT) rendszer átírható az alábbi lineáris programozási feladattá:

$$\min \{ \mathbf{0}^T \mathbf{u} : M\mathbf{u} = \mathbf{s}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \}.$$

1.1. A ferdén szimmetrikus feladat

Általánosabb alakban szokás a (GT) feladatot felírni:

1.1. Definíció. $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$.

A ferdén szimmetrikus önduális feladat (Skew Symmetric Problem) – (SP):

$$\min \{ \mathbf{x}^T \mathbf{s} : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \}.$$

A megengedettségi tartományt

$$\mathcal{F} = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n} : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \} \text{-el,}$$

a belső pontok halmazát

$$\mathcal{F}^0 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n} : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}, \mathbf{x} > \mathbf{0}, \mathbf{s} > \mathbf{0}\}$$
-al

jelöljük.

Az (SP) feladatban $\mathbf{x}^T \mathbf{s} = \mathbf{q}^T \mathbf{x}$, mert bármely \mathbf{x} vektorra $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$ az M mátrix ferde szimmetriája miatt.

Tekintsük az alábbi definíciót:

1.2. Definíció. Az \mathbf{x} pont ε -*optimális*, ha a dualitásrés legfeljebb ε , azaz ha $\mathbf{x}^T \mathbf{s} \leq \varepsilon$.

$(SP)_\varepsilon$ -nak nevezzük a következő megengedettségi feladatot:

$$(SP)_\varepsilon : \begin{cases} M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s} & (\text{megoldás}) \\ \mathbf{x} > \mathbf{0}, \mathbf{s} > \mathbf{0} & (\text{megengedett, sőt: belső pont}) \\ \mathbf{x}^T \mathbf{s} \leq \varepsilon & (\varepsilon\text{-optimális}). \end{cases}$$

Az ε -optimális belsőpontos megoldások halmazát $\mathcal{F}_\varepsilon^o$ -al jelöljük.

Ismert egy kerekítési eljárás, mely egy megfelelő ε -optimális megoldásból elő tud állítani egy optimális megoldást – ehhez ε -t kellően kicsire kell választani. Erről bővebben [1] alatt található információ.

Elegendő tehát egy $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n}$ ε -optimális belső pontos megoldást előállítani.

1.3. Definíció. Legyen $\mu > 0$ tetszőleges. Ekkor az $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) > \mathbf{0}$ belső pontos megoldást, ha $\mathbf{x}\mathbf{s} = \mu\mathbf{e}$, μ -*centrumnak* nevezzük. A μ -centrumok összességét *centrális útnak* hívjuk és \mathcal{C} -vel jelöljük.

Amennyiben létezik belső pont, úgy a μ -centrum egyértelműen létezik. Ha μ -vel tartunk a nullához belső pontok egy konvergens sorozata mentén, akkor:

- i. a μ -centrumok határértéke szigorúan komplementáris megoldását adja az (SP) feladatnak
- ii. ha a dualitásrés ε -t már nem haladja meg, úgy a μ -centrum az $(SP)_\varepsilon$ egy megoldását szolgáltatja.

Általános esetben elméletileg az ellipszoid módszerrel eldönthető, hogy létezik-e belső pont, vagy sem. Továbbá belső pontot is szolgáltat a végső ellipszoid közép-pontjaként. Ez a gyakorlatban nem praktikus.

Amennyiben $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ – mint az eredeti esetben – úgy az alábbi beágyazás végezhető el:

$$\begin{aligned} & \min \lambda\theta \\ & M\mathbf{x} + \mathbf{r}\theta = \mathbf{s} \\ & -\mathbf{r}^T \mathbf{x} + \lambda = \nu \\ & \mathbf{x}, \theta, \mathbf{s}, \nu \geq 0, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Így az (\overline{SP}) feladatot kapjuk. Ez egy $n + 1$ dimenziós feladat, az alábbi szereposztásban:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} M & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \quad \overline{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

A változók: $\overline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \theta \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \nu \end{pmatrix}$, míg a célfüggvény: $\min \lambda \theta$.

$\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{e}}$, $\overline{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{e}}$ pontosan akkor belső pont, ha $\lambda = n + 1$, $\mathbf{r} = \mathbf{e} - M\mathbf{e}$.

Tehát a fenti μ , λ választás esetén az (\overline{SP}) feladatnak az \mathbf{e} vektor mindig belső pontja a fenti választás mellett. Legyen az (\overline{SP}) feladatnak $(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{s}})$ szigorúan komplementáris megoldása. Mivel az (\overline{SP}) feladat célfüggvénye a θ változó $(n + 1)$ -szerese, így ennek a változónak minden optimális megoldásban nulla az értéke, mert az optimális célfüggvényérték 0. Emiatt (\mathbf{x}, \mathbf{s}) – szigorúan komplementáris – megoldása az (SP) feladatnak.

2. Dikin-irány és átparaméterezés

Legyen (\mathbf{x}, \mathbf{s}) belső pont. Keressünk olyan $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n}$ irányt, amely teljesíti az

$$M\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{s}$$

ferde altér feltételt. Az ilyen irányt az (SP) feladat *recessziós irányának* nevezzük, az $\mathbf{x}^+ := \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$, $\mathbf{s}^+ := \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}$ pontot pedig a $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s})$ recessziós irány menti *teljes lépésnek* hívjuk. Ha adott egy $\alpha > 0$ lépéshossz is, akkor az $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x}$, $\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s}$ pontot *α -val tompított lépésnek* nevezzük, függetlenül attól, hogy $\alpha < 1$ teljesül, vagy sem. Világos, hogy egy $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s})$ vektor pontosan akkor teljesíti a ferde altér feltételt, ha az irányában vett teljes lépés nem vezet ki az

$$M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}$$

ferde affin altérből.

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg az $\mathbf{x}^T \mathbf{s}$ dualitásrés a lépés hatására! Felhasználva, hogy $\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s} = \Delta \mathbf{x}^T M \Delta \mathbf{x} = 0$, a lépés végrehajtása után a dualitásrés az

$$(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ = \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \alpha (\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \Delta \mathbf{x}) + \alpha^2 (\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s}) = \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \alpha (\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \Delta \mathbf{x})$$

alakot ölti. Ebből a dualitásrés megváltozására az

$$(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ - \mathbf{x}^T \mathbf{s} = \alpha (\mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \Delta \mathbf{x})$$

képletet nyerjük.

Szeretnénk meghatározni egy olyan recessziós irányt, amely recessziós irányban vett teljes lépés a lehető legnagyobb dualitásrés csökkenést eredményez. Ilyen irány természetesen nem mindig létezik, hiszen az alterünk általában nem korlátos az (\mathbf{x}, \mathbf{s}) irány mentén. Azonban ezen a problémán könnyen segíthetünk, ha az iránykeresést megszorítjuk a ferde alter egy kompakt részalmazára.

Ezért tekintjük – Dikin ötlete alapján – az alábbi relaxált feladatot:

$$\min \left\{ \mathbf{x}\Delta\mathbf{s} + \mathbf{s}\Delta\mathbf{x} : M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s}, \left\| \frac{\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}} \right\|^2 \leq 1 \right\}.$$

Ebben a relaxált iránykeresési feladatban egy szigorúan konvex, kompakt halmazon minimalizálunk egy lineáris célfüggvényt. Emiatt egyrészt egyértelműen létezik a feladat megoldása, másrészt meg fogjuk mutatni, hogy ezen – a kompakt feltételek mellett a dualitásrés csökkenését maximalizáló – irányra képlet is adható. A szóbanforgó szigorúan kompakt, konvex halmazt *Dikin-ellipszoidnak* nevezzük.

$$\mathcal{E}_D := \left\{ (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}) : M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s}, \left\| \frac{\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}} \right\|^2 \leq 1 \right\}.$$

Vezessük be a következő konstansokat, illetve konstans vektorokat:

$$\mu := \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{n}, \quad \mathbf{d} := \sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{s}}}, \quad \mathbf{u} := \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}}.$$

Ezek a dimenziótól és a belső ponttól ugyan függenek, viszont az iránytól nem, ezért tényleg konstansnak tekinthetjük őket. Segítségükkel átparaméterezzük az iránykeresési feladatot (ahol $\mathbf{x}\mathbf{s}$ szokásos Hadamard-szorzatot jelöli).

Az első koordináta-transzformáció:

$$\mathbf{p}_x := \sqrt{\mu} \mathbf{d}^{-1} \Delta\mathbf{x}, \quad \mathbf{p}_s := \sqrt{\mu} \mathbf{d} \Delta\mathbf{s} \Leftrightarrow \Delta\mathbf{x} = \frac{\mathbf{d}\mathbf{p}_x}{\sqrt{\mu}}, \quad \Delta\mathbf{s} = \frac{\mathbf{d}^{-1}\mathbf{p}_s}{\sqrt{\mu}}. \quad (1)$$

A második koordináta-transzformáció:

$$\mathbf{p} := \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s.$$

2.1. LEMMA. *A második koordináta-transzformáció inverze létezik és*

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x &= (I + DMD)^{-1} \mathbf{p}, \\ \mathbf{p}_s &= DMD(I + DMD)^{-1} \mathbf{p}, \end{aligned}$$

ahol $D := \text{diag}(\mathbf{d})$, azaz d elemeiből álló diagonális mátrix.

Bizonyítás. Az első koordináta-transzformáció (1) miatt:

$$M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s} \Leftrightarrow M(\mathbf{d}\mathbf{p}_x) = \mathbf{d}^{-1}\mathbf{p}_s \Leftrightarrow \mathbf{p}_s = DMD\mathbf{p}_x,$$

tehát

$$\mathbf{p} = (I + DMD)\mathbf{p}_x.$$

Továbbá létezik $(I + DMD)^{-1}$, mert $I + DMD$ -nek nincsen nulla sajátértéke, ugyanis:

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{z}\| = 1 : \mathbf{z}^T(I + DMD)\mathbf{z} = 1.$$

Ezzel a lemma állítását bebizonyítottuk. \square

A harmadik koordináta-transzformáció:

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}\mathbf{u}. \quad (2)$$

Azért ezt az átskálázást használjuk, mert e mentén a transzformáció mentén a Dikin-ellipszoid az \mathbb{R}^n egységömbjébe, míg a lineáris célfüggvényünk az átskálázott tér lineáris függvényébe transzformálódik.

– Ferde-altér feltétel:

$$M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s} \Leftrightarrow DMD\mathbf{p}_x = \mathbf{p}_s \Leftrightarrow \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n.$$

– Dikin-ellipszoid:

$$\left\| \frac{\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}} \right\|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \left\| \frac{\mathbf{p}_x}{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{p}_s}{\mathbf{u}} \right\|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \left\| \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}} \right\|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \|\bar{\mathbf{p}}\|^2 \leq 1.$$

– Célfüggvény:

$$\mathbf{s}^T\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\Delta\mathbf{s} = (\mu\mathbf{u})^T(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s) = (\mu\mathbf{u})^T\mathbf{p} = (\mu\mathbf{u}^2)^T\bar{\mathbf{p}}.$$

Tehát a relaxált iránykeresési feladat áttranszformált alakja:

$$\min \left\{ \mu (\mathbf{u}^2)^T \bar{\mathbf{p}} : \|\bar{\mathbf{p}}\|^2 \leq 1 \right\}.$$

Vezessük be a $\mathbf{v} = \mu\mathbf{u}^2$ jelölést! A következő – szemléletesen nyilvánvaló – lemma könnyen bizonyítható.

2.2. LEMMA. A $\min \{ \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{p}} : \|\bar{\mathbf{p}}\|^2 \leq 1 \}$ feladat megoldása létezik és egyértelmű, sőt előáll az alábbi

$$\bar{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

alakban.

Ez a mi esetünkben azt jelenti, hogy $\bar{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|}$. Transzformáljuk ezt vissza az eredeti alakba.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= \sqrt{\mu} D(I + DMD)^{-1} \frac{-\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|} = \\ &= -D(I + DMD)^{-1} \frac{(\mathbf{x}\mathbf{s})^{\frac{3}{2}}}{\|\mathbf{x}\mathbf{s}\|} = -(S + XM)^{-1} \frac{(\mathbf{x}\mathbf{s})^2}{\|\mathbf{x}\mathbf{s}\|}.\end{aligned}$$

Az első egyenlőséghez a koordináta-transzformációk inverzeit, a második egyenlőséghez \mathbf{u} definícióját, majd a harmadikhoz az alábbi összefüggést alkalmaztuk:

$$\begin{aligned}D(I + DMD)^{-1}(XS)^{-\frac{1}{2}} &= \left[(XS)^{\frac{1}{2}} D^{-1} + \left([XS]^{\frac{1}{2}} D \right) M (DD^{-1}) \right]^{-1} = \\ &= (S + XM)^{-1},\end{aligned}$$

ahol $X = \text{diag}(\mathbf{x})$ és $S = \text{diag}(\mathbf{s})$.

2.1. Definíció. $\Delta \mathbf{x}$ Dikin-irány:

$$\Delta \mathbf{x} = -(S + XM)^{-1} \frac{(\mathbf{x}\mathbf{s})^2}{\|\mathbf{x}\mathbf{s}\|}.$$

Dikin-iránynak nevezzük a Dikin-irány minden transzformált vektorát is.

Azaz $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s}) \equiv (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_s) \equiv \mathbf{p} \equiv \bar{\mathbf{p}}$, ahol $\bar{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|}$. Az ekvivalenciák azt jelentik, hogy a különböző koordináták ugyanannak az iránynak a koordinátái a bevezetett négy koordinátarendszerben, ezenkívül meg is kaphatók egymásból a három koordináta-transzformáció segítségével.

3. A Dikin-algoritmus és annak komplexitása

A Dikin-irányban megtett teljes Dikin-lépés dualitásrés változása:

$$\mu (\mathbf{u}^2)^T \bar{\mathbf{p}} = \mu (\mathbf{u}^2)^T \left(-\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) = -\mu \|\mathbf{u}^2\| = -\|\mathbf{x}\mathbf{s}\| < 0.$$

Az $(SP)_\varepsilon$ feladatnak konstruktív módon szeretnénk egy megoldását előállítani oly módon, hogy elindulunk egy tetszőleges \mathbf{x} belső pontból, majd onnan a Dikin-irányban meglépjük az $\alpha > 0$ -val módosított Dikin-lépést az $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x}$ pontba ($\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s}$). Csak belső pontból lépünk, mivel a Dikin-ellipszoid nem értelmes külső- vagy határpont esetén.

Így az eddigiek alapján:

- 3.1. *Algoritmus. Dikin-algoritmus az $(SP)_\varepsilon$ feladatra:*
 inicializáljuk \mathbf{x} -et,
 amíg $\mathbf{x}^T \mathbf{s} > \varepsilon$,
 számítsuk ki $\Delta \mathbf{x}$ -et,
 válasszuk meg α -t,
 cseréljük ki \mathbf{x} -et $\mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x}$ -re.

Az algoritmusban szereplő α lépéshossz megválasztásáról a 4. fejezetben fogunk szót ejteni.

3.1. LEMMA. *Az $0 \leq \alpha$ -val korrigált Dikin-lépésre*

$$(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) \mathbf{x}^T \mathbf{s}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x} = \sqrt{\mu} \mathbf{d}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{p}_x), \\ \mathbf{s}^+ &= \mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s} = \sqrt{\mu} \mathbf{d}^{-1}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{p}_x), \\ \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ &= \mu (\mathbf{u}^2 + \alpha \mathbf{u}(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s) + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s), \end{aligned}$$

amire alkalmazva, hogy $\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s = \mathbf{p} = -\frac{\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|}$, az α -val korrigált Dikin-lépésre:

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ = \mu \left(\mathbf{u}^2 - \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} \alpha + (\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s) \alpha^2 \right) \quad (3)$$

egyenlet adódik. Mivel a Dikin-irány ortogonális, azaz

$$\mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_s = 0, \text{ és } \mathbf{e}^T \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} = \|\mathbf{u}^2\|,$$

ezért az új dualitásrés:

$$(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ = \mu (\|\mathbf{u}\|^2 - \alpha \|\mathbf{u}^2\|) \leq \mu \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) \|\mathbf{u}\|^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) \mathbf{x}^T \mathbf{s}.$$

Az egyenlőtlenség a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség miatt teljesül. Ez alapján ugyanis $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{u}^2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{u}^2\|$. \square

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *Tegyük fel, hogy $0 \leq \alpha \leq \sqrt{n}$. Ekkor a Dikin-algoritmus legfeljebb*

$$\left\lceil \log \left(\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \right) \frac{\sqrt{n}}{\alpha^*} \right\rceil$$

iterációt hajt végre, ahol $\alpha^* = \inf\{\alpha\}$ a választott lépéshosszak infimuma és \mathbf{x}^0 az algoritmus kezdőpontja.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\alpha^*}{\sqrt{n}}\right)^k \mathbf{q}^T \mathbf{x} &\leq \varepsilon, \\ k &\geq \frac{\log\left(\frac{\varepsilon}{\mathbf{q}^T \mathbf{x}}\right)}{\log\left(1 - \frac{\alpha^*}{\sqrt{n}}\right)} \stackrel{(*)}{\geq} \frac{\sqrt{n}}{\alpha^*} \log\left(\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

ahol (*) teljesül, mert

$$\log\left(1 - \frac{\alpha^*}{\sqrt{n}}\right) \leq -\frac{\alpha^*}{\sqrt{n}},$$

hiszen $1 + t \leq e^t$, ahol $t = -\frac{\alpha^*}{\sqrt{n}}$. □

4. A lépéshossz megválasztása

Túl nagy lépéshossz esetén (pl: $\alpha \approx \sqrt{n}$) előfordulhat, hogy kilépünk a belső pontok halmazából, így a következő lépésben nem tudjuk majd kiszámítani a Dikin-irányt. Az sem világos, hogy hogyan fogunk majd onnan visszatérni a megengedett tartomány belsejébe.

Túl kicsi lépéshosszak esetén (azaz: $\alpha^* = 0$) az a veszély fenyeget minket, hogy nem fogjuk tudni a dualitásrést ε alá csökkenteni, esetleg még véges számú lépésben sem. Vezessük be a következő elnevezéseket!

4.1. Definíció. Az α lépéshossz *megengedett*, ha

$$\mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x}, \mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s} > \mathbf{0},$$

és *iterációfüggetlen*, ha $\alpha = \alpha^*$ minden lépésben.

Célunk az iterációfüggetlen és megengedett α lépéshossz megkonstruálása. Ehhez szükségünk lesz a centrális úttól való eltérés mértékére, melynek segítségével értelmezni tudjuk majd a centrális út τ -környezetét. Nevezzük a konstans α lépéshosszt *τ -megfelelőnek*, ha bármely τ -környezetbeli pontból is hajtsuk végre, az α -val tompított Dikin lépés τ -környezetbeli pontot eredményez. Világos, hogy τ -megfelelő lépéshossz iteráció-független – hiszen konstans. Ezzel egyidejűleg belső-pontos is, mert a τ -környezetet a belső pontok részhalmazaként fogjuk értelmezni.

A τ -megfelelő lépéshossz egzisztenciáját fogjuk bebizonyítani.

4.2. Definíció. Legyen az (\mathbf{x}, \mathbf{s}) belső pont *centralitásának a mértéke*:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\max(\mathbf{x}\mathbf{s})}{\min(\mathbf{x}\mathbf{s})}.$$

Világos, hogy $\delta(\mathbf{x}) \geq 1$, és a $\delta(\mathbf{x}) = 1$ egyenlőség azt jelenti, hogy \mathbf{x} a centrális úton fekszik. Ezenkívül nyilván

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\max \mathbf{u}^2}{\min \mathbf{u}^2},$$

hiszen $\mathbf{u}^2 = \frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}$.

4.3. Definíció. Legyen $\tau > 1$, $\tau \in \mathbb{R}$. A centrális út τ -környezete azon belső pontok összessége, melyekre a centralitás mértéke nem haladja meg a τ mértéket. Másszóval

$$V_\tau = \{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{F}^0 : \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq \tau\}.$$

Világos, hogy bármely \mathbf{x} τ -környezetbeli ponthoz léteznek a $\tau_1, \tau_2 > 0$ pozitív valós számok úgy, hogy

$$\tau = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \quad \tau_2 \geq \max(\mathbf{u}^2), \quad \tau_1 \leq \min(\mathbf{u}^2).$$

Kiemeljük, hogy ezek a számok nagyban függenek az \mathbf{x} belső pont környezetbeli megválasztásától.

Emlékezzünk vissza a Dikin-algoritmus lépésbecslésében használt (3)

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ = \mu \left(\mathbf{u}^2 - \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} \alpha + (\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s) \alpha^2 \right)$$

összefüggésre. Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

$$f_\alpha(t) := t - \alpha \frac{t^2}{\|\mathbf{u}^2\|}, \quad H := \max\{\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s\}, \quad h := \min\{\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s\}.$$

Megjegyezzük, hogy értelme van vektort polinomba helyettesíteni. A környezetben maradás bizonyításához a következő formális becslést szeretnénk végrehajtani:

$$\frac{\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+}{\mu} = (\mathbf{u}^+)^2 = \left(\underbrace{\mathbf{u}^2 - \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} \alpha}_{f_\alpha(\mathbf{u}^2)} + \underbrace{(\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s) \alpha^2}_{h\alpha^2 \leq \sim \leq H\alpha^2} \right)$$

$$1 \underbrace{\leq}_{(C3)} \delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+) = \frac{\max(\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+)}{\min(\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+)} = \frac{\max(\mathbf{u}^+)^2}{\min(\mathbf{u}^+)^2} \underbrace{\leq}_{(C1)} \frac{f_\alpha(\tau_2) + H\alpha^2}{f_\alpha(\tau_1) + h\alpha^2} \underbrace{\leq}_{(C2)} \tau.$$

Formális becslésünk érvényességéhez a (C1), (C2) és (C3) egyenlőtlenségeket kell biztosítanunk.

- (C1) feltétele: f_α monoton növő a $[0, \tau_2]$ intervallumon.
- (C2) feltétele: $f_\alpha(\tau_2) + H\alpha^2 \leq \tau (f_\alpha(\tau_1) + h\alpha^2)$.
- (C3) feltétele: $f_\alpha(\tau_1) + h\alpha^2 > 0$.

Vegyük észre, hogy a (C3) feltétel automatikusan teljesül, feltéve, hogy teljesül a (C1) becslés feltétele, és ezen kívül még szigorúan teljesül a (C2) becslés feltétele is. Valóban,

$$f_\alpha(\tau_1) + h\alpha^2 \underbrace{\leq}_{(C1)} f_\alpha(\tau_2) + H\alpha^2 \underbrace{\leq}_{(C2)} \tau (f_\alpha(\tau_1) + h\alpha^2),$$

és átrendezve

$$(\tau - 1) (f_\alpha(\tau_1) + h\alpha^2) > 0.$$

Figyelembe véve, hogy $\tau > 1$, a (C3) feltételt kapjuk.

Világos, hogy a (C1) és a (C3) feltételből következik, hogy $\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$. Ha ez minden α -nál kisebb lépéshosszra is teljesül, akkor a lépés folytonossága miatt $\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$, tehát a tompított Dikin-lépés belső pontot eredményez. Hogy az $\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$ szorzat minden α -nál kisebb lépéshosszra is pozitív, az a (C1) és (C2) tulajdonságok "leszálló" jellegéből fog adódni, amit később be fogunk majd bizonyítani.

Összefoglalva, ha az α lépéshossz a τ -környezet bármelyik pontjában teljesíti a (C1) és a (C2) feltételeket, akkor az α lépéshossz τ -megengedett. Ez az eszmefuttatás indokolja a következő definíció bevezetését.

4.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az α lépéshossz kielégíti a *Dikin-feltételt a τ -környezetre vonatkozólag*, ha bármely (\mathbf{x}, \mathbf{s}) τ -környezetbeli pontra:

- f_α monoton növő a $[0, \tau_2]$ intervallumon, és
- $f_\alpha(\tau_2) + \alpha^2 H < \tau (f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h)$ is teljesül.

Ha ez a feltétel a τ -környezetnek csak egy rögzített (\mathbf{x}, \mathbf{s}) pontjában teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az α lépéshossz lokálisan teljesíti a Dikin-feltételt ebben a pontban.

Most rátérünk a Dikin-feltétel pontbeli karakterizálására.

4.1. LEMMA. Az $\alpha > 0$ lépéshossz pontosan akkor teljesíti a lokális Dikin-feltételt, ha egyrészt $\alpha \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2}$, másrészt ha $\alpha < \frac{\tau-1}{H-\tau h} \frac{\tau_1 \tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|}$.

Bizonyítás. f_α egy konkáv másodfokú polinom 0 és $\frac{\|\mathbf{u}^2\|}{\alpha}$ gyökökkel, tehát f_α monoton növő a $\left[0, \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\alpha}\right]$ intervallumon. Így f_α pontosan akkor monoton növő a $[0, \tau_2]$ -n, ha $\tau_2 \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\alpha}$.

A lokális Dikin-tulajdonság második feltétele:

$$\tau_2 - \alpha \frac{\tau_2^2}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 H = f_\alpha(\tau_2) + \alpha^2 H < \tau (f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h) = \tau \left[\tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 h \right].$$

Ezt az α -ban másodfokú kifejezést átrendezve

$$(H - \tau h)\alpha^2 + \frac{\tau\tau_1^2 - \tau_2^2}{\|\mathbf{u}^2\|}\alpha + \tau_2 - \tau\tau_1 < 0$$

egyenlőtlenség adódik.

Felhasználva, hogy

- $\tau_2 - \tau\tau_1 = 0$, mert $\tau = \frac{\tau_2}{\tau_1}$ és
- $\tau\tau_1^2 - \tau_2^2 = (1 - \tau)\tau_1\tau_2$,

átrendezéssel a

$$(H - \tau h)\alpha < \frac{(\tau - 1)\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|}$$

egyenlőtlenség adódik, ami az állítással ekvivalens, ugyanis $H - \tau h \geq 0$, mert $H \geq 0$ és $h \leq 0$, hiszen $\mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_s = 0$. \square

4.1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha egy α lépéshossz teljesíti a lokális-, vagy globális Dikin-feltételt, akkor minden nála kisebb pozitív lépéshossz is teljesíti.*

A következő lemma bizonyítását lényegében már el is végeztük.

4.2. LEMMA. *Ha az α lépéshosszra teljesül a lokális/globális Dikin-feltétel, akkor*

- i. $\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$,
- ii. $\delta(\mathbf{x}^+) \leq \tau$.

Tehát az α lépéshossz lokálisan/globálisan τ -megfelelő.

Bizonyítás. A Dikin-feltétel teljesüléséből adódik, hogy

$$\delta(\mathbf{x}^+) = \frac{\max(\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+)}{\min(\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+)} \leq \frac{\mu(f_\alpha(\tau_2) + \alpha^2 H)}{\mu(f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h)} \leq \tau,$$

azaz a lemma második felét igazoltuk. Továbbá (3)-ból, f_α és h definíciójából következik, hogy

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ \geq (f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h) \mathbf{e}.$$

Azt kell megmutatni, hogy ez az alsó korlát pozitív. A Dikin-lépés folytonossága miatt ebből már következik, hogy $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$. A Dikin-feltétel felhasználásával:

$$\tau (f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h) > f_\alpha(\tau_2) + \alpha^2 h > f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h.$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$(\tau - 1) (f_\alpha(\tau_1) + \alpha^2 h) > 0.$$

Miután $\tau > 1$, így az állítást beláttuk. \square

Hátramaradt még a globálisan τ -megfelelő lépéshossz létezésének a bizonyítása.

4.3. LEMMA. *Legyen \mathbf{x} a τ -környezet tetszőleges pontja. Ekkor:*

- i. $\frac{1}{\tau\sqrt{n}} \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2}$,
- ii. $\frac{4(\tau-1)}{\tau+1} \frac{1}{\tau\sqrt{n}} < \frac{\tau-1}{H-\tau h} \frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|}$.

Bizonyítás.

i.

$$\frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2} \geq \frac{\|\tau_1 \mathbf{e}\|}{2\tau_2} = \frac{\tau_1\sqrt{n}}{2\tau_2} \geq \frac{\tau_1}{\tau_2\sqrt{n}} = \frac{1}{\tau\sqrt{n}}.$$

ii.

- $H - \tau h \leq (\tau + 1)\|\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s\|_\infty$, ami H és h definíciójából következik.
- $\|\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{4}$, ugyanis $\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s = \frac{((\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s)^2 - (\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_s)^2)}{4}$, így a következő becslés nyerhető:

$$-\frac{(\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_s)^2}{4} \leq \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \leq \frac{(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s)^2}{4}.$$

Miután $\mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_s = 0$, ezért $\|\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s\|^2 = \|\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_s\|^2$. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \leq \frac{\|\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s\|^2}{4} \mathbf{e}.$$

- $\|\mathbf{p}\|^2 \leq \tau_2$, mivel

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \left\| \frac{\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|} \right\| \leq \|\mathbf{u}\|_\infty^2 \left\| \frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right\|^2 \leq \tau_2.$$

- $\|\mathbf{u}^2\| \leq \|\mathbf{u}^2\|_\infty \|\mathbf{e}\| \leq \tau_2 \sqrt{n}$.

Így

$$\frac{\tau - 1}{H - \tau h} \frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|} \geq \frac{4(\tau - 1)}{(\tau + 1)\tau_2} \frac{\tau_1\tau_2}{\sqrt{n}\tau_2} = \frac{4(\tau - 1)}{\tau + 1} \frac{1}{\tau\sqrt{n}}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a lemmát. \square

4.2. KÖVETKEZMÉNY. Minden $\tau > 1$ számra:

$$0 < \min \left\{ \frac{1}{\tau\sqrt{n}}, \frac{4(\tau-1)}{\tau+1} \frac{1}{\tau\sqrt{n}} \right\} \leq \min \left\{ \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2}, \frac{\tau-1}{H-\tau h} \frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|} : \mathbf{x} \in V_\tau \right\}.$$

Ezen kívül bármely $\alpha > 0$ lépéshossz globálisan τ -megfelelő, ha

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{1}{\tau\sqrt{n}}, \frac{4(\tau-1)}{\tau+1} \frac{1}{\tau\sqrt{n}} \right\}.$$

Megjegyzés.

$$\frac{1}{\tau\sqrt{n}} = \frac{4(\tau-1)}{\tau+1} \frac{1}{\tau\sqrt{n}} \iff \tau = \frac{5}{3}.$$

4.1. TÉTEL. Legyen \mathbf{x}^0 belső pont. Ha \mathbf{x}^0 a centrális út valamelyik pontja, akkor válasszuk a $\tau > 1$ környezetet tetszőlegesen. Ha \mathbf{x}^0 nem a centrális úton van, akkor legyen $\tau = \delta(\mathbf{x})$.

$$\alpha := \begin{cases} \frac{4(\tau-1)}{\tau+1} \frac{1}{\tau\sqrt{n}} & 1 < \tau \leq \frac{5}{3}, \\ \frac{1}{\tau\sqrt{n}} & \tau > \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Ekkor az \mathbf{x}^0 pontból indított Dikin-algoritmus az $(SP)_\varepsilon$ feladatot legfeljebb

$$\begin{cases} \left\lceil \left[\frac{(\tau+1)}{4(\tau-1)} n\tau \log \left(\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \right) \right] \right\rceil & 1 < \tau \leq \frac{5}{3}, \\ \left\lceil n\tau \log \left(\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \right) \right\rceil & \tau > \frac{5}{3}. \end{cases}$$

iterációban megoldja.

Bizonyítás. A 4.2. következmény alapján α globálisan τ -megfelelő lépéshossz. Valóban, hiszen

$$\frac{1}{\tau\sqrt{n}} < \frac{4(\tau-1)}{\tau+1} \frac{1}{\tau\sqrt{n}}$$

pontosan akkor teljesül, ha $\tau > \frac{5}{3}$. Ezért α belsőpontos is, azaz belső pontból belső pontba jutunk, így a tompított Dikin-lépés minden iterációban belsőpontos megoldást generál, csökkentett dualitásréssel. Megálláskor a dualitásrés nem haladja meg az ε hibakorlátot, tehát a Dikin-algoritmus az $(SP)_\varepsilon$ feladat megoldását szolgáltatja.

A lépésszám a kezdeti dualitásrés és az ε hibakorlát arányának a bitléírásában polinomiális.

Valóban, az 3.1. következmény, α iterációfüggetlensége és definíciója a kívánt

$$\left\lceil \log \left(\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \right) \frac{\sqrt{n}}{\alpha^*} \right\rceil = \left\lceil \log \left(\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \right) \frac{\sqrt{n}}{\alpha} \right\rceil = \begin{cases} \left\lceil \left[\frac{(\tau+1)}{4(\tau-1)} n\tau \log \left(\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \right) \right] \right\rceil & 1 < \tau \leq \frac{5}{3}, \\ \left\lceil n\tau \log \left(\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \right) \right\rceil & \tau > \frac{5}{3} \end{cases}$$

lépésszámkorlátot szolgáltatja. \square

5. Összefoglalás

Az [1] könyv 456. oldalán található Lemma E.4 bizonyításában az (E.16) lépés hibás, mert az összehasonlított vektorok minimális és maximális értéke nem feltétlenül ugyanazon koordinátán vétetnek fel. Ezt a lépést kijavítva egy élesebb tételhez jutottunk, miközben az eredeti bizonyítás gondolatmenete továbbra is alkalmazható volt.

Fontos megjegyezni, hogy a javítással nem változott meg az algoritmus komplexitása, illetve az eredeti tétel állítása érvényben maradt.

Hivatkozások

- [1] CORNELIS ROOS, TAMÁS TERLAKY, JEAN-PHILIPPE VIAL: *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Second Edition, 65–70, 451–459; Springer, 2005

(Beérkezett: 2008. június 17.)

MIKLÓS ZOLTÁN

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter Sétány 1/c.
miklosz@cs.elte.hu

TAKÁCS SZABOLCS

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter Sétány 1/c.
tretarkhon@gmail.com

IMPROVEMENT ON THE PROOF OF 'A POLYNOMIAL DIKIN-TYPE PRIMAL-DUAL ALGORITHM FOR LINEAR PROGRAMMING'

ZOLTÁN MIKLÓS AND SZABOLCS TAKÁCS

The Dikin ellipsoid method for linear programming is presented in our paper on the basis of [1]. We correct a mistake in the proof of a technical lemma for the complexity analysis of the algorithm, then we propose a new selection rule for the environment parameter by correcting the mistake in question. Further, we determine an iteration independent steplength and prove an upper bound for the complexity.

Alkalmazott Matematikai Lapok (2009)