Alkalmazott Matematikai Lapok **27** (2010), 1-15.

SZINTÁTMETSZÉSI PROBLÉMA ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSA A SPARRE ANDERSEN-MODELLBEN

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA, MIHÁLYKÓ CSABA, LAKATOS G. BÉLA

A biztosítási matematika fő kérdése a tönkremenés valószínűségének, a tönkremenési idő eloszlásának meghatározása, és kevés figyelmet fordítanak a pénztárban levő pénzmennyiség legnagyobb értékének vizsgálatára. Mi most arra a kérdésre keressük a választ, hogy a biztosítási matematikában Sparre Andersen-modellként ismert modell esetén vajon meghalad-e valaha egy bizonyos szintet a pénztárban levő pénzmennyiség, és ha igen, akkor mikor. Általánosabban egy olyan függvény elemzését végezzük el dolgozatunkban, amely speciális esetként adja meg a pénzmennyiség-szint elérésének valószínűségét, valamint a szintátmetszési idő várható értékét.

1. Bevezetés

A biztosítási matematikában alkalmazott modellek esetén a központi kérdés, hogy véges vagy végtelen időintervallumon vizsgálva a folyamatot, vajon tönkremegy-e a biztosítótársaság, illetve ez az esemény mikor fog megtörténni. Ha más kérdések felvetődnek, akkor is általában a tönkremenés időpontjáig foglalkoznak a kérdéssel.

Mivel vannak olyan stratégiák, amelyben bizonyos pénzmennyiség elérésekor a befizetendő pénzmennyiséget csökkentik [1], vagy más esetekben osztalékot fizetnek egy bizonyos nyereség elérése után [4], ezért érdekes lehet annak vizsgálata, hogy vajon meghalad-e egy bizonyos szintet valaha is a pénztárban levő pénzmennyiség, és ha ez megtörténik, vajon mikorra várható. Vagyis milyen valószínűséggel, illetve mikor számíthatunk kedvezményekre. Mi most ezzel a kérdéssel olyan tekintetben foglalkozunk, hogy közben nem nézzük, vajon a pénztárban levő pénzmennyiség negatívvá vált-e eközben. Azért is érdekes lehet ez a kérdés, mert a tároló modellek vizsgálata során ennek a kérdésnek a megfelelője a szükséges kezdő anyagmennyiség meghatározása, amelynél nem releváns kérdés, hogy az anyagelfogyás előtt meghaladt-e egy bizonyos szintet a tárolóban levő anyag mennyisége [8, 9].

Ugyanez a kérdés vetődik fel abban az esetben, amikor a pénztárból a kifizetés járadék formájában történik, és a befizetések történnek véletlen időpontokban és véletlen nagyságban, és arra a kérdésre várunk választ, hogy vajon adott kezdőtőke mellett milyen valószínűséggel megy tönkre a biztosítótársaság, illetve mikor történik ez a tönkremenés. A kérdést megfogalmazza Grandell könyvében [6], és a tönkremenési probléma megoldását speciális esetben kapcsolatba hozza a klasszikus rizikófolyamat tönkremenési problémájának megoldásával.

A hagyományos rizikófolyamat és a pozitív ugrásokkal történő, általunk vizsgált folyamat tönkremenési egyenleteinek összekapcsolása általánosabb esetben történt Mazza és Rulliere cikkében [7]. A pozitív ugrások esetével foglalkozik, de csak a tönkremenési valószínűség megadását tárgyalja Dong és Wang Erlang(n) eloszlású káresemények közt eltelt idők esetén [2, 3]-ban.

A megfogalmazott célok érdekében végzett vizsgálatok során reflektorfénybe kerültek olyan függvények, amelyek elemzése segíti az elsődleges célok elérését, és választ adhatnak a gyakorlati problémákra. Egy ilyen függvénnyel foglalkozunk jelen dolgozatunkban.

2. A vizsgált modell

Tekintsük a biztosítási matematikában gyakran használt, Sparre Andersen-modellként ismert modellt, azaz legyen $t_0 = 0$, valamint legyenek t_i $(i = 1, 2, 3 \dots)$ független, nemnegatív értékű azonos eloszlású valószínűségi változók. A biztosítási terminológiában t_i adja meg az $i-1$-edik és az i-edik kárkifizetések közt eltelt időt. Jelöljük közös eloszlásfüggvényüket $F(t)$-vel, sűrűségfüggvényüket $f(t)$-vel, μ_F-fel a közös (véges) várható értéküket és σ_F-fel a közös (véges) szórásukat. Jelölje $N(t)$ a t ideig történő káresemények számát. Az i-edik káresemény során az Y_i valószínűségi változó adja meg a kifizetendő pénzmennyiséget. Az Y_i valószínűségi változókról ugyancsak feltételezzük, hogy nemnegatív értékűek, egymástól függetlenek, és azonos eloszlásúak $G(y)$ eloszlásfüggvénnyel, $g(y)$ sűrűségfüggvénnyel, μ_G véges várható értékkel és σ_G véges szórással. Feltételezzük továbbá, hogy az $N(t)$ kárszám- folyamat és Y_i egymástól függetlenek. A befizetések folyamatosan érkeznek állandó c intenzitással. Jelöljük z_0-lal a kezdőtőkét. Ahhoz, hogy a pénztárban levő pénzmennyiség ne haladja meg a $z_1 \geq z_0$ szintet, az szükséges, hogy

$$z_1 \geq z_0 - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + ct,$$

azaz a $z_1 - z_0 \geq ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ egyenlőtlenség teljesüljön minden nemnegatív t értékre. z-vel jelölve a $z_1 - z_0$ nemnegatív különbséget, vizsgáljuk a

$$z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct \geq 0$$

egyenlőtlenség teljesülését, ami azt jelenti, hogy a pénztárban levő pénzmennyiség növekménye nem haladja meg a z értéket.

Definiáljuk az $R : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ függvényt az alábbi módon:

$$R(z) = P\left(\left\{0 \le z + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct, \quad \forall t : 0 \le t\right\}\right),$$

továbbá vezessük be az alábbi függvényeket:

Legyen $V(t) = z - ct + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ és

$$T_V = \begin{cases} \inf\{t : V(t) < 0\} \\ \infty, \quad \text{ha} \quad V(t) \ge 0 \quad \forall t \ge 0 \end{cases}$$

továbbá legyen $\phi : \mathbb{R}_0^+ x \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ az alábbi módon definiálva:

$$\phi(z,\delta) = E\left(e^{-\delta T_V} 1_{T_V<\infty} | V(0) = z\right), \quad z \ge 0, \quad \delta \ge 0.$$

Ez utóbbi függvény a szintátlépési idő sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja. Cikkünkben a $\phi(z,\delta)$ függvénnyel kapcsolatos eredményeket kívánjuk ismertetni. Megemlítjük, hogy a korábban említett tönkremenési probléma esetén az imént definiált $\phi(z,\delta)$-nak megfelelő függvényt Gerber és Shiu vezették be [5].

3. A $\phi(z,\delta)$ függvény általános tulajdonságai

A $\phi(z,\delta)$ függvénnyel kapcsolatban könnyen bizonyíthatjuk az alábbi állítást.

3.1. Állítás. *$\phi(z,\delta)$ korlátos, a második változójában monoton fogyó függvény.*

Bizonyítás. Mivel $0 \le e^{-\delta T_V} \le 1$, és $0 \le 1_A \le 1$, ezért szorzatuk is 0 és 1 közé esik, tehát a szorzat várható értéke is 0 és 1 közé esik minden $z \ge 0$-ra és $\delta \ge 0$-ra. Ha δ nő, akkor $e^{-\delta T_V}$ szigorúan monoton fogy. □

Megjegyezzük, hogy a $\phi(z,\delta)$ függvény a $\delta = 0$ paraméter esetén éppen $1 - R(z)$-t adja meg, hiszen ha $\delta = 0$, akkor

$$\phi(z,0) = E\left(1_{T_V<\infty}\right) = P\left(T_V < \infty\right) = 1 - R(z),$$

valamint a paraméterben folytonos, sőt akárhányszor deriválható ($\delta \ge 0$). Továbbá igaz, hogy

$$(-1)^k \frac{\partial^k \phi(z,\delta)}{\partial \delta^k}\bigg|_{\delta=0} = E\left(T_V^k \cdot 1_{T_V<\infty}\right),$$

és

$$\lim_{\delta \to 0+} \phi(z,\delta) = \phi(z,0) = 1 - R(z).$$

3.2. Állítás. *$\phi(z,\delta)$ kielégíti az alábbi integrálegyenletet, ha $z \geq 0$ és $\delta \geq 0$:*

$$\phi(z,\delta) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} e^{-\delta t}\phi(z+y-ct,\delta)f(t)g(y)dtdy + \int_{\frac{z}{c}}^\infty e^{-\delta\frac{z}{c}}f(t)dt. \tag{1}$$

Bizonyítás. z jelöli a beállított szintet, T_V pedig a szint elérési idejét, t_1 az első kifizetés idejét és Y_1 az első alkalommal kifizetett összeget. Ekkor

$$\begin{aligned}\phi(z,\delta) &= E(e^{-\delta T}1_{T_V<\infty}) = E(E(e^{-\delta T_V}1_{T_V<\infty}|t_1=t,Y_1=y)) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty E(e^{-\delta T_V}1_{T_V<\infty}|t_1=t,Y_1=y)f(t)g(y)dtdy.\end{aligned} \tag{2}$$

Két eset lehetséges. Ha $t_1 \geq \frac{z}{c}$, akkor $E\left(e^{-\delta T_V}1_{T_V<\infty}|t_1=t\right) = e^{-\frac{z}{c}\delta}$, hiszen ekkor biztosan a $\frac{z}{c}$ időpontban éri el a szintet a pénznövekmény.

Ha $t_1 = t < \frac{z}{c}$, akkor a szint elérési idejét t_1-hez viszonyíthatjuk, továbbá a t_1 időpontban a pénztárban levő pénz $z+y-ct$. Mivel

$$E\left(e^{-\delta T_V}1_{T_V<\infty}|t_1=t\right) = e^{-\delta t}\phi(z+y-ct,\delta),$$

ebből kifolyólag (2) a következővel lesz egyenlő:

$$\int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} e^{-\delta t}\phi(z+y-ct,\delta)f(t)g(y)dtdy + \int_0^\infty \int_{\frac{z}{c}}^\infty e^{-\delta\frac{z}{c}}f(t)g(y)dtdy.$$

A második integrált kiintegrálva y szerint éppen a kívánt állítást kapjuk. □

3.3. Állítás. *Az előbbi egyenlet $\delta = 0$ esetén némi átalakítás után az alábbi egyenletet adja:*

$$R(z) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} R(z-c\tau+y)f(\tau)g(y)d\tau dy, \tag{3}$$

amely megegyezik a [8] publikációban közölt 3.2. állítás (7) egyenletével.

3.4. Állítás. *A (1) egyenletnek minden rögzített $\delta > 0$ esetén egyértelmű megoldása van az R_0^+-on korlátos függvények körében.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (1)-nek két különböző megoldása is van, és vegyük a különbségüket, jelöljük ezt $\phi_k(z,\delta)$-val. Ekkor $\phi_k(z,\delta)$ kielégíti a

$$\phi_k(z,\delta) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} e^{-\delta t}\phi_k(z+y-ct,\delta)f(t)g(y)dtdy$$

egyenletet.

Legyen $\|\phi_k(.,\delta)\| = \sup_{z\in R_0^+} |\phi_k(z,\delta)|$. Mivel mindkét megoldás korlátos, ezért a különbségük maximum normája véges. Továbbá

$$|\phi_k(z,\delta)| \leq \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} e^{-\delta t} |\phi_k(z+y-ct,\delta)| f(t)g(y)dtdy \leq \|\phi_k(.,\delta)\| \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t)dt$$

minden$z \geq 0$ esetén.

Ha $\delta > 0$ és ha $\|\phi_k(.,\delta)\| \neq 0$(azaz a különbség nem azonosan 0), akkor azt kapjuk, hogy $\|\phi_k(.,\delta)\| \leq \|\phi_k(.,\delta)\| \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t)dt < \|\phi_k(.,\delta)\|$, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy nem lehet két különböző megoldása (1)-nek, ha $\delta > 0$. □

Megjegyezzük, hogy $\delta = 0$ esetén $\int_0^\infty e^{-\delta t} f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt = 1$, tehát az egyértelműség az előbbi gondolatmenet segítségével nem igazolható. Sőt, az egyértelműség nem is igaz, hiszen a (3) egyenletnek az azonosan 0 függvény is megoldása. A $\lim_{z\to\infty} R(z) = 1$ feltétel mellett azonban speciális esetekben sikerült bizonyítani a megoldás egyértelműségét, s ez a megoldás természetesen az $1 - \lim_{\delta\to 0+} \phi(z,\delta)$ függvény [10].

4. A $\phi(z,\delta)$ függvény tulajdonságai Poisson kárszám-folyamat esetén

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a kárszám-folyamat Poisson-folyamat.

4.1. Állítás. *Ha a kárszám-folyamat Poisson-folyamat, azaz $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ minden nemnegatív t-re, akkor $\phi(w,\delta)$ kielégíti az alábbi integrálegyenletet:*

$$\phi(w,\delta)-\phi(0,\delta) = -\frac{\delta}{c}\int_0^w \phi(x,\delta)dx+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (\phi(w+y,\delta)-\phi(y,\delta))(1-G(y))dy \quad (4)$$

és $\phi(0,\delta) = 1$ minden $\delta \geq 0$esetén.

Bizonyítás. Induljunk ki (1)-ből, írjuk be $f(t)$ helyébe az exponenciális függvényt, és végezzük el az integrálást! Azt kapjuk, hogy

$$\phi(z,\delta) = \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} \lambda e^{-(\delta+\lambda)t} \phi(z+y-ct,\delta)g(y)dtdy + e^{-(\lambda+\delta)\frac{z}{c}}.$$

Vezessük be a $\tau = z - ct$ új változót; az integrálos tagot tovább vizsgálva

$$\int_0^\infty \int_z^0 \frac{-\lambda}{c} \lambda e^{-(\delta+\lambda)\frac{z}{c}} \phi(y+\tau,\delta) e^{(\delta+\lambda)\frac{\tau}{c}} g(y)d\tau dy =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^z \frac{\lambda}{c} e^{-(\delta+\lambda)\frac{z}{c}} \phi(y+\tau,\delta) e^{(\delta+\lambda)\frac{\tau}{c}} g(y)d\tau dy.$$

Beszorozva $e^{(\delta+\lambda)\frac{z}{c}}$-vel és deriválva z szerint azt kapjuk, hogy

$$e^{(\delta+\lambda)\frac{z}{c}}\left(\frac{\partial\phi\,(z,\delta)}{\partial z}+\frac{\delta+\lambda}{c}\phi(z,\delta)\right)=\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}\phi\,(y+z,\delta)\,e^{(\delta+\lambda)\frac{z}{c}}g(y)dy. \quad (5)$$

Egyszerűsítve $e^{(\delta+\lambda)\frac{z}{c}}$-vel

$$\frac{\partial\phi(z,\delta)}{\partial z}+\frac{\delta+\lambda}{c}\phi(z,\delta)=\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}\phi(y+z,\delta)g(y)dy.$$

Átrendezve
$$\frac{\partial\phi(z,\delta)}{\partial z}=\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}\phi(z+y,\delta)g(y)dy-\frac{\delta+\lambda}{c}\phi(z,\delta).$$

Ezt az egyenletet integrálva z szerint 0-tól w-ig

$$\begin{aligned}\phi(w,\delta)-\phi(0,\delta)&=\int_0^w\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}\phi(y+z,\delta)g(y)dydz-\int_0^w \frac{\delta+\lambda}{c}\phi(z,\delta)dz=\\&=\int_0^\infty\int_0^w \frac{\lambda}{c}\phi(y+z,\delta)g(y)dzdy-\int_0^w \frac{\delta+\lambda}{c}\phi(z,\delta)dz.\end{aligned}$$

Bevezetve az $x=z+y$ új változót és a $B(w,\delta)=\int_0^w\phi(x,\delta)dx$ új függvényt, az előbbi átalakítás a következőképpen folytatható:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_y^{w+y}\frac{\lambda}{c}\phi(x,\delta)g(y)dxdy-\int_0^w\frac{\delta+\lambda}{c}\phi(z,\delta)dz=\\
=&\int_0^\infty\frac{\lambda}{c}(B(w+y,\delta)-B(y,\delta))g(y)dy-\frac{\lambda+\delta}{c}B(w,\delta)=\\
=&\left[-\frac{\lambda}{c}(B(w+y,\delta)-B(y,\delta))(1-G(y))\right]_0^\infty+\\
+&\int_0^\infty\frac{\lambda}{c}(\phi(w+y,\delta)-\phi(y,\delta))(1-G(y))dy-\frac{\delta+\lambda}{c}B(w,\delta)=\\
=&\frac{\lambda}{c}B(w,\delta)+\int_0^\infty(\phi(w+y,\delta)-\phi(y,\delta))(1-G(y))dy-\frac{\delta+\lambda}{c}B(w,\delta).\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy

$$B(w+y,\delta)-B(y,\delta)=\int_y^{w+y}\phi(z,\delta)dz\le w$$

minden rögzített w esetén és $\lim_{y\to\infty}(1-G(y))=0$. Összegezve, azt kaptuk, hogy

$$\phi(w,\delta)-\phi(0,\delta)=\frac{-\delta}{c}\int_0^w\phi(x,\delta)dx+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty(\phi(w+y,\delta)-\phi(y,\delta))(1-G(y))dy.$$

$\phi(0,\delta)=1$ könnyen látható például $\phi(z,\delta)$ definíciójából. $\square$

Megjegyezzük, hogy az előbb végrehajtott átalakítások fordított sorrendben is elvégezhetők. Azaz kiindulva a (4) egyenletből megkaphatjuk az (1) egyenletet, ha a bizonyításban szereplő, (5)-t eredményező lépésben említett deriválás ellentéteként történő integrálás során figyelembe vesszük a $\phi(0,\delta) = 1$ kezdőfeltételt. Így a (4) egyenletnek is egyértelmű megoldása van a korlátos és folytonos függvények körében.

4.2. Állítás. *Ha a kárszám-folyamat Poisson-folyamat, akkor a (4) egyenletnek van exponenciális, azaz $\phi(z,\delta) = e^{-k(\delta)\cdot z}$ alakú megoldása, ahol $k(\delta) > 0$, értéke függ δ értékétől, de rögzített δ esetén egyértelmű. Ez a $k(\delta) > 0$ érték $\delta > 0$ esetén egyértelmű pozitív megoldása a*

$$k(\delta) \cdot \left(c - \lambda \int_0^\infty e^{-k(\delta)y}(1 - G(y))\right) dy = \delta \tag{6}$$

úgynevezett általánosított Lundberg-egyenletnek. Megjegyezzük, hogy mivel a korábbiak során bebizonyítottuk, hogy az egyenlet megoldása egyértelmű a korlátos függvények körében, ezért ez a megoldás.

Bizonyítás. Induljunk ki az előzőleg bizonyított

$$\phi(w,\delta) - 1 = -\frac{\delta}{c}\int_0^w \phi(x,\delta)dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (\phi(w+y,\delta) - \phi(y,\delta))(1 - G(y))dy$$

összefüggésből, és keressük a megoldást $\phi(w,\delta) = e^{-k(\delta)w}$ alakban!

Vizsgáljuk meg, milyen összefüggést kell kielégítenie a kitevőnek! Amennyiben $k(\delta) = 0$, akkor az egyenlet $0 = -\frac{\delta}{c}\int_0^w 1dx$, azaz $\delta = 0$ vagy $w = 0$, de mivel az egyenletnek minden $w \geq 0$ esetén teljesülni kell, ezért $\delta = 0$. Legyen $k(\delta) \neq 0$! $k(\delta) < 0$ esetén rögzített $\delta > 0$-ra a $\phi(z,\delta)$ nem korlátos. Ha $k(\delta) > 0$, akkor

$$\begin{aligned} &e^{-k(\delta)w} - 1 = \\ &= -\frac{\delta}{c}\int_0^w e^{-k(\delta)x}dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \left(e^{-k(\delta)\,(w+y)} - e^{-k(\delta)y}\right)(1 - G(y))dy = \\ &= -\frac{\delta}{c}\frac{e^{-k(\delta)w} - 1}{k(\delta)} + \frac{\lambda}{c}\left(e^{-k(\delta)w} - 1\right)\int_0^\infty e^{-k(\delta)y}(1 - G(y))dy. \end{aligned} \tag{7}$$

Mivel a kifizetendő kármennyiség várható értéke véges, így $\int_0^\infty (1 - G(y))dy$ véges, tehát $\int_0^\infty e^{-k(\delta)y}(1-G(y))dy$ is véges. Legyen $D_2 = \int_0^\infty e^{-k(\delta)y}(1-G(y))dy$.

Így (7) alapján

$$\left(e^{-k(\delta)w} - 1\right)\left(1 - \frac{\delta}{ck(\delta)} - \frac{\lambda}{c}D_2\right) = 0$$

teljesül, s lévén hogy az első tényező nem 0, tehát

$$1 - \frac{\delta}{ck(\delta)} - \frac{\lambda}{c}D_2 = 0,$$

amiből

$$ck(\delta) - \delta - \lambda k(\delta) D_2 = 0,$$

vagyis

$$k(\delta)(c - \lambda D_2) = \delta \tag{8}$$

Korábban megállapítottuk, hogy $k(\delta) = 0$ esetén $\delta = 0$, ami az $R(z)$ esete. Ha $\delta = 0$ és $k(\delta) \neq 0$, akkor $c - \lambda D_2 = 0$. Mivel $D_2 = \int_0^\infty e^{-k(\delta)y}(1 - G(y))dy$, ezért ez azt jelenti, hogy $1 = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-k(\delta)y}(1 - G(y))dy$.

Ezzel megmutattuk, hogy állításunk általánosítása annak a [8]-ban bizonyított állításnak, amely kimondta, hogy Poisson kárszám-folyamat esetén $R(z)$ exponenciális alakú megoldása $R(z) = 1 - e^{-\nu z}$, ahol ν a $\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-\nu y}(1 - G(y))dy = 1$ egyenlet megoldása.

Ha $\delta \neq 0$, akkor $k(\delta) \neq 0$, továbbá legyen

$$H(k) = k\left(c - \lambda \int_0^\infty e^{-ky}(1 - G(y))dy\right).$$

A (8) egyenlet a $H(k(\delta)) = \delta$ alakban írható. Ha k nő, akkorD_2 csökken, ellentettje nő, így $c - \lambda D_2$ nő. Előjele attól függően negatív, vagy pozitív pici k értékre, hogy $c - \lambda\mu_G \geq 0$, vagy $c - \lambda\mu_G < 0$. Ha $c - \lambda\mu_G \geq 0$, akkor

$$c - \lambda \int_0^\infty e^{-ky}(1 - G(y))dy > 0,$$

minden $k > 0$ esetén, tehát $H(k)$ szigorúan monoton nő. De $H(0) = 0$, és $\lim_{k\to\infty} H(k) = \infty$, ezért létezik pontosan 1 olyan $k > 0$ érték, amire $H(k) = \delta$. Ha $c - \lambda\mu_G < 0$, akkor kicsi k értékekre

$$c - \lambda \int_0^\infty e^{-ky}(1 - G(y))dy < 0,$$

így annak k-szorosa is negatív. Így $H(k)$ először fogy, majd nőni kezd, sőt bizonyos k értéktől fogva

$$k(c - \lambda \int_0^\infty e^{-ky}(1 - G(y))dy) > 0,$$

s ilyen k értékekre a $H(k)$ szigorúan monoton nő, valamint a határértéke ∞, tehát most is létezik pontosan egy olyan $k > 0$ érték, amelyre $H(k) = \delta$. A lépések fordított sorrendben való elvégzésével ellenőrizhető, hogy ezzel a $k(\delta)$ kitevővel a $\phi(w, \delta) = e^{-k(\delta)w}$ kielégíti a (4) egyenletet.

Ezzel beláttuk, hogy a (4) integrálegyenletnek van exponenciális megoldása, és az exponenciális függvény kitevője a (6) egyenlet egyértelmű pozitív megoldása. □

Megjegyezzük, hogy a 4.2. tétel eredménye megtalálható Mazza és Rulliere [7] publikációjában is, ők azonban más úton jutottak el hozzá. Nevezetesen a klasszikus tönkremenési probléma megoldását használták fel a szintátmetszési probléma megoldásához, és az általuk bebizonyított kapcsolat segítségével jutottak el ehhez a formulához.

Általában azonban nem igaz, hogy az (1) integrálegyenlet megoldása exponenciális alakú. Fennáll ugyanis a következő:

4.3. Állítás. *Ha a kárigények nagysága exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor az (1) integrálegyenlet megoldása csak Poisson kárszám-folyamat esetén exponenciális alakú.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\phi(z,\delta) = e^{-\nu(\delta)z}$ függvény ($\nu(\delta) > 0$ mellett) kielégíti a (1) egyenletet, azaz

$$e^{-\nu(\delta)z} = \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{c}} e^{-\delta t} e^{-\nu(\delta)\cdot(z+y-ct)} f(t) \frac{1}{\mu_G} e^{-\frac{1}{\mu_G} y} dt dy + \int_{\frac{z}{c}}^\infty e^{-\delta \frac{z}{c}} f(t) dt.$$

Kiintegrálva y szerint, beszorozva $e^{\nu(\delta)z}$-vel, majd deriválva z szerint, kapjuk, hogy

$$0 = \frac{1}{c}\frac{1}{\mu_G}\frac{1}{\nu(\delta)+\frac{1}{\mu_G}} e^{-\delta\frac{z}{c}} e^{\nu(\delta)z} f\left(\frac{z}{c}\right) + \\ + \left(\nu(\delta) - \frac{\delta}{c}\right) e^{\left(\nu(\delta)-\frac{\delta}{c}\right)z}\left(1 - F\left(\frac{z}{c}\right)\right) - e^{\left(\nu(\delta)-\frac{\delta}{c}\right)z}\frac{1}{c} f\left(\frac{z}{c}\right).$$

Egyszerűsítve $e^{\left(\nu(\delta)-\frac{\delta}{c}\right)z}$-val, majd bevezetve az $\widetilde{F}(x) = 1 - F\left(\frac{z}{c}\right)$ jelölést, láthatjuk, hogy

$$0 = -\frac{1}{\mu_G}\frac{1}{\nu(\delta)+\dfrac{1}{\mu_G}} \widetilde{F}'(x) + c\left(\nu(\delta)-\frac{\delta}{c}\right)\widetilde{F}(x) + \widetilde{F}'(x),$$

amiből

$$\widetilde{F}'(x) = -\frac{c\left(\nu(\delta)-\frac{\delta}{c}\right)}{\dfrac{\mu_G\nu(\delta)}{\mu_G\nu(\delta)+1}}\widetilde{F}(x).$$

Ez egy lineáris differenciálegyenlet $\widetilde{F}(x)$-re, amelynek az $\widetilde{F}(0) = 1$ kezdőfeltétel mellett egyértelmű exponenciális megoldása van, ez pedig a következő:

$$\widetilde{F}(x) = e^{-\frac{c\left(\nu(\delta)-\frac{\delta}{c}\right)}{\frac{\mu_G\nu(\delta)}{\mu_G\nu(\delta)+1}}x}.$$

Visszahelyettesítéssel megkapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{c\left(\nu(\delta)-\frac{\delta}{c}\right)}{\dfrac{\mu_G\nu(\delta)}{\mu_G\nu(\delta)+1}} = \frac{c\nu(\delta)-\delta}{\dfrac{\mu_G\nu(\delta)}{\mu_G\nu(\delta)+1}}$$

paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók a kárigények közt eltelt időközök.

Ebből $\nu(\delta)$ kifejezhető, és a pozitív gyök

$$\nu_1(\delta) = \frac{\delta\mu_G + \lambda\mu_G - c + \sqrt{(\delta\mu_G + \lambda\mu_G - c)^2 + 4\delta c\mu_G}}{2c\mu_G} > 0.$$

□

Megjegyezzük, hogy $\delta = 0$ esetén $\lambda\frac{\mu_G\nu(\delta)}{\mu_G\nu(\delta)+1} = c\nu(\delta)$ miatt $\lambda = c(\nu(0) + \frac{1}{\mu_G})$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók az egymást követő káresemények.

Ezzel egyúttal megadtuk egy speciális esetben a (4) egyenlet megoldását, nevezetesen:

4.4. Állítás. *Ha N(t) Poisson-folyamat, valamint* $G(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu_G}y}$ $(y > 0)$, *azaz a kifizetett károk nagysága is exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor a kitevő analitikusan megadható, nevezetesen*

$$k(\delta) = \frac{-\left(\frac{c}{\mu_G} - \lambda - \delta\right) + \sqrt{\left(\frac{c}{\mu_G} - \lambda - \delta\right)^2 + \frac{4c\delta}{\mu_G}}}{2c} \tag{9}$$

és így

$$\phi(z,\delta) = e^{-\frac{-\left(\frac{c}{\mu_G} - \lambda - \delta\right) + \sqrt{\left(\frac{c}{\mu_G} - \lambda - \delta\right)^2 + \frac{4c\delta}{\mu_G}}}{2c}z}.$$

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény megtalálható Mazza és Rulliere [7] publikációjában is.

A (4) egyenlet megoldásának alakját figyelembe véve és felhasználva azt, hogy

$$(-1)^k\frac{\partial^k\phi(z,\delta)}{\partial\delta^k}\bigg|_{\delta=0} = E\left(T_V^k 1_{T_V<\infty}\right),$$

$k(\delta)$ismeretében könnyen meghatározható $E\left(T_V^k 1_{T_V<\infty}\right)$.

4.5. Állítás. *Speciálisan, z kezdőtőkét feltételezve, ha N(t) Poisson-folyamat, akkor*

$$E(T_V 1_{T_V<\infty}) = -\frac{\partial\phi(z,\delta)}{\partial\delta}\bigg|_{\delta=0} = zk'(0)e^{-k(0)z},$$

ahol

$$k'(0) = \frac{1}{\lambda\int_0^\infty ye^{-k(0)y}(1-G(y))dy}.$$

Bizonyítás. Induljunk ki a (6) összefüggésből, azaz a

$$k(\delta)\cdot\left(c - \lambda\int_0^\infty e^{-k(\delta)y}(1-G(y))dy\right) - \delta = 0 \tag{10}$$

alakból. Az implicit függvény tétel alapján láthatjuk, hogy $k(\delta)$differenciálható.

(10)-et deriválva δ szerint

$$k^{'}(\delta)\cdot\left(c-\lambda\int_0^\infty e^{-k(\delta)y}(1-G(y))dy\right)+$$
$$+\,k(\delta)\cdot\;k^{'}(\delta)\cdot\lambda\int_0^\infty ye^{-k(\delta)\cdot y}(1-G(y))dy-1=0.$$

Figyelembe véve, hogy $\delta=0$, valamint hogy $c-\lambda\int_0^\infty e^{-k(0)y}(1-G(y))dy=0$, kapjuk, hogy

$$k^{'}(0)=\frac{1}{\lambda\displaystyle\int_0^\infty ye^{-k(0)y}(1-G(y))dy}.$$

□

5. A kitevő numerikus meghatározása

Tekintettel arra, hogy az (1), de még a (4) egyenletnek is csak speciális esetben ismert az analitikus megoldása, ezért az egyenlet megoldása érdekében szükség van numerikus megoldási módszer megkonstruálására. Cikkünkben csak a (4) egyenlet numerikus megoldási módszerével foglalkozunk.

A (4) egyenlet megoldásának numerikus közelítése szempontjából nagyon hasznos, hogy tudjuk, hogy a (4) egyenletnek exponenciális függvény a megoldása, s a megoldás kitevőjében szereplő együttható meghatározható a (6) egyenlet megoldásával.

A gyökkereső eljárás során a Newton-módszert alkalmazzuk, kiszámítva a $H(k)-\delta$ függvény és k szerinti deriváltja értékeit, vagy ha azokat nem tudjuk kiszámítani, azoknak közelítő értékeit. Ez utóbbi esetben a közelítő értékek kiszámításához szükségünk van improprius integrál közelítő meghatározására. Ehhez a következőképpen jutunk:

Az $x=ky$ helyettesítés után $\frac{1}{k}\left(1-G(\frac{x}{k})\right)=\widetilde{g}(x)$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-ky}(1-G(y))dy=\int_0^\infty e^{-x}\,\widetilde{g}(x)dx,$$

s a numerikus integrálás elvégzésére a $\widetilde{g}(x)$ függvénnyel a Gauss-Laguerre kvadratúra formula használható [9].

A $H(k)-\delta$ függvény deriváltja a Newton-módszer alkalmazásához szintén kell, így meg kell (analitikusan vagy közelítőleg) azt is határozni. A derivált a következő alakú:

$$H^{'}(k)=-\int_0^\infty ye^{-ky}(1-G(y))dy. \tag{11}$$

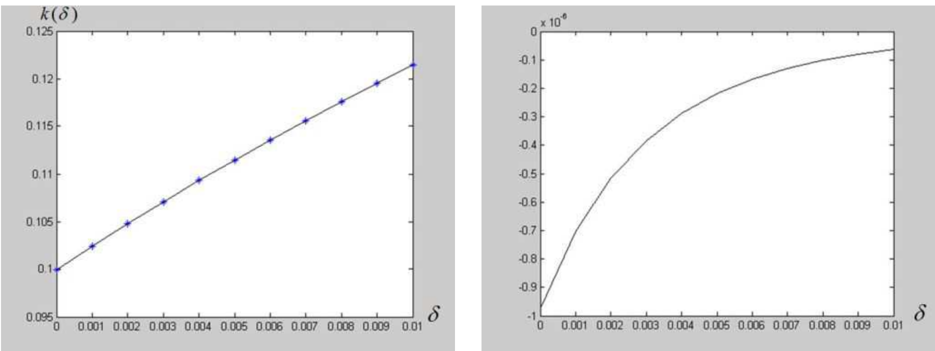
Az előbbi improprius integrál konvergens, mivel

$$0 \le \int_0^\infty y e^{-ky}(1-G(y))dy \le \int_0^\infty y(1-G(y)dy =$$
$$= \left(\left[\frac{y^2(1-G(y)}{2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{y^2}{2} G^{'}(y))dy\right) = \frac{1}{2} M_2,$$

amennyiben M_2 jelöli Y_i $i = 1 \ldots$ második momentumát.

A (11)-ben szereplő improprius integrál numerikus kiszámítására szintén használható a Gauss-Laguerre kvadratúra formula a $\widetilde{h}(x) = \frac{x}{k^2}\left(1 - G(\frac{x}{k})\right)$ függvénnyel. Így a Newton-módszer alkalmazásával (6) gyöke numerikusan megadható, akár tudjuk a $H(k) - \delta$ függvény és k szerinti deriváltja értékeit pontosan számítani, akár nem. (10) és (11) alapján $k^{'}(\delta)$ is megkapható numerikusan, így a szintátlépési idő várható értéke közelítőleg számolható.

A numerikus számolások során azt tapasztaltuk, hogy a tizenkilenced fokú Laguerre-polinomokat használva az improprius integrálok értékét nagy pontossággal megkaphatjuk. A tizenkilenced fokú polinom alkalmazásához szükséges kvadratúra súlyokat, valamint a polinom gyökhelyeit táblázatban találtuk meg [8].

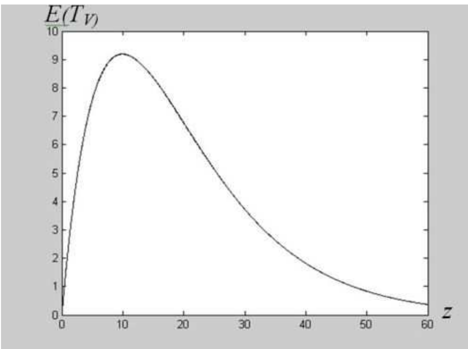


(a) (b)

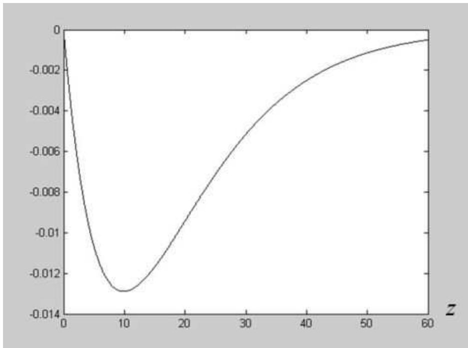
1. ábra. Az exponenciális megoldásfüggvény kitevőjének pontos (-) és numerikusan számolt (*) értékei (1(a)), és azok különbsége δ függvényében (1(b)).

Végezetül a numerikus eljárás során kapott megoldás pontosságának illusztrálására mutatjuk az alábbi ábrákat. Legyen a kárszámot megadó folyamat Poisson-folyamat $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz a folyamat során exponenciális eloszlású időközönként érkeznek a kárigények, egységnyi időközönként átlagosan egy, míg a kifizetett kár nagysága exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\mu_G = 2,5$ (pénzegység) várható értékkel, legyen továbbá $c = 2$. Az 1(a) ábra az exponenciális megoldásfüggvény kitevőjének értékeit mutatja δ függvényében. A vonal a (9) alapján számolt pontos értéket, a * a numerikusan számolt értékeket mutatja. Az 1(b) ábra pontos és a numerikusan számolt kitevők különbségét mutatja. Az eltérés nagyságrendje 10^{-6}.

A 2(a) ábra a szintátlépési idő várható értékét mutatja az átlépendő szint függvényében. A pontosan és a numerikusan számolt függvények az ábrán nem különböztethetők meg a nagyfokú egybeesés miatt. A numerikus és a pontos értékek különbségét a 2(b) ábrán vehetjük szemre. A különbség esetünkben századnyi nagyságrendű, és ott a legnagyobb, ahol maga a függvény is legnagyobb.



(a)



(b)

2. ábra. A szintátlépési idő várható értéke az átlépendő szint függvényében (2(a)), valamint a numerikusan számolt és a pontos várható érték különbsége (2(b)).

Első ránézésre kissé meglepő, hogy amint az ábrán látható, a szintátlépési idő várható értéke először nő, majd fogyni kezd. Ennek az az oka, hogy a szintátlépés valószínűsége a szint függvényében exponenciálisan csökken, tehát bizonyos szint esetén már nagyon kicsivé válik, így a véges várható érték a kicsi valószínűség miatt nem lesz nagy.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS: A szerzők köszönetüket fejezik ki az ismeretlen bírálónak értékes, javító megjegyzéseiért.

Hivatkozások

[1] Bratiychuk, M. S., Derfla, D.: *On a modification of a the classical risk process.* Insurence: Mathematics and Economics **41** (2007), 156–162.

[2] Dong, Y.: *Ruin probability for correlated negative risk sims model with Erlang processes.* Appl. Math. J. Chinese Univ. **24** (2009) 14–20.

[3] Dong, Y., Wang, G.: *On a compounding assets model with positive jumps.* Applied Stochastic Models in Buisness and Industry **24**, (2008) 21–30.

[4] Gao, Q. , Wu, Y., Zhu, C. and Wei, C.: *Ruin problems in risk models with dependent rates of interest*, Statistics and Probability Letters **77** (2007) 761–768.

[5] Gerber, H. U., Shiu, E. S. W.: *On the time value of ruin*, North American Actuarial Journal, (1998) 248–78 .

[6] Grandell, J.: *Aspects of Risk Theory.* Springrer-Verlag, New York, Berlin, London, Paris, Budapest, 1991.

[7] Mazza, C., Rulliere D.: *A link between wave governed random motions and ruin processes.* Insurance: Mathematics and Economics **35** (2004) 205–222.

[8] Mihálykóné Orbán É., Lakatos G. B., Mihálykó Cs.: *Tartályméretezési problémák vizsgálatának matematikai háttere sztochasztikus működési feltételek esetén.* Alkalmazott Matematikai Lapok **24** (2007) 277–301.

[9] Orbán-Mihálykó, É., Lakatos, B. G.: *Intermediate storage in batch/semicontinuous processing systems under stochastic operational conditions*, Computers and Chemical Engineering, **28** (2004) 2493–2508.

[10] Orbán-Mihálykó, É., Lakatos, B. G.: *On the advanced integral and differential equations of sizing procedure of storage devices*, Functional Differential Equations, **11** (2004) 121–131.

[11] Stroud, A. H., Secrest, D.: *Gaussian quadrature formulas*, Pentice-Hall, London, 1966.

(Beérkezett: 2008. február 28.)

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA
Pannon Egyetem
Matematika Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10–12.
orbane@almos.uni-pannon.hu

MIHÁLYKÓ CSABA
Pannon Egyetem
Matematika Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10–12.
mihalyko@almos.uni-pannon.hu

LAKATOS G. BÉLA
Pannon Egyetem
Folyamatmérnöki Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10–12.
lakatos@fmt.uni-pannon.hu

LEVEL-CROSSING PROBLEM AND ITS GENERALIZATION IN THE SPARRE ANDERSEN MODEL

Éva Orbán-Mihálykóné, Csaba Mihálykó, Béla G. Lakatos

The main problem in insurance is the ruin probability and small attention turns to the maximum value of the surplus. In this paper we ask if, the surplus exceeds a given level or not, and when it does, supposing Sparre Andersen risk model. Moreover we define a generalization of the function giving the probability of the level crossing and we analyze it. During our investigation we do not bother if the surplus becomes negative.