

## A FIZIKAI MATEMATIKA LEGÚJABB EREDMÉNYEI MINT A KÖZGAZDASÁG-TUDOMÁNY LEHETSÉGES VIZSGÁLATI ESZKÖZEI

MÓCZÁR JÓZSEF<sup>1</sup>

A közgazdaság-tudomány számos problémája a fizika analóg modelljeinek segítségével nyert megoldást. A közgazdászok körében erőteljesen megoszlanak a vélemények, hogy a közgazdasági modellek mennyire redukálhatók a fizika, vagy más természettudományok eredményeire. Vannak, akik pontosan ezzel magyarázzák, hogy a mai mainstream közgazdasági elmélet átalakult alkalmazott matematikává, ami a gazdasági kérdéseket csak a társadalomtudományi vonatkozásaitól eltekintve képes vizsgálni. Mások, e tanulmány szerzője is, viszont úgy vélekednek, hogy a közgazdasági problémák egy része, ahol lehetőség van a mérésre, jól modellezhető a természettudományok technikai arzenáljával. A másik része, amelyekben nem lehet mérni, s tipikusan ilyenek a társadalomtudományi kérdések, ott sokkal komplexebb technikákra lesz szükség. E tanulmány célkitűzése, hogy felvázolja a fizika legújabb, az irreverzibilis dinamika, a relativitáselmélet és a kvantummechanika sztochasztikus matematikai összefüggéseit, amelyekből a közgazdászok választhatnak egy-egy probléma megfogalmazásában és megoldásában. Például az *időoperátorok* pontos értelmezése jelentős fordulatot hozhat a makroökonómiai elméletekben; vagy az eddigi statikus egyensúlyi referencia pontokat felváltják a dinamikus, időben változó *sztochasztikus egyensúlyi referencia függvények*, ami forradalmian új megvilágításba helyezhet számos társadalomtudományi, s főleg nemegyensúlyi közgazdasági kérdést. A termodinamika és a biológiai evolúció fogalmait és definícióit Paul A. Samuelson (1947) már adaptálta a közgazdaságtanban, viszont a kvantummechanika legújabb eredményeit, az időoperátorokat stb. nem érintette. E cikk azokat a legújabb fizikai, kémiai és biológiai matematikai összefüggéseket foglalja össze, amelyek hasznosak lehetnek a közgazdasági modellek komplexebb megfogalmazásához.

### 1. Bevezetés

„Az idő, az elfelejtett dimenzió.” Ilya Prigogine (1980).

---

<sup>1</sup>A szerző köszönetet mond Martinás Katalinnak és Ván Péternek a tanulmányhoz fűzött hasznos észrevételeikért. Külön köszönet illeti meg Matolcsi Tamást és a névtelen lektort a cikk szerkesztéséhez és a tárgyi pontosításokhoz adott javaslataikért. Az esetleges hibákra és tévedésekre a szokásos megjegyzés vonatkozik.

Ezzel a meglepő kijelentéssel kezdi Ilya Prigogine 1980-ban megjelent *From Being to Becoming* című könyvét. Mindezt azzal magyarázza, hogy a dinamika leírásában, egészen napjainkig, legyen az klasszikus vagy kvantum, az idő korlátozott módon lép be, olyannyira, hogy autonóm esetben, az időtől explicite független állapotegyenleteik, mind a Hamilton-függvény, mind a Schrödinger-operátor invariánsak az idő megfordítására, a  $t \rightarrow -t$ -re. Ezek azonban a valóságos esetek elenyésző részének felelnek meg, tehát nem igazán alkalmasak általános elvek megfogalmazására.<sup>2</sup>

A legkorábban, 1754-ben d'Alembert jegyezte meg az *Enciklopédiájában*, hogy az idő csupán csak geometriai paraméterként jelenik meg a dinamikában. Nála is tovább ment Lagrange (1796), amikor a dinamikát négydimenziós geometriának nevezte. Nézetük szerint a múlt és a jövő ugyanazt a szerepet játsszák. Az atomok és a részecskék által követett világvonalak vagy trajektóriák alkotják az univerzumunkat, amelyek a jövő és a múlt felé egyaránt húzhatók. Vagyis az összes energetikus feltette, hogy minden jelenség tökéletesen *reverzibilis*, és így az egyensúly nem függ az időtől. Jóllehet, közelítéseiket csak autonóm differenciálegyenletekben fogalmazták meg; tehát nincs is igazából tisztázva, hogy mi az egyensúly, és hogyan is függhetne az időtől?

Ez a világszemlélet a nyugati tudomány eredetében gyökerezett, amelyet a 20. század elején csaknem egyhangúlag elfogadott a tudományos közösség. A milétoszi iskola, amelynek az egyik legillusztrisabb képviselője Thálesz volt, bevezetett egy fogalmat az eredeti anyagra, amely szorosan kapcsolódik az anyag konzerválásának koncepciójához. Thálesz szerint egyedül a szubsztancia, mint pl. a víz alkotja az eredeti anyagot. Az összes változásnak a fizikai jelenségekben, mint pl. a növekedés vagy a csökkenés, illúzióknak kell lenniük. A 20. század elején ezt a statikus szemléletet elfogadták az összes tudomány képviselői, a klasszikus (és kvantum-) mechanika képviselői pedig jobbra csak autonóm differenciálegyenletekben gondolkodtak. Ez olyan erősen hatott a tudósokra, hogy még maga Einstein is bevezetett egy kozmológiai állandót<sup>3</sup> az általános relativitáselméletbe, hogy továbbra is statikus legyen a világegyetem modellje. (Bár ezt később élete legnagyobb hibájának nevezte.)

E tekintetben a megmaradás elve a döntő, mert definiálja az időbeni azonos-ságot. Amikor ezt a metaforát átemelték a társadalomtudományba, kiderült, hogy az egyensúlyra itt is igaz, hogy „ami elmúlt, az elmúlt”; így gyakorlatilag figyelmen kívül lehetett hagyni, hogy hogyan működik a piac „valós időben”. Csak a feltételezett végső kifejeletnek szenteltek figyelmet, ami a metaforának éppen a nem statikus voltát mutatja.

Azonban a fizikában és a kémiában is ma már közismert, hogy egy olyan elmélet, amelyben a múlt és a jövő ugyanazt a szerepet játsszák, nem alkalmas minden jelenség leírására. Például, amikor két folyadékot egy kémcsőbe öntünk, általában

<sup>2</sup>Ráadásul a közgazdasági dinamikában azért sem lehet megfordítani az időt, mert a hasznossági függvény diszkonttényezője monotonitást váltana, és a halálózási kockázat esetén a halott életre kelne.

<sup>3</sup>A téridőnek (ld. később) imannens tágulási hajlamot tulajdonít.

homogén elegy jön létre. Ebben a kísérletben az idő iránya lényeges. A dinamikus szemlélet a 20. század második harmadától kezdve terjedt el végérvényesen, csaknem valamennyi tudományterületen, ahol az idő már lényeges szerepet játszik. Ezzel az evolúciós fogalom centrális szerepet kapott a fizikai univerzum megértésében, amelyet a fizikában a termodinamika második törvényén, a híres entrópia növekedésének törvényén keresztül vezettek be.

A termodinamika második törvénye megfogalmazása óta hangsúlyozta az irreverzibilis folyamatok egyértelmű szerepét. Valószínűleg a homályos megfogalmazása volt az egyik oka annak, hogy a termodinamika alkalmazása nagyon gyorsan csak az egyensúlyra korlátozódott, a termodinamikai evolúció végső állapotára. Az 1980-as években következett be egy teljes szemléletváltozás, amikor is kezdték megérteni, hogy az irreverzibilis folyamatok konstruktív szerepet töltenek be a fizikai világban, és ezért *a nemegyensúlyi állapotok vizsgálata is jelentős az evolúció tanulmányozásában*. Ennek természetesen előfeltétele volt, hogy a dinamikai rendszer elégségesen „komplex” legyen, hiszen senki sem vár termodinamikai viselkedést például az egyszerű harmonikus oszcillátor esetében. Prigogine megmutatja, hogy a nemegyensúlyi termodinamika<sup>4</sup> vezet a disszipatív struktúrákhoz, amelyek lényegesek a nemegyensúlyi világban, az életterünkben végbemenő koherencia és szerveződés megértéséhez. Ugyanez a paradigmaváltás figyelhető meg ebben az időszakban a közgazdasági elméletben is: sorra születtek meg a nemegyensúlyi modellek, amelyek stacionárius állapotai az ismert egyensúlyokat eredményezték. *A nemegyensúlyi mikroszkópikus elméletek azonban még nem teljesen kidolgozottak, ezért a közgazdasági elméletek fizikai redukcionizmusában egyféle vákuum keletkezett, ami a felhasználható eredmények elmaradásának is tulajdonítható.*

Klasszikus értelemben a termodinamika második törvénye fejezi ki a molekuláris rendezetlenség növekedését. Amint azt Ludwig Boltzmann<sup>5</sup> megfogalmazta, és később meg is mutatjuk, *a termodinamikai egyensúly felel meg a maximális „valószínűség” állapotának*. Az evolúció alapértelmezése azonban ennek éppen az ellenkezője a biológiában és a szociológiában, inkább a komplexitás magasabb szintjeire történő transzformációkat írja le. Érzékelhetjük tehát, hogy az idő jelentése különböző a mozgásban, a dinamikában, az irreverzibilitáshoz kapcsolódásában, a termodinamikában, a történelemben, a biológiában és a szociológiában. Prigogine elsőként teszi fel a kérdést, hogy hogyan lehet összekapcsolni az idő ezen különböző fogalmait, hogy egy koherens világszemlélethez jussunk. A választ az idő

<sup>4</sup>A nemegyensúlyi termodinamikába ad bevezetést Ván (2005) egyetemi jegyzete, miközben a termodinamika különböző egyensúlyi és nemegyensúlyi elméleteit is ismerteti. Ilyenek például a nemegyensúlyi fenomenologikus kontinuum elmélet (irreverzibilis termodinamika), az egyensúlyi statisztikus homogén elmélet (statisztikus fizika), vagy az egyensúlyi fenomenologikus homogén elmélet (egyensúlyi termodinamika vagy termosztatika). Az irreverzibilitás közgazdaságtanba történő bevezetésére Martinás (2000) tanulmánya tesz kísérletet.

<sup>5</sup>Boltzmann (1844–1906) olyannyira lenyűgözte a termodinamika második törvénye, hogy virtuálisan teljes karrierjét annak megértésének és interpretálásának szentelte. Ebben látta ugyanis Darwin evolúciós elméletének fizikai magyarázatát, s legfőbb ambíciója volt, hogy az anyag evolúciójának „Darwinává” legyen, vagyis kidolgozza az *anyag evolúciójának mechanikai elméletét*.

szerepének újraértékelésében látja. Az irreverzibilis folyamatokat éppoly valóságnak tekinti, mint a reverzibiliseket, amelyek mélyen a dinamikában gyökereznek és a legvilágosabban biológiai szinten jelennek meg. Az irreverzibilitás ott kezdődik, ahol a klasszikus vagy a kvantummechanika alapvető fogalmai (mint pl. a trajektóriák vagy a hullámfüggvények) megszűnnek megfigyelhetőkné lenni. Prigogine itt egy olyan mikroszkópikus formalizációra hívja fel a figyelmet, amely a klasszikus és a kvantum-mechanika szokásos formalizációi mögé terjed, és expliciten az irreverzibilis folyamatok szerepét játssza. E formalizáció teszi lehetővé, hogy a fizikai rendszerekre tett megfigyeléseink sok aspektusát a biológiaiakéhoz kapcsoljuk. A szándék itt nem az, hogy a fizikát és a biológiát egyetlen sémára „redukáljuk”, hanem, hogy világosan definiáljuk a leírás különböző szintjeit és megadjuk azokat a feltételeket, amelyek lehetővé teszik a különböző szintek közötti közlekedést.

Míg a klasszikus fizika az euklideszi geometrián alapul, a relativitáselmélet eredményei szorosan kapcsolódnak a geometriai fogalmak kiterjesztéséhez. Az embriológusok a *mezőelméletet* használják a morfogenezis komplex jelenségeinek ábrázolására. Egy fejlődő embrió modellezése rendkívül nehéz: a sejtek száma változik, új szövetek és szervek keletkeznek, amelyek konfigurációja fontos alkotórészévé válik az állapotnak. A biológiai térben minden egyes esemény egy pillanat alatt következik be, és egy olyan régióban, ami lehetővé teszi, hogy a folyamatot teljes egészében koordináták közé helyezzük. Ez a tér funkcionális és nem geometriai. Az ökológiai állapotter gyakran a populáció olyan listája, amely a fajok adott halmazát tartalmazza. A standard geometriai tér, az euklideszi tér invariáns az eltolásokra és a forgatásokra. A biológiai és az ökológiai térben viszont az események időben és térben elhelyezett folyamatok és nem csupán trajektóriák. Egészen közel kerülünk a kozmosz arisztotelészi nézetéhez, amely szembeállította az isteni világot és az örökkévaló trajektóriákat a 'szublunaris' természetű (vagyis a valóságos) világgal, amelynek leírásában nyilvánvalóan meghatározó szerepet játszottak a biológiai megfigyelések.

Eudoxosz, Ptolemaiosz, Kopernikusz és Brahe geometriai modelljei több-kevesebb sikert jelentettek a Naprendszer dinamikájának leírásában, de ezekből hiányzott egy olyan vezérelv, ami biztosította volna a modellek szisztematikus felépítését. Kopernikusz heliocentrikus modellje óriási filozófiai jelentősége mellett sem garantált lényegesen pontosabb előrejelzéseket, mint Ptolemaiosz geocentrikus modellje.

Bár Arisztotelész biológiai nézeteinek alkalmazásai a fizikára katasztrofális következményekkel jártak, a modern bifurkációs és instabilitási elméletek azt mutatják, hogy a két fogalom, a geometriai és a szerves funkcionális világ nem inkompatibilisek. A klasszikus, gyakran Galileinek tulajdonított nézet a világot egy objektumnak tekintette, s a fizikai világot külső szemlélőként írta le. Az élő organizmusok az egyensúlytól messze lévő objektumok, amelyeket az instabilitások szeparáltak az egyensúly világtól, és amelyek szükségszerűen nagyok, makroszkópikus objektumok. Az anyag egy koherens állapotát követelik meg azért, hogy előállítsák a komplex biomolekulákat, amelyek lehetővé teszik az élet örökkévalóságát.

Prigogine próbálkozása az ún. „második idő” fogalmának bevezetésére, csak egy a sok közül. Ezek a kísérletek abból indulnak ki, hogy a mozgással kapcsolatos idő csak az első aspektus, amely konzisztensen belefoglalható a klasszikus fizika és a kvantummechanika kereteibe. A *második idő* megfogalmazása, amint később bemutatjuk a legelső kísérleteket, a fluktuációkban gyökerezik, mélyen a mikroszkopikus dinamika szintjén. Ebben a közelítésben az idő többé nem egy egyszerű paraméter, mint a klasszikus, vagy a kvantummechanikában, hanem egy *operátor*, azokhoz hasonló, amelyek leírják a mennyiségeket a kvantummechanikában. Az operátorok azért szükségesek, hogy leírassuk a mikroszkopikus szint váratlan komplexitásait. A relativitáselméletben az idő nem különül el a tértől, és nem is független tőle, hanem vele együtt a *tér-idő*nek nevezett rendszert alkotja.

A klasszikus fizika, még a kvantummechanikával és a relativitáselmélettel együtt is, a különböző rendszerek időbeli evolúcióinak viszonylag gyenge modelljeit adta. A fizika determinisztikus törvényei, amelyek egy ponton az egyedüli elfogadható törvények voltak, ma nagyon nagy egyszerűsítéseknek tűnnek, valósággal az evolúció karikatúrái. Mind a klasszikus, mind a kvantummechanikában, ha egy rendszer állapota elfogadható pontossággal ismert volt egy adott időpontban, akkor a jövő (és a múlt is) előrejelezhető volt, legalábbis elvileg. Az elméleti keret predeterminálta, hogy a jelen, bizonyos értelemben, már tartalmazza a múltat és a jövőt. Prigogine kutatásai mindezt cáfolják. Még a fizikában is, épp úgy, mint a biológiában, csak különböző lehetséges scenáriók jelezhetők előre.

Az integrálható rendszerek egyensúlyának megkeresésében jelentkező nehézségek miatt James Clerk Maxwell és Boltzmann a dinamikai rendszerek egy másik típusát kezdték el vizsgálni, nevezetesen azokat, amelyeket ma *ergodikus rendszerek*nek nevezünk. A termodinamikai egyensúly problémájának közvetlen bizonyítására bevezették az ergodikus hipotézist. Ez a következőket állítja: ha a rendszer marad a tényleges mozgásállapotában, akkor előbb vagy utóbb keresztül megy minden olyan fázison, amely kompatibilis az energia egyenlettel. Ugyanakkor a matematikusok kimutatták, hogy a trajektóriák nem töltik ki teljesen a „felületet”, de a dinamikai rendszer bármelyik trajektóriája tetszőlegesen közel kerülhet bármely állapothoz (az energiafelület mindegyik pontjához), összhangban a *kvázi-ergodikus hipotézissel*.

Ennek illusztrálására tekintsünk egy egyszerű példát, mégpedig a kétdimenziós egységnyezetben végbemenő mozgást, amit az alábbi egyenletekkel adunk meg:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha \quad \text{és} \quad \frac{dq}{dt} = 1.$$

A rendszer megoldásai az induló feltételekkel együtt:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 + \alpha t, \\ q(t) &= q_0 + t. \end{aligned}$$

Az ezekből nyerhető fázisrajtória:

$$p = p_0 + \alpha (q - q_0).$$

A trajektória főbb karakterisztikumai  $\alpha$  értékeitől függenek, amelyekre két eset különböztethető meg. Ha  $\alpha$  racionális szám, mondjuk  $\alpha = m/n$ , ahol  $m$  és  $n$  relatív prímelek (egészek), akkor a trajektória periodikus lesz, és  $T = n$  periódus után ismételni fogja önmagát. A rendszer ebben az esetben nem ergodikus. Ha viszont  $\alpha$  irracionális, akkor a trajektória kielégíti a kvázi-ergodikus hipotézis feltevését. Az egységnegyzet minden egyes pontjához tetszőlegesen közel fog kerülni, de nem tölti ki teljesen a négyzet felületét.

Az a gondolat, hogy a dinamikai rendszerek csak általában ergodikusak, először Kolmogorov (1954) tanulmányában jelent meg. Kimutatta, hogy interaktív dinamikai rendszerek nagy osztályaira lehet szerkeszteni olyan periodikus pályákat, amelyek az ergodikus felület egy alterére (invariáns tóruszokra) korlátozottak. Más vizsgálatok is ismertek, amelyek gyengítették az ergodikus rendszerek univerzalitásába vetett hitet. Például Enrico Fermi, John Pasta és Stanislaw Ulam nemharmonikus oszcillátorok összekapcsolt láncainak viselkedését vizsgálták. Azt várták, hogy a rendszerük gyorsan elér egy termális egyensúlyt. Ehelyett periodikus oszcillációkat kaptak, mégpedig különböző normál móduszú energiában. Kolmogorov elméletét kiterjesztette Arnold és Moser, és ez vezetett az ún. *KAM-elmélet*hez. Ennek az új elméletnek talán az a legérdekesebb aspektusa, hogy *függetlenül az ergodicitástól, a dinamikai rendszerek véletlenszerű mozgásra vezethetnek*<sup>6</sup>.

A gravitációt a tudomány mai állása szerint nem vonzó erőként, hanem térgörbületeként fogjuk fel. A tér és idő külön nem létezik, egységes egészet alkotnak. Ezen belül minden pontszerű testnek értelmezhető a sajátideje. Egy megfigyelő („rendszer”) nem más, mint pontszerű testek összessége, minden pontnak létezik sajátideje, de ezek a sajátidők általában egymástól függetlenek, nem állnak össze egységes rendszeridővé. Rendszeridőt csak szinkronizációval tudunk létrehozni, de a szinkronizáció és a sajátidők általában egymástól függetlenek.

Jelen világunkat különböző szinteken vizsgálva, más és más törvényszerűségeit ismerhetjük meg. A mikrovilág szintjén a kvantumfizika törvényei a mérvadók, a makrovilág szintjén pedig a kémia és a biológia törvényei, míg az Univerzum szintjén az Einstein-féle relativitáselmélet az elfogadott. A mai (nyugati) fizikai (közgazdasági) szemlélet alapvető hibája, hogy azt hiszi, hogy a mikroból megérthető a makro. Azt tanítják, hogy a fenti szintek csak a leírásukat tekintve különbözőek, valójában az egész Univerzumunk a mikrovilág elemeiből épül fel. Minél többet tudunk a mikroszkopikus világról, annál többet tudunk az Univerzumról. Hasonló szemlélet uralkodik a közgazdaságtanban is: a makrofolyamatok alakulását a mikroökonómiából kiindulva magyarázzák. Ami a két terület formalizmusát illeti, érdemes itt idéznünk Kornai (1971, 226 o.) könyvéből: „A klasszikus mechanika matematikai apparátusa a makrofizikára alkalmazható, viszont a mikrofizika kvantumos szemléletű. Analóg a helyzet a gazdasági valóságban: a makroökonómia nagy, aggregált folyamatai jól leírhatók folytonos változókkal, míg a mikroökonómia számos jelensége kvantumos.” A makro ún. mikro értelmezései erősen vitathatók,

<sup>6</sup>A dinamikai rendszerek egy átfogó modern matematikai vizsgálata található Hirsch (1989) kitűnő tanulmányában.

mivel a részecskék együttes viselkedése nem következtethető önnön tulajdonságai-  
ból. Ugyanúgy, mint az egyes emberek fogyasztói magatartási tulajdonságaiból sem  
aggregálhatók hasonló társadalmi viselkedések, ami elméleti bizonyítást is nyert a  
híres DSM-tételekben<sup>7</sup>.

## 2. Idő a fizikában

Az idő az ősrobbanás, a világegyetem keletkezésének pillanatában kezdődött,  
s bármennyire is furcsán hangzik, az ennél korábbi időpontok teljesen határozatlan-  
nok. S minthogy *Albert Einstein* általános relativitáselmélete értelmében a világ-  
egyetemnek is vége lesz egyszer, ezért az idő, a negyedik dimenzió véges kiterjedésű.  
*Stephen W. Hawking* és *Robert Penrose* azonban bebizonyították, hogy az általá-  
nos relativitáselmélet a kvantummechanika határozatlansági tételével (ld. később)  
együtt biztosítja, hogy az idő a végessége mellett mégis határtalan legyen, csak  
úgy, mint a tér<sup>8</sup>. Az ún. *szingularitási tételükkel* bebizonyították azt is, hogy az  
idő kezdete egyetlen, végtelen sűrűségű és a téridőben végtelen görbületű pont volt.  
Mielőtt rátérnénk ennek mélyebb következményeire, érdemes röviden kronológiailag  
is áttekinteni az idő fogalmának különböző értelmezéseit a természettudományok-  
ban.

Arisztotelész számára a fizika a folyamatok, a természetben különböző időpon-  
tokban megfigyelhető változások tudománya volt. A modern fizika megalapozói,  
köztük Galileo Galilei számára is, az egyetlen változás, ami pontos matematikai  
képletekben is kifejezhető, a gyorsulás, a mozgásban bekövetkező változás volt.  
Az időt egy tisztán fizikai jelenség absztrakt paraméterének tekintette, ami le-  
hetővé tette a mozgás kvantifikációját. Newtonnál mindez, mint „abszolút” idő  
jelenik meg. Azt tanította, hogy két esemény közötti időtartam egyértelműen mér-  
hető, teljesen függetlenül a tértől. Ez vezetett el végül is a klasszikus mechanika  
fundamentális egyenletéhez, amely a gyorsulást a tömeggel arányosan az erőhöz  
kapcsolja. A fizikai időt a mozgási egyenletekben megjelenő idővel azonosították.

<sup>7</sup>Elsőként Hugo F. Sonnenschein fejtette ki aggályait két cikkében is (*Sonnenschein* (1972, 1973)), az előbbt követte *Debreu* (1972), majd pedig Rolf R. Mantel cikke (*Mantel* (1974)). Mindegyikük abból indult ki, hogy a piaci keresleti és túlkeresleti függvényeket a fogyasztók hasz-  
nosságmaximalizáló tevékenységeinek összegzésével definiálják. A három szerző azt állítja, hogy a  
piaci keresleti és túlkeresleti függvények, amelyeken a piacszintű mikroökonómia és makroszintű  
makroökonómia összes „intuitív” állítása nyugszik, nem rendelkeznek azokkal a tulajdonságokkal,  
mint amilyenekkel a fogyasztói keresleti és túlkeresleti függvények. Egyszerűbben fogalmazva: pél-  
dául, mégha mindenkinek szabályos alakú egyéni keresleti függvénye is van, nem mondhatjuk azt,  
hogy a piaci keresleti függvény is biztosan szabályos alakú lesz. Csak nagyon speciális esetben vár-  
ható, hogy a gazdaság úgy viselkedik, mint egy idealizált fogyasztó. Ez valójában romba döntötte  
a közgazdasági elmélet „mikromegalapozási” megközelítését - azt, hogy az aggregált keresletet  
és kínálatot a hasznosságmaximalizáló piaci szereplők viselkedéseként írják le. Így lényegében  
hiábavalóknak bizonyultak azok az elmúlt századi erőfeszítések, hogy az aggregált keresletet a  
hasznosságmaximalás eredményeként szerepeltessék. (Az Olvasó egy kitűnő áttekintést kaphat  
ezekről a munkákról *Shafer és Sonnenschein* (1982) tanulmányából.)

<sup>8</sup>Valójában az idő és az energia határozatlansága nem következik a kvantummechanika ma  
ismert megfogalmazásából (noha a kísérleti eredmények mégis utalnak ilyesmire).

A Lagrange-függvény, illetve a Hamilton-egyenletekből nyert dinamika valójában nem tesz különbséget a jövő és a múlt között. A differenciálegyenletekből nyert trajektóriák gyűjteményével értelmezték a fizikai világot, a természet minden olyan elemi megnyilvánulását, amelyben szerepet játszik az idő.

Itt érdemes megjegyezni, hogy a differenciálegyenletek ilyen irányú vizsgálata termékenyítőleg hatott az absztrakt matematika minden területén: Fourier a hővezetés tanulmányozásakor alkotta meg sorait, Cantort pedig éppen a Fourier-sorok konvergencia problémái vezették el a topológiához és a halmazelmélethez, Lie felfedezte a róla elnevezett csoportokat, és Poincaré kifejlesztette az algebrai topológiát.

Az elméleti fizika ideálja egy olyan stabil világ volt egészen mostanáig, amely elkerüli a valamivé válás folyamatát. Isaac Newton dinamikája, amelyet olyan nagy követői, mint például Pierre Laplace, Joseph Lagrange és Sir William Hamilton tettek teljessé, egy zárt univerzális rendszert fogalmaztak meg, amellyel minden kérdés megválaszolását lehetségesnek tartották. Ha egy kérdésre mégsem tudtak válaszolni, azt definíciószerűen pseudo problémának tekintették, csak illúzióként kezelték, amelynek nincs semmiféle fundamentális jelentősége. Hosszú ideig úgy tűnt, hogy a dinamika lehetővé teszi a realitások teljes megismerését.

Így lett a fizika fő célkitűzése a mikroszkopikus szint olyan azonosítása, ami lehetővé teszi a dinamika alkalmazását, s amely alapot ad az összes lehetséges megfigyelhető jelenség magyarázatához. Itt találkozott a klasszikus fizika a görög atomisták programjával, amint azt Démokritosz állította: „Csak az atomok és az űr!”

Ma már tudjuk, hogy a newtoni dinamika a fizikai tapasztalásunknak csak egy részét írja le, az objektumok tömegét pedig grammokban, sebességét pedig a fényénél kisebb sebességben méri. Az is közismert, hogy a klasszikus dinamika érvényességét korlátozzák az univerzum konstansai, mint pl. a  $h$  Planck konstans, amelynek értéke az  $SI$  rendszerben  $6.6260755 \times 10^{-34} Js$  nagyságrendű és a  $c$ , a fény sebessége  $\sim 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec. Az olyan új jelenségek, mint pl. a kis objektumok, vagy a hipersűrűségű neutron csillagok, vagy a fekete lyukak tanulmányozásához a newtoni dinamikát felváltották a kvantummechanikával (amely véges értékű  $h$ -t vesz figyelembe) és a relativitáselmélettel (amely már tartalmazza a  $c$ -t is). A relativitáselméletben nagy sebességek esetén a tér és az idő összefonódik, míg a kvantummechanikában a megfigyelés befolyásolja a tárgy állapotát. Azonban a dinamikának ezen új formái is örökölték a newtoni fizika ideálját, a statikus univerzumot, a létezés univerzumát a valamivé válás nélkül. Az abszolút idő azonban megszűnik, minden megfigyelő számára más mérték szerint múlik az idő. A csillag gravitációs tere hatására a felszínen tartózkodó személy számára másként telik az idő, mint az űrbeli megfigyelő számára.

A fenti értelmezésekben azt láttuk, hogy a dinamika olyan folyamatokat ír le, amelyekben az idő iránya irreleváns. Vannak azonban olyan helyzetek is, amikor az idő iránya valóban lényeges szerepet játszik. A legújabb kutatások szerint (ld. például Hawking (1998)) az időnek legalább háromféle irányítottsága van. Az első, ami tanulmányaink szempontjából most a legfontosabb, a termodinamikai irány, ami mentén a rendezetlenség vagy az entrópia nő. A második a pszichológiai irány,



ami arrafelé mutat, amerre érzékeink szerint halad az idő. Ebben az irányban a múltra emlékezünk és nem a jövőre. Hawking (1998) megmutatta, hogy e két időirány egyfelé mutat. A harmadik a kozmológiai irány, amiben a világegyetem tágul és nem zsugorodik. Vizsgáljuk meg most alaposabban az első irányt!

Ha a makroszkópikus tér egy részét melegítjük és ezután termálisan izoláljuk a tér-részt, megfigyelhetjük, hogy a hőmérséklet bizonyos idő eltelte után egyforma lesz az egész térben (*Laplace-démon*). E folyamatban az idő nyilvánvaló „egyirányúságot” mutat. A termodinamika második törvénye összegzi e folyamat jellemző tulajdonságait. Rudolf Clausius olyan izolált rendszereket vizsgált, amelyek sem anyagot, sem energiát nem cserélnek a külvilággal. Ekkor a második törvény implicálja az  $S$  függvényt, az entrópia létezését, amely mindaddig monoton nő, amíg el nem éri a maximális értékét a termodinamikai egyensúly állapotában:

$$dS/dt \geq 0.$$

Az entrópia változását, a  $dS$ -t a  $d_e S$ , az entrópiának a rendszer határain keresztüli transzfere, és a  $d_i S$ , a rendszeren belül termelt entrópia határozza meg, azaz

$$dS = d_e S + d_i S, \quad \text{ahol} \quad d_i S \geq 0.$$

E megfogalmazásban a reverzibilis és az irreverzibilis folyamatok közötti distinkció lényeges. Ugyanis csak az irreverzibilis folyamatok járulnak hozzá az entrópia termeléséhez. Ilyen irreverzibilis folyamatok, például a kémiai reakciók, a hővezetés és a diffúzió. A reverzibilis folyamatok a korlátba ütköző hullámterjedés, amelyen a hullám elnyelése kizárt. A termodinamika második törvénye ekkor azt állítja, hogy az irreverzibilis folyamatok az idő egyirányúságához vezetnek. Az entrópia, másképpen a rendezetlenség növekedése különbözteti meg a jövőtől a múltat, vagyis irányt ad az időnek.

A pozitív időirány tehát az entrópia növekedésével társul. Ez feltételezi egy egészen specifikus tulajdonságokkal rendelkező függvény létezését, amely izolált rendszerben az idő monoton növekvő függvénye. Ahhoz, hogy ezt részletesebben is tárgyalhassuk, tekintsünk egy olyan rendszert, amelynek evolúcióját bizonyos  $X_i$  változók írják le, amelyek, például a kémiai elemek koncentrációját mutatják. A rendszer evolúcióját a

$$dX_i/dt = F_i(\{X_i\})$$

alakú rátaegyenletek írják le, amelyekben  $F_i$  az  $X_i$  komponens átlagos változási sebessége. Természetesen mindegyik komponensre van ilyen egyenletünk. Tegyük fel, hogy az  $X_i = 0$ -ra valamennyi reakciósebesség zérus lesz. Ekkor ez a rendszer egyensúlyi pontja. Kérdés, hogy amennyiben a koncentrációk nem zérus értékeiből indulunk ki, a rendszer eljut-e az  $X_i = 0$  egyensúlyi állapotba? Vajon tekinthető-e az  $X_i = 0$  állapot attraktornak? A kérdés megválaszolásában a Ljapunov-függvény segít. Vegyük a koncentrációk egy bizonyos

$$V = V(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

függvényét, és tegyük fel, hogy értéke pozitív a kérdéses értelmezési tartományban és  $X_i = 0$ -ban zérus. Ekkor megvizsgálhatjuk, hogy hogyan változik a  $V(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , amint az  $X_i$  koncentrációk fejlődnek. Ehhez a függvény idő szerinti deriváltját kell vennünk, vagyis

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt}.$$

Ljapunov (1908) tétele azt állítja, hogy az egyensúlyi állapot attraktor, ha a  $dV/dt$  előjele  $V$  előjelének az ellentettje; azaz a mi esetünkben most negatív. Ennek a feltevésnek a geometriai jelentése evidens. Izolált rendszerekre a *termodinamika második törvénye* azt állítja, hogy a Ljapunov-függvény létezik, és hogy az ilyen rendszerekre a *termodinamikai egyensúly a nemegyensúlyi állapotok attraktora*. Ezért hangsúlyozta Max Planck (1930), hogy a termodinamika második törvénye megkülönbözteti a természeti állapotok egyes típusait a többiekétől, ha azok attraktorként viselkednek a többiek számára. *Az irreverzibilitás ennek a vonzásnak a kifejeződése.*

Az irreverzibilis folyamatok molekuláris leírásában az alapvető kérdés az, hogy mit jelent az entrópia növekedése molekulákban kifejezve? A válaszhoz meg kell adnunk az entrópia mikroszkópikus jelentését. Boltzman jegyezte meg elsőként, hogy az *entrópia a molekuláris rendezetlenség mértéke*, és arra a következtetésre jutott, hogy az entrópia-növekedés törvénye egyszerűen a növekvő rendezetlenség törvénye. Tekintsünk például egy konténert, amelyet két egyforma rekeszre osztunk. Azon esetek  $P$  száma, amelyek  $N$  számú molekulának a két rekeszbe történő rendezését mutatja, egy egyszerű kombinatorikus formulával megadható:

$$P = \binom{N}{N_1} = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} = \frac{N!}{N_1!N_2!}.$$

Egy bizonyos idő elteltével elérjük az egyensúlyi állapotot, amelyben közel egyenlő számú molekula van mindkét rekeszben, azaz  $N_1 \simeq N_2 = N/2$ . Könnyen belátható, hogy ebben az állapotban veszi fel  $P$  a maximális értékét, és ebben az evolúciós folyamatban  $P$  nő. Boltzman az entrópiát a  $P$  segítségével következőképpen fejezte ki:

$$S = k \log P,$$

amelyben  $k$  Boltzman univerzális konstansa ( $1,3806568 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$ ). Az entrópia növekedése a növekvő molekuláris rendezetlenséget fejezi ki, vagyis  $P$  növekszik. Ebben az evolúciós folyamatban az induló állapot elfelejthető, a mindenkori aszimmetria, vagyis, hogy az egyik rekeszben több a molekulák száma, idővel mindig megszűnik. Ha  $P$  egy állapot „valószínűségét” méri, akkor az entrópia növekedése megfelel a „legvalószínűbb” állapot felé történő evolúciónak. *A valószínűség fogalma az irreverzibilitás molekuláris értelmezésén keresztül lépett be az elméleti fizikába, ami döntő lépés volt a modern fizika történetében.*

A valószínűségi érvelésben még tovább kell lépnünk, ha olyan kvantitatív megfogalmazásokat akarunk nyerni, amelyek leírják, hogy az irreverzibilis folyamatok

hogyan fejlődnek idővel. Tekintsük például a jól ismert bolyongási problémát, a *Brown-mozgás* idealizált, de mégis sikeres modelljét. A legegyszerűbb példában, az egydimenziós bolyongásban, a molekula egy lépést tesz valamelyik irányban a számegegyenes szabályos intervallumaiba. Ha a molekula kezdetben az origóban volt, kérdezhetjük, hogy mi a valószínűsége annak, hogy  $N$  lépés után az  $m$  pontban lesz. Ha annak valószínűségére, hogy a molekula előre, vagy hátra halad-e, feltesszük, hogy  $1/2$ , akkor

$$W(m, N) = \binom{1}{2} \frac{N!}{[(1/2)(N+m)]! [(1/2)(N-m)]!}. \quad (1)$$

Így a molekulának, hogy az  $m$  pontba érkezen  $N$  lépés után,  $(1/2)(N+m)$  lépést kell tennie jobbra és  $(1/2)(N-m)$ -et balra. Az (1) egyenlet az ilyen különböző sorozatok számát adja megszorozva az  $N$  lépés egy tetszőleges sorozatának teljes valószínűségével. (A részletekért lásd Chandrasekhar (1943).)

Kifejtve a faktoriálisokat, egy Gauss-eloszlásnak megfelelő aszimptotikus formulát kapunk:

$$W(m, N) = \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/2} e^{-m^2/2N}.$$

Felhasználva a  $D = (1/2)nl^2$  jelölést, amelyben az  $l$  a két hely közötti távolság és  $n$  az egységnyi idő alatti elmozdulások száma, a fenti egyenletet a következőképpen is írhatjuk:

$$W(x, t) = \left(\frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}}\right) e^{-x^2/4Dt}, \quad (2)$$

amelyben  $x = ml$ .

A (2) egyenlettel definiált Brown-mozgást az egységnyi idő alatt jól definiált átmeneti valószínűségekkel is megfogalmazhatjuk. Tekintsük ismét annak a valószínűségét, hogy a Brown-részecske a  $t$  időpontban a  $k$  helyen van, és jelöljük ezt  $W(k, t)$ -vel. Vezessük be az  $\omega_{lk}$  átmeneti valószínűséget, amely egységnyi idő alatt a két állapot, a  $k$  és  $l$  közötti átmenet valószínűségét jelöli. Ekkor kifejezhetjük a  $W(k, t)$  idő szerinti változását olyan versengésben kifejezve, amely az  $l \rightarrow k$ -hoz kapcsolódó nyertesek és a  $k \rightarrow l$ -hez kapcsolódó vesztesek között folyik. Ekkor felírhatjuk az alapegyenletet:

$$\frac{dW(k, t)}{dt} = \sum_{l \neq k} [\omega_{lk}W(l, t) - \omega_{kl}W(k, t)].$$

A Brown-mozgásban  $k$  a rácson levő helyzetnek felel meg, és az  $\omega_{kl}$  csak akkor különbözik zérustól, ha  $k$  egy egységgel különbözik az  $l$ -től. De a fenti egyenlet ennél is sokkal általánosabb. Valójában alapegyenlete a *Markov-folyamatoknak*, amely vezető szerepet játszik a modern valószínűségelméletben. (Lásd Barucha-Reid (1960).)

A *Markov-folyamat* egyik lényeges tulajdonsága, hogy az  $\omega_{lk}$  átmeneti valószínűségek csak a  $k$  és az  $l$  állapotokat foglalják magukba. Az átmeneti valószínűség  $k \rightarrow l$ -be nem függ attól, hogy mely állapotok voltak „bejárva” a  $k$  állapot bekövetkezése előtt. *Ebben az értelemben a rendszernek nincs memóriája.* (Ezért kérdéses, hogy mennyire alkalmas előrejelzések felhasználására.) A Markov-folyamatokat sok fizikai állapot leírására használták fel és felhasználhatók a kémiai reakciók modellezésére is.

Amíg a klasszikus és a kvantumdinamikában a fizika alapvető törvényei időben szimmetrikusak, addig a termodinamikai irreverzibilitás nem az, lényegében a dinamika-hoz hozzáadott egyféle közelítésnek felel meg. Egy gyakran idézett példa Josiah Willard Gibbs (1902) nevéhez fűződik: ha egy csepp fekete tintát pottyantunk egy pohár vízbe és megkeverjük, akkor az elegy szürke színű lesz. Ez a folyamat irreverzibilisnek látszik. De ha követni tudnánk minden egyes molekulát, felismernénk, hogy a mikroszkópikus birodalomban a rendszer heterogén maradt. Az irreverzibilitás csak egy illúzió lenne, amelyet a megfigyelő érzékszerveinek tökéletlensége váltott ki. Igaz, hogy a rendszer heterogén maradt, de a kezdeti makroszkópikus heterogenitási skála mikroszkópikussá lett. Az a nézet, hogy ebben az értelemben az irreverzibilitás csak egy illúzió, nagyon hatásosnak bizonyult, és sok tudós megpróbálta hozzákötni ezt olyan matematikai eljárásokhoz, amelyek irreverzibilis folyamatokhoz vezetnek. Mások, hasonló céllal, a makroszkópikus megfigyelés feltételeit próbálták meg kidolgozni. Ezen kísérletek egyike sem vezetett azonban meggyőző eredményre.

Ugyanakkor nehéz elhinni, hogy bizonyos megfigyelhető irreverzibilis folyamatok, olyanok, mint a viszkozitás, az instabil részecskék számának csökkenése stb. egyszerűen csak illúziók lennének, amelyeket a tudás hiánya, vagy a tökéletlen megfigyelés váltott ki. Mivel az induló állapotot, még a legegyszerűbb dinamikai mozgásban is, csak közelítőleg tudjuk megadni, a mozgás jövőbeli állapotait az idő előre haladtával egyre nehezebb lesz előrejelezni. Az ilyen rendszerekre nem alkalmazhatjuk a termodinamika második törvényét. Alkalmazhatjuk a sok interaktív részecske által formált gázra, de nem alkalmazhatjuk olyan egyszerű dinamikai rendszerekre, mint például a bolygórendszer. Mindebből Prigogine arra a következtetésre jutott, hogy az *irreverzibilitásnak valamilyen kapcsolatban kell lennie a kérdéses rendszer dinamikus természetével.*

Vizsgálták természetesen annak lehetőségét is, hogy talán a dinamika tökéletlen, talán azt kellene kiterjeszteni az irreverzibilis folyamatok belefoglalásával. Azonban ez az út sem volt járható, mivel a dinamikus rendszerek egyszerű típusaira mind a klasszikus, mind a kvantum mechanikában az előrejelzések jól beigazolódtak. Elegendő csak megemlíteni az úrkutatás sikereit, ami a dinamikus trajektóriák nagyon pontos számításait követelte meg. Ennek ellenére mostanában ismételten felteszik a kérdést, hogy a kvantum mechanika teljes-e az ún. mérési problémával összefüggésben? Nem kellene-e a mérés irreverzibilitásának belefoglalásához új tagot hozzáadni a kvantumrendszerek dinamikáját leíró *Schrödinger-egyenlethez*? Prigogine kutatásai pontosan ezeket a „statikus” dinamika és az irreverzibilitást hangsúlyozó termodinamika közötti kapcsolódásokat tárják fel.

A kvantumelmélet események összegzésén alapuló megfogalmazásában a részecskének nincs egyetlen múltja, minden megengedett pályát befut a téridőben, amelynek mérete véges, de hipotetikusán nincs határa vagy pereme. Minden ilyen pályát *Hawking* két számmal jellemez: az egyik a nagyságára jellemző, a másik a fázisára (a cikluson belüli helyzetére). Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora valószínűséggel halad át a részecske egy bizonyos ponton, akkor összegeznünk kell mindazon hullámokat, amelyek a pontot érintő pályákhoz tartoznak. Ilyenkor a képzetes idő használatához kell folyamodnunk, vagyis az időt nem valós, hanem képzetes számokkal kell mérnünk. Ennek érdekes hatása van a téridőre: megszűnik a tér és az idő közötti különbség. Az olyan téridőt, ahol az események időkoordinátájának képzetes értéke van, *euklideszi téridő*nek nevezzük. Ebben nincs különbség az idő iránya és a térirányok között. A *valós téridő*ben viszont, ahol az eseményeket a valós időkoordináta jellemez, szembeszökő a különbség: az idő iránya minden pontban a fénykúpon belül van, a térbeli irányok pedig azon kívül.

### 3. A klasszikus mechanika dinamikája

A klasszikus mechanika a mai elméleti fizika legrégibb múltra visszatekintő ága, a 20. század tudományos forradalmainak kiinduló pontja, ami végül is a relativitáselmélethez és a kvantummechanikához vezetett. A klasszikus mechanika jórészt abból áll, hogy Newton törvényeiből, például az energiamegmaradáséból, olyan differenciálegyenleteket vezetünk le, amelyek sok, véges számú szabadságfokkal rendelkező fizikai rendszerek „mozgástörvényeit” írják le. Franciául a „*rationális*” mechanika kifejezést használják gyakrabban, ezzel is hangsúlyozva, hogy a klasszikus mechanika törvényei éppen a józan ész törvényei. A klasszikus dinamikához rendelt karakterisztikumok közt találjuk a szigorú determinizmus törvényét. A dinamikában alapvető különbséget tesznek a kezdeti feltételek, amelyek tetszőlegesen adhatók meg, és a mozgási egyenletek közt, amelyekből kiszámítható a dinamikus rendszer későbbi (vagy korábbi) állapota. A modern dinamika Johannes Keplernek a bolygók mozgási törvényeivel és Newton „két-test” problémájával született meg. Azonban a dinamika rendkívül bonyolulttá válik mihelyest figyelembe veszünk egy harmadik testet is, például még egy másik bolygót is. Ha a rendszer elégségesen komplex (mint a „három test” problémában), még a rendszer kezdeti állapotának (bármilyen véges pontosságú) ismerete sem teszi lehetővé általában a rendszer viselkedésének előrejelzését hosszabb távra.<sup>9</sup> Ez a bizonytalanság fennáll még akkor is, amikor a pontosság a kezdeti állapot meghatározásában tetszőlegesen nagyra válik. Lehetetlen, még csak elvben is, például azt tudni, hogy

---

<sup>9</sup>Itt külön kell választani az elvet és a gyakorlatot. A mechanikai mozgásokat (pl. az égitestekét) olyan differenciálegyenlet írja le, amelynek adott kezdeti feltételek mellett egyértelmű megoldása létezik. Csakhogy elég bonyolult differenciálegyenlet esetén (pl. a háromtest problémában) a megoldást nem tudjuk analitikus formában előállítani.

a Naprendszer, amelyben élünk, stabil-e örök időkre?<sup>10</sup> Ezek a megállapítások jelentősen korlátozzák a trajektóriák, vagy a „világvonalak” fogalmának hasznosságát. Ekkor a méréseinkkel kompatibilis világvonalak együttesét kell vizsgálnunk. De mihelyst elhagyunk egy trajektóriát a vizsgálatból, elhagyjuk a szigorú determinizmus modelljét is. Csak statisztikai előrejelzéseket tudunk tenni, vagyis *előrejelzéseink átlagok lesznek.*

Ennek ellenére a klasszikus ortodoxia propagálói éveken keresztül próbálták megszabadítani a kvantummechanikát a statisztikai aspektusától. Albert Einstein sokat idézett mondása: „Az Isten nem játszik kockajátékot.” Most viszont azt látjuk, hogy amikor hosszú periódusokat vizsgálunk, maga a klasszikus dinamika igényli a statisztikai módszereket. Ennél is fontosabb azonban, hogy a klasszikus mechanika, amely talán a legkidolgozottabb az összes elméleti tudomány közt, ugyan zárt tudománynak tekinthető, de nagyon nem mindenható, azaz a valóságnak csak kis részét, s azt is csak bizonyos mértékig modellezi jól.

A klasszikus mechanikában a pontrészekéből álló rendszer állapotát a  $q_1, q_2, \dots, q_s$  koordinátákkal és a  $p_1, p_2, \dots, p_s$  momentumokkal írjuk le. A rendszer energiáját ezekkel a változókkal kifejezve, a következő összefüggést kapjuk:

$$H = E_{kin}(p_1, p_2, \dots, p_s) + V_{pot}(q_1, q_2, \dots, q_s),$$

amelyben a jobb oldalon az első tag csak a momentumoktól (impulzusoktól) függ és a kinetikai energiát mutatja, a második pedig a koordináták függvénye és a potenciális energiát jelöli. Az energia ezekben a változóban kifejezve egy Hamilton-függvénnyel definiált, amely központi szerepet játszik a klasszikus dinamikában. Ezekben a vizsgálatokban most csak konzervatív autonóm rendszereket tekintünk, vagyis olyanokat, amelyekben  $H$  explicite nem függ az időtől. A rendszer mozgását a Hamilton-egyenletekből kapjuk, ami a klasszikus dinamika törvényei szerint a következőképpen fejezhető ki:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{és} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Képzeljünk el most egy olyan  $2s$ -dimenziós teret, amelynek pontjait a  $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$  koordináták határozzák meg. Ezt a teret nevezzük *fázistérnek*. Mindegyik mechanikai állapothoz ennek a térnek egy  $P_t$  pontját rendeljük hozzá. Az induló  $P$  pont helyzete a  $t_0$  időpontban, együtt a Hamilton-függvénnyel, tökéletesen meghatározza a rendszer mozgását, a rendszer időbeli evolúcióját (csak esetleg nem tudjuk azt kiszámolni).

Ha vesszük a  $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$  koordináták egy tetszőleges  $f$  függ-

<sup>10</sup>Külön kell választani a valóságot és a modellt. A szokásos modellünkben a Naprendszer örök időre stabil. A valóságban ki tudja?

vényét, felhasználva a Hamilton-egyenleteket, megkapjuk az időbeli változását:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dH}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dH}{dt} \right] \equiv [f, H] \end{aligned}$$

amelyben  $[f, H]$  az  $f$ -nek  $H$ -val való Poisson-zárójele. Ezért a feltétel az  $f$  invarianciájára  $[f, H] = 0$ . Világos, hogy

$$[H, H] = \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dH}{dt} \right] = 0.$$

Ez a kifejezés egyszerűen az energiamegmaradást fejezi ki.

A klasszikus dinamika és a termodinamika összekapcsolásában követjük Gibbst és Einsteint, és bevezetjük a reprezentatív együttes fogalmát. Az alapötlet az, hogy egyetlen egy dinamikai rendszer helyett olyan rendszerek kollekciónak vizsgáljuk, amelyek mindegyike ugyanazon Hamilton-függvénynek feleltethető meg. Ennek a kollekciónak vagy együttesnek kiválasztása függ a rendszerekre tett feltevésektől és a kezdeti feltételektől. Amennyiben a kezdeti feltételek jól definiáltak, akkor az együttes biztosan a fázistér bizonyos régiójába koncentrálódik, míg ha kevésbé jól definiált, az együttes egy széles régió felett fog eloszlani a fázistérben. A rendszerek Gibbs-féle együttese egy pontfelhővel reprezentálható a fázistérben. Határértékben, amelyben mindegyik régió nagyszámú pontot tartalmaz, a felhő egy folytonos folyamattal írható le a fázistérben, amelynek sűrűségét jelölje a

$$\rho(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t)$$

sűrűségfüggvény. Mivel a pontok száma az együttesben tetszőleges, ezért  $\rho$ -t normalizáljuk, azaz

$$\int \dots \int \rho(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) dq_1, \dots, dp_s = 1.$$

Ezért a  $\rho dq_1, \dots, dp_s$  egy reprezentatív pont megtalálásának valószínűségét mutatja a fázistér  $dq_1, \dots, dp_s$  tömegű elemében.

A sűrűség változása a fázistér mindegyik tömegelemében megfelel a határain átmenő folyamat differenciájának. Említésre méltó tulajdonság, hogy a folyam a fázistérben „összenyomhatatlan”. Más szavakkal, a folyam divergenciája eltűnik. Valóban, a Hamilton-egyenletek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{dp_i}{dt} \right) \right] = 0. \quad (3)$$

Az eredmény: a tömeg a fázistérben megőrződik időben. Felhasználva a fenti (3) egyenletet, egy egyszerű mozgási egyenletet kapunk a  $\rho$  sűrűségű fázistérre. Ez a jól ismert *Liouville-egyenlet*, amely a következő alakban írható

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right] = [H, \rho], \quad (4)$$

s amelyben a  $[\cdot, \cdot]$  zárójel most a  $H$ -nak  $\rho$ -val való Poisson-zárójele. Mivel gyakran kényelmesebb operátor megfogalmazást használni, egyszerűen megszorozva a (4) egyenletet  $i = \sqrt{-1}$ -vel, írhatjuk

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = L \rho,$$

amelyben  $L$  most egy lineáris operátort jelöl:

$$L = -i \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} + i \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}.$$

A klasszikus dinamikában az  $L$  a fázistérre, míg a kvantummechanikában a koordináta- vagy a momentum-térre vonatkozik. Az is jól látható, hogy a rendszer időbeli evolúcióját az  $L$  *Liouville-operátor* írja le az együttes közelítésben.

Az együttes-elmélet fontossága nyilvánvaló. Még ha nem is ismerjük a pontos kezdeti feltételeket, de vizsgálhatjuk a Gibbs-i sűrűséget és kiszámíthatjuk a tetszőleges mechanikai tulajdonság átlagos értékét, az  $\langle A \rangle$ -t, úgy, hogy

$$\langle A \rangle = \int \int A(p, q) \rho dq dp,$$

amelyben felhasználtuk az együttes átlagot,  $A(p, q)$ -t.

Megjegyezzük, hogy a Liouville-egyenlet formális megoldása könnyen előállítható a következő alakban:

$$\rho(t) = e^{iLt} \rho(0).$$

Állításunk könnyen igazolható a kifejezés közvetlen differenciálásával. További megjegyzést érdemel itt még, hogy a Gibbs-i együttesközelítés a valószínűség fogalmát a  $\rho$  sűrűségfüggvényen keresztül vezette be a fázistérbe. Ez lehetővé teszi mind a tiszta esetek tanulmányozását, amelyekre az induló feltételeket előírjuk, mind a kevert esetekét, amelyek különféle lehetséges kezdeti feltételeknek felelnek meg. Mindenesetre a sűrűségfüggvény időbeli evolúciója szigorúan determinisztikus. Nincs olyan egyszerű kapcsolata a valószínűségi folyamatokkal, mint a Brown-mozgás esetében van, és olyan fogalmak, mint átmeneti valószínűségek sem jelennek meg benne. Egy meglepő különbség az idő szerepében van: a Liouville-egyenlet formális megoldása érvényes az összes pozitív és negatív  $t$  értékekre.



Az operátorok fontos jellemzője a spektrumuk, amelyek egyszerűbb esetekben a sajátértékeiknek felelnek meg. Egy  $A$  operátornak a  $\lambda$  szám sajátértéke, ha

$$Au = \lambda u$$

teljesül az operátor értelmezési tartományában levő valamely nem nulla  $u$  esetén.

Az operátorok spektrumának szemléltetésére tekintsük a másodrendű differenciáloperátort valós függvényeken értelmezve; formálisan:

$$A = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Ez a formula azonban önmagában nem ad egyértelmű meghatározást, ahhoz még meg kell adni azt a függvényosztályt, amelyen értelmezzük. A függvényosztályt a határfeltételekkel választjuk ki. Legyen például a határfeltétel az, hogy a függvények az  $x = 0$  és  $x = L$  helyeken nulla értéket vegyenek fel. Ekkor a sajátértékegyenlet megoldásai

$$\lambda = -k^2$$

és

$$u(x) = \sin kx,$$

ahol a határfeltétel  $\sin kL = 0$  egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

tetszőleges  $n \neq 0$  egész szám esetén. A sajátértékek függnek  $L$ -től, „végtelen nagy” intervallum esetén folytonos spektrumot kapunk.

Ha más határfeltételt adunk meg, például azt, hogy ne a függvény, hanem az első deriváltja vegyen fel nulla értéket az  $x = 0$  és  $x = L$  helyeken, akkor a sajátértékegyenlet megoldásai

$$u(x) = \cos kx,$$

ahol  $k$ -t az előbbi képlet adja meg, de most az  $n = 0$  érték is megengedett.

#### 4. A kvantummechanika dinamikája

A 20. század nagy fizikai elméletei a kvantummechanika, a speciális relativitáselmélet, az általános relativitáselmélet és az erőterek kvantumelmélete. Ezek szorosan függnek egymástól: az általános relativitáselmélet a speciálisra épül, az erőterek kvantumelmélete vagy a kvantum-térelmélet kiindulását pedig a speciális relativitáselmélet és a kvantummechanika alkotja. Ugyanakkor az általános relativitáselmélet határesetként tartalmazza a Newton-féle elméletet, a klasszikus mechanikát.

Ez az időszak volt a funkcionálanalízis kialakulásának időszaka is. A Lebesgue-integrál ráirányította a figyelmet a különféle függvényterekre, ekkor született meg az ortogonális sorfejtések és az integráloperátorok elmélete. Neumann János ekkor ismerkedett meg Göttingenben Heisenberg kvantummechanikájával és Hilbert integráloperátoraival. A kvantummechanika alapjait vizsgáló első cikkét 1927-ben írta Hilberttel és Nordheimmel együtt. Ugyanebben az évben jelenik meg „*A kvantummechanika matematikai megalapozása*” című dolgozata, amelyben először jelent meg a Hilbert-tér fogalma, amely azóta már klasszikussá lett: egy komplex vektortér, rajta értelmezett skaláris szorzattal, s azzal a tulajdonsággal, hogy a Cauchy-féle sorozatok konvergensek a skaláris szorzatból származtatott normára. Ez a nagyszerű elméleti konstrukció valósággal tálcán kínálja magát egy különös egyensúlyi dinamika aszimptotikusan stabil megközelítésére szinte valamennyi tudományterületen, köztük a közgazdaság-tudományban is.

A kvantummechanika volt az, amely megrázta a fizika Galilei által lefektetett alapjait. Eloszlatta azt a hitet, hogy a fizikai leírás realiztikus abban a naiv értelemben, hogy a fizika nyelvezete a kísérletezési és mérési feltételektől független rendszer tulajdonságait képviseli. Mikroszkopikus elmélet, mint hogy az atomok és a molekulák viselkedését írja le. Benne a kvantumrendszer állapotát a Schrödinger hullámfüggvény határozza meg, amely egy időben reverzibilis dinamikus egyenletből származik, ugyanúgy, mint a klasszikus dinamikában a Hamilton-függvény. Bizonyos mérések azonban megzavarhatják a kvantumrendszereket. Ebből ered az a közkeletű tévedés, hogy a kvantummechanikában az irreverzibilitás oka a mérés. A folyamatok nyilván függetlenek attól, hogy figyeljük-e őket vagy sem, és azok a folyamatok is irreverzibilisek, amelyek megfigyelése semmiféle zavart sem okoz bennük.

Amíg a klasszikus mechanikában a Hamilton-függvény a koordináták és a momentumok függvénye, addig itt most a legegyszerűbb kvantum esetben is, például a hidrogénatom tulajdonságainak interpretálásában is egy Hamilton-operátorra lesz szükségünk, hogy a megfelelő energiaszinteket az operátorhoz kapcsolódó sajátértékekkel azonosíthassuk. A kérdéses sajátérték-egyenlet a következő:

$$H_{op}u_n = E_n u_n, \quad (5)$$

ahol az  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sajátértékek a rendszer energiaszintjei. Természetesen megfelelő szabályokra van szükségünk, hogy a klasszikus változókról a kvantum operátorokra válthassunk, amelyek most a következők:

$$q \rightarrow q_{op} \quad \text{és} \quad p \rightarrow p_{op} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q},$$

azaz a koordináták nem változnak, a momentumokat pedig kicseréljük a koordináták szerinti deriváltakkal, ahol a transzformációban  $\hbar$  a Planck-állandót jelöli<sup>11</sup>. A függvényekről az operátorokra történő áttérést a spektroszkopikus vizsgálatok

<sup>11</sup> Az utóbbi transzformáció részleteit lásd in Neumann (1980) 112–15. oldalakon.

tették szükségessé, amelyek kimutatták az energiaszintek létezését. Tulajdonképpen az operátorok bevezetése változtatta meg radikálisan a természet leírását. A rendszer állapotát a Hilbert-tér elemei adják, az operátorokat a Hilbert-térben értelmezzük. Az operátorok nem kommutatívak, ami most fizikai értelemben azt jelenti, hogy nem lehetséges olyan állapot, amelyben mind a  $q$  koordináták, mind a  $p$  momentumok egyidejűleg jól definiáltak. Ezt fogalmazza meg lényegében a *Heisenberg-féle határozatlansági reláció*, amely a kvantummechanika egyik alappillére. A két mennyiség határozatlanságának szorzata mindig nagyobb kell, hogy legyen, mint a Planck-állandó  $2\pi$ -ed része, azaz  $\Delta q \Delta p \geq h/2\pi$ . Ha tehát egyre pontosabban szeretnénk megadni egy részecske helyét, akkor egyre bizonytalanabb lesz momentumának megadása és fordítva. Mindebből az következik, hogy a mikrofizika birodalmában gyökeresen más törvények léteznek, mint a klasszikus fizikában. Nincsenek pontosan meghatározható tények, csak valószínűségek vannak. Ez a felismerés szöges ellentétben állt Hegel történetfilozófiájával és később Marx determinisztikus gazdasági és társadalmi fejlődéstörvényeivel, de a fizikában is forradalmi következményekkel járt együtt.<sup>12</sup> Például az energia megmaradásának törvénye csak bizonyos feltételek mellett érvényes. Az energia és az idő is komplementer mennyiségpárok, egy adott pillanatban nem értelmezhető az idő és az energia közötti határozatlanság. Mindebből az következik, hogy az ilyen részecskékből álló rendszer összenergiája egyik pillanatról a másikra teljesen véletlenszerűen megváltozhat. Minél rövidebb a vizsgált időtartam, annál nagyobbak lehetnek ezek a fluktuációk, azaz az energiaingadozások.

Niels Bohr fogalmazta meg a *komplementaritási elvet*, amely a nem-kommutatív operátorok<sup>13</sup> által képviselt fizikai mennyiségek egzisztenciáján alapul és azt mondja ki, hogy a kvantumos jelenségek körében a hullám és a részecske tulajdonságok egymást kiegészítik. Prigogine értelmezésében ez azt jelenti, hogy „a világ sokkal gazdagabb annál, mint ami bármely nyelven kifejezhető”.

A sajátfüggvények nagyon sokban ugyanazt a szerepet játsszák, mint a bázisvektorok a vektoralgebrában. Amint egy tetszőleges vektor az elemi matematikában kifejezhető a bázisvektorok bizonyos koordinátákkal alkotott lineáris kombinációjaként, úgy egy kvantummechanikai rendszer tetszőleges  $\Psi$  állapota (hullámfüggvénye) a megfelelő sajátfüggvények szuperpozíciójaként reprezentálható:

$$\Psi = \sum c_n u_n. \quad (6)$$

<sup>12</sup>Itt megjegyzést érdemel, hogy egy kérdéses kvantumelmélet mindaddig determinisztikus, ameddig ismerjük a hullám időbeli alakulásának törvényszerűségeit. Vagyis, ha a hullám jól definiált valamely időpontban, akkor kiszámíthatjuk, hogy milyen lesz valamely más időpontban. Az előrejelezhetetlen, véletlenszerű elem létezésére számos kísérlet utal, amit persze tovább bonyolít az a megfigyelés, hogy a kvantummechanikában az indeterminizmus (a valószínűség) időbeli változása determinisztikus.

<sup>13</sup>Itt érdemes megemlíteni, Neumann *operátorgyűrű* elméletét, amelyben a gyűrű nem-kommutatív operátorokból áll, vagy a mai néven a *Neumann-algebrákat*. Ennek definiálásához szükségünk lesz az operátor halmaz kommutánsa fogalmára: azon  $X$  operátorok, amelyek a kérdéses halmaz minden egyes operátorával kommutálnak. Maga a Neumann-algebra pedig olyan operátor-algebra, amely megegyezik kommutánsának a kommutánsával.

Az egyszerűség kedvéért, itt érdemes venni a sajátfüggvények ortonormált halmazát (ami a vektoralgebrában annak felel meg, hogy a bázisvektorok egységnyi hosszúságúak és páronként ortogonálisak) :

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{ha } i = j \\ = 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}, \quad (7)$$

ahol az  $\langle u_i | u_j \rangle$  jelölés egyféle skaláris szorzatot jelöl a következő művelettel definiálva:

$$\langle u_i | u_j \rangle = \int u_i^\dagger u_j dx,$$

amelyben az  $u_i^\dagger$  az  $u_i$  komplex konjugáltja, és az integrál az egész értelmezési tartományra kiterjesztendő. megszorozva a (6) egyenletet  $u_i^\dagger$ -vel és felhasználva a (7) egyenletben adott ortonormalitási feltételeket, azonnal láthatjuk, hogy

$$c_m = \langle u_m | \Psi \rangle. \quad (8)$$

Az elemi vektortér és a kvantummechanikában használt tér közötti fő különbség az, hogy a dimenziószám az elsőben véges, a másodikban végtelen. A második esetben beszélünk Hilbert-térről, és az  $u_n$  sajátfüggvények, vagy a  $\Psi$  hullámfüggvények a tér elemei. Mindegyik elem kétféleképpen jelenhet meg a fizikai skaláris szorzaton belül, balra vagy jobbra. E célból vezetett be Dirac (1939) egy elegáns jelölést: az  $u_n$  elem írható mint egy *bra* vektor  $\langle u_n |$ , vagy mint egy *ket* vektor  $| u_n \rangle$ . Ezek a jelölések lehetővé teszik, hogy kompakt módon jelöljük a Hilbert-tér fontosabb tulajdonságait. Tegyük fel, hogy a (6) egyenletbeli kiterjesztés érvényes minden elemre. Felhasználva a *bra-ket* jelölést és a (8) egyenletet, egy tetszőleges  $\Phi$  elemre írhatjuk:

$$| \Phi \rangle = \sum_n c_n | u_n \rangle = \sum_n | u_n \rangle \langle u_n | \Phi \rangle.$$

Mivel ennek a relációnak igaznak kell lennie bármely tetszőleges  $| \Phi \rangle$  elemre, kapjuk a teljességi relációt

$$1 = \sum_n | u_n \rangle \langle u_n |.$$

A  $c_n$  expanziós koefficienseknek (azaz a kifejtési vagy Fourier-együtthatóknak), amelyek a (6) egyenletben jelennek meg, fontos fizikai jelentésük van. Ha mérjük a kérdéses fizikai mennyiséget (mondjuk az energiát), amelyből az  $u_n$  sajátfüggvény, az  $u_n$ -nek megfelelő sajátfüggvény megtalálásának valószínűsége  $|c_n|^2$ . A  $\Psi$  függvényt, amely a kvantum állapotát adja, ezért *valószínűségi amplitudónak* is nevezik. Vagyis a *kvantummechanika*, a klasszikus mechanikával szemben, egy *sztochasztikus-statisztikus elmélet*, amelyben a valószínűségi változók szerepét az

önadjungált operátorok (ld. később) veszik át, és bizonyos esetekben le kell mondanunk az együttes eloszlások használatáról.

A fentiekből világos, hogy a kvantummechanikában a fizikai mennyiségeket operátorok jelölik. Azonban ezek az operátorok nem lehetnek tetszőlegesek. A megfelelő operátorok specifikus osztálya az  $A$  operátornak az adjungáltja, amely a következő képlettel definiálható<sup>14</sup>:

$$\langle v | Au \rangle = \langle A^\dagger v | u \rangle. \quad (9)$$

Az önadjungált (vagy hermitikus) operátorok, amelyekre

$$A = A^\dagger,$$

fontos szerepet játszanak a kvantummechanikában. Fontosságukat az adja, hogy az önadjungált vagy hermitikus operátorok sajátértékei valósak.<sup>15</sup> Továbbá, egy hermitikus operátor az (5)-öt kielégítő sajátfüggvények ortonormált halmazára vezet.

A hermitikus operátorokon túl szükségünk lesz még az operátorok egy másik osztályára is, amelyek a koordinátákbeli változásokkal kapcsolatosak. Az elemi geometriából ismert, hogy egy skaláris szorzat értékét bizonyos transzformációk nem változtatják meg. Ezért tekintsünk olyan  $A$  operátort, amely változatlanul hagyja a skaláris szorzatot. Ez azt implikálja, hogy

$$\langle Au | Av \rangle = \langle u | v \rangle$$

és felhasználva (9)-et, kapjuk

$$A^\dagger A = 1. \quad (10)$$

*Per definitionem*, a (10)-et kielégítő operátorokat *unitér operátoroknak* nevezzük. Az  $A$  operátor inverze,  $A^{-1}$  olyan, hogy

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1.$$

Ebből az is következik, hogy egy unitér operátor rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy inverze megegyezik az adjungáltjával:

$$A^{-1} = A^\dagger.$$

<sup>14</sup>A definíció bizonyos pontatlanságot is tartalmaz, mert az értelmezési tartományok itt is fontos szerepet játszanak.

<sup>15</sup>Neumann János nevezte elsőként ezeket az operátorokat *maximálisan szimmetrikus* vagy *önadjungált operátoroknak*. Egy szimmetrikus operátorhoz több önadjungált operátor is tartozhat, de az is előfordulhat, hogy egy szimmetrikus operátornak egyáltalán nincs önadjungált kiterjesztése. Egyébként Neumann nevéhez rendelhető a nemkorlátos lineáris operátorok elmélete is. Továbbá, Neumann János bizonyította be, hogy ha egy hermitikus operátor sajátértékei diszkrét, akkor a sajátfüggvények teljes ortogonális függvényrendszert alkotnak. Ezek szerint tehát bármely függvény sorbafejthető.

Csakúgy, mint az elemi geometriában, egy *hasonlósági transzformáció* gyakran végzendő az operátorokra is. Egy hasonlósági  $S$  az  $A$ -ból az  $A$ -ba az alábbi reláción keresztül vezet:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS.$$

Ezzel a következőképpen végezhetjük el a Hamilton-operátor diagonalizációját. Olyan Hamilton-operátort kell vennünk, amely tartalmazza a kinetikai hozzájárulást, a  $H_0$ -t és a potenciális energiát,  $V$ -t. Ekkor kereshetjük a hasonlósági transzformációt,

$$\tilde{H} = S^{-1}HS$$

egy unitér  $S$  operátorban kifejezve, amely az induló Hamilton-operátort diagonálisba transzformálja. Ez ekvivalens a sajátérték-egyenlet megoldásával az (5)-ben. Valóban, a  $H$ -t egy matrixként reprezentálhatjuk, és az (5) egyenlet mutatja, hogy a sajátfüggvényeit felhasználó reprezentációban a  $H$  egy diagonális mátrixszal reprezentálható:

$$\langle u_i | Hu_j \rangle = E_j \langle u_i | u_j \rangle = E_j \delta_{ij}.$$

Mint az előbbieken már láttuk, egy kvantumrendszer állapotát a  $\Psi$  állapotvektor, vagy hullámfüggvény írja le, míg az időváltozást leíró *Schrödinger-(hullám)egyenlet*:

$$i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{op} \Psi,$$

amelyben  $i = \sqrt{-1}$  és  $\hbar$  a Planck-konstans. Fontos megjegyezni, hogy ezt az egyenletet nem a kvantummechanikából vezette le Schrödinger, hanem csak feltette, ami kísérlettel igazolható. Látjuk, hogy az egyenlet parciális differenciálegyenlet, a koordináták szerinti deriváltak  $H_{op}$ -ban vannak, az idő szerinti derivált elsőrendű csakúgy, mint a Hamilton-egyenletekben. Mivel  $\Psi$  ismerete egy tetszőleges kezdeti  $t_0$  időpontban, a megfelelő határfeltételekkel együtt, lehetővé teszi  $\Psi$  kiszámítását mind a jövőre, mind a múltra, ezért a determinisztikus szemlélet itt is érvényes, csakúgy, mint a klasszikus mechanikában. Az egyenletből könnyen kifejezhetjük a  $\Psi$  hullámfüggvényt:

$$\Psi(t) = e^{-iHt} \Psi(0).$$

Mivel  $H$  hermitikus, ezért mind a klasszikus, mind a kvantummechanikában a rendszer időbeli evolúcióját unitér transzformációban fejezzük ki. Ez viszont azt jelenti, hogy a Schrödinger-egyenletben a rendszer időbeli evolúciója csupán csak a koordinátákbeli változásnak felel meg.

## 5. Albert Einstein eredményei

A fentiek és az előző pont összegzéseként leszögezhetjük, hogy ezidáig még senki sem ért el nagyobb eredményeket az anyag statisztikai elméletében és specifikusabban a fluktuációk elméletében, mint Albert Einstein. A Boltzmann-formula

inverzén keresztül származtatta a makroszkópikus állapot valószínűségét a vele kapcsolatos entrópiában kifejezve. Ez a lépés döntőnek bizonyult a fluktuációk teljes makroszkópikus elmélete számára. Erre Einstein (1905) „*Brown-mozgás*” leírása volt a véletlenszerű folyamatok egyik legelső példája. A kémiai reakciók modellezése a Markov-láncokkal, ugyanezen gondolatvonal kiterjesztése. Végül, Einstein volt az első, aki felismerte a Planck-konstans általános értelmét, ami a hullám – részecske dualitásához vezetett. Einstein az elektromágneses sugárzást vizsgálta. Kb. húsz évvel később azonban, *de Broglie* kiterjesztette Einstein összefüggéseit az anyagra. Heisenberg, Schrödinger és mások foglalták ezeket az elgondolásokat matematikai keretekbe. De ha az anyag mind hullám, mind részecske, akkor a klasszikus determinizmus trajektória-felfogása érvényét veszti. Eredményként, a kvantummechanikával csak statisztikai előrejelzéseket végezhetünk. Einstein élete végéig ellenezte azt a felfogást, miszerint az ilyen statisztikai megfigyelések megfelelnek a természet objektív tulajdonságainak. Spinoza istenében, a természettel azonosított istenben, a mindenekfeletti (supréme) racionalitás istenében hitt. Ebben a koncepcióban nincs helye a szabad kreációnak, a kontingenciának, az emberi szabadságnak. Bármilyen kontingencia, bármilyen véletlenszerűség, ami úgy tűnik, hogy létezik, csak átmeneti. Ha úgy gondoljuk, hogy cselekedeteink szabadok, ez csak azért van, mert ignoráljuk azok igazi okait. Arra a kérdésre, hogy mi az irreverzibilitás, azt a választ adta, hogy az egy illúzió, egy szubjektív impresszió, ami kivételes kezdeti feltételekből származik. Paradox helyzet, hogy a kvantummechanikában végzett kutatásaiért Nobel-díjat kapott, pedig sohasem fogadta el, hogy a világegyetemet a véletlen igazgatja.

## 6. Termodinamikai egyensúly

A *termodinamika első törvénye*, egyszerű (homogén) rendszerekre

$$dE = dQ - pdV, \quad (11)$$

ahol  $E$  a belső energia,  $p$  a nyomás,  $V$  a térfogat,  $Q$  a hőátadás. Ez a formula azt fejezi ki, hogy a rendszer belső energiájának kicsiny  $dt$  idő alatti megváltozása egyenlő azzal a hővel, amelyet kapott a rendszer, plusz azzal a munkával, amelyet a rendszeren végeztek.<sup>16</sup>

Megfelelően lassú folyamatok esetén fennáll a

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (12)$$

egyenlőség, ahol  $S$  a rendszer entrópiája és  $T$  az abszolút hőmérséklete.

Kombinálva a (11) egyenletet a (12)-vel, az entrópia teljes differenciálját kapjuk az  $E$  és  $V$  változóiban:

$$dS = \frac{dE}{T} + p \frac{dV}{T}.$$

<sup>16</sup>Bővebb kifejtésért lásd Matolcsi (2004).

Gibbs általánosította ezt a formulát, hogy belefoglalja a komponensekbeli változásokat is. Jelöljük  $n_1, n_2, \dots, n_\gamma$ -val a különböző komponensekben lévő mólok számát. Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} dS &= \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right) dE + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \sum_{\gamma} \left( \frac{\partial S}{\partial n_{\gamma}} \right) dn_{\gamma} = \\ &= \frac{dE}{T} + \frac{p}{T} dV - \sum \frac{\mu_{\gamma}}{T} dn_{\gamma}. \end{aligned} \quad (13)$$

A  $\mu_{\gamma}$  mennyiségek per definitionem kémiai potenciálok, amelyeket Gibbs vezetett be, és ezért a (13) egyenletet az entrópia Gibbs-féle formulájának nevezik. A kémiai potenciálok maguk a termodinamikai változók függvényei, úgy, mint a hőmérsékleté, a nyomásé, a koncentrációé stb. Azok egy különösen egyszerű alakot vesznek fel az ún. ideális rendszerekre, amelyekben logaritmikusan függnek a mól-törtektől, az  $N_{\gamma} = n_{\gamma} / (\sum n_{\gamma})$ -ektől:

$$\mu_{\gamma} = \zeta_{\gamma}(p, T) + RT \log N_{\gamma},$$

amelyben  $R$  a gázkonstans (egyenlő a Boltzmann-féle  $k$  konstans és az Avogadro-féle szám szorzatával), és a  $\zeta_{\gamma}(p, T)$  a nyomás és a hőmérséklet bizonyos függvénye.

Az entrópiatermelés egyszerű értékelése válik lehetővé, ha feltesszük, hogy az entrópia az egyensúlyon kívül ugyanazon  $E$ ,  $V$  és  $n_{\gamma}$  változóktól függ, mint az egyensúlyban. Megfelelő kémiai folyamatokra vonatkozó kiegészítő feltevések mellett (részletesen lásd in Prigogine (1980, 84–85. o.)) a (13) Gibbs-féle formulából az egyensúly bizonyos környezetében az alábbi összefüggést nyerjük:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j X_j J_j \geq 0, \quad (14)$$

amelyben  $dS/dt$  az egységnyi idő alatt termelt entrópiát,  $J_j$  az előforduló különböző irreverzibilis folyamatok (kémiai reakciók, hőáramlás, diffúzió stb.) rátáit, az  $X_j$  pedig a megfelelő általánosított erőket (affinitásokat, a hőmérsékleti és a kémiai potenciálok gradienseit stb.) mutatja. Ez az irreverzibilis folyamatok makroszkopikus termodinamikájának alapképlete.

A termodinamikai egyensúlyban a

$$J_j = 0, \quad X_j = 0$$

kikötések szimultán teljesülnek az entrópia termelésében előforduló összes irreverzibilis folyamatra. Az alapképletből világos, hogy egy (öko)gazdasági modellben a Gibbs-féle formula csak akkor használható fel, ha az a termodinamikában definiált potenciálokkal és azokhoz kapcsolódó irreverzibilis folyamatok rátáival izomorf módon értelmezett. Az ilyenféle megfeleltetés kérdését elsőként Neumann János (1945) vetette fel, és azóta számtalan kísérlet történt sejtésének igazolására, illetve cáfolatára. A két legérdekesebb tanulmány Bródy Andrásé (1989) és Paul



A. Samuelsoné (1992), amelyeket felhasználunk a következő pontban Neumann sejtésének cáfolatában.

### 7. Bródy versus Samuelson kísérletei

Mielőtt nagyító alá tennénk *Bródy* (1987) tanulmányát, megmutatjuk, hogy semmiféle maximum vagy minimum nem értelmes egyetlen homogén rendszerre. Szigorúan termodinamikai összefüggésekből indulunk ki, ami végül is *Samuelson* (1992) tanulmányában található (15a)–(15c) képletekben az entrópiamaximumról, illetve a (16a)–(16c) képletekben az energiaminimumról kifejtett érvelésekre vezet.

Vegyünk egy rendszert, amely két egymással kölcsönhatásban levő alrendszerből áll, és tegyük fel, hogy az alrendszerek  $E_1 + E_2$  összenergiája és  $V_1 + V_2$  összterfогata állandó; ekkor az

$$S_1(E_1, V_1) + S_2(E_2, V_2)$$

összentrópia maximális lesz egyensúlyban.

Vegyünk most azt a rendszert, amely az előző két alrendszerből áll, azzal a feltétellel, hogy az alrendszerek  $S_1 + S_2$  összentrópiája és  $V_1 + V_2$  összterfогata állandó; ekkor az

$$E_1(S_1, V_1) + E_2(S_2, V_2)$$

összenergia minimális lesz egyensúlyban.

Látható, hogy a két rendszer merőben különböző: az elsőben a két alrendszert együttesen hőszigeteljük és merev fallal vesszük körül, a másodikban a merev fal marad, de a hőszigetelés helyett éppen azt biztosítjuk, hogy mindig annyi hőt vezetünk ki vagy be, hogy az összentrópia állandó maradjon. A két rendszer kizárja egymást. *Nem lehet tehát ugyanarra a rendszerre egyszerre entrópiamaximumot és energia-minimumot számolni.* Az első rendszert jellemző mennyiségek  $E_1, E_2, V_1, V_2$ , ezekre fogalmazunk meg feltételeket és ezek egy függvényének, az összentrópiának keressük a maximumát. A második rendszert más mennyiségek jellemzik, ezekre fogalmazunk meg feltételeket és ezek egy másik függvényének, az összenergia minimumát keressük. Összefoglalva: két különböző rendszerünk van, két összegyeztetethetetlen feltétellel, és két különböző függvény szélsőértékét keressük.

*Bródy* tanulmányában egyetlen rendszer van, a  $p$  és  $x$  mennyiségekre felírt két összeegyeztethető  $pA \leq \lambda pB$  és  $Ax \geq \lambda Bx$  Neumann-feltétellel, és ugyanannak a  $\lambda$  függvénynek (egyszer mint entrópiának, másszor mint energiának) keresi a szélsőértékét. Mindez a fentiek alapján kizárja a termodinamikával vett párhuzamot. Másképpen, *Neumann János* sejtése nem igazolható, hogy a gazdasági modelljében a termodinamikában definiált potenciálokkal és azokhoz kapcsolódó irreverzibilis folyamatok rátáival izomorf módon értelmezhető lenne a növekedés.

Viszont ez még nem zárja ki annak lehetőségét, hogy általánosabb keretek közt mégis bizonyítható.<sup>17</sup>

## 8. Stabilitás

A termodinamikai egyensúlynak megfelelő állapotok vagy egy minimális entrópiatermelésnek megfelelő stacionárius állapotok a lineáris nemegyensúlyi<sup>18</sup> termodinamikában általában stabilak. Az entrópia a lineáris nemegyensúlyi termodinamikában Ljapunov-függvény a stabilitásra; az entrópiatermelés valójában a Ljapunov-függvény „rendszer szerinti driváltja”. Az entrópia második deriváltjának negatív definitése biztosítja a Ljapunov-függvény szélsőértékét az egyensúlyban, az entrópiatermelés pozitivitása – lásd a (14) formulát – pedig a Ljapunov-függvény rendszer szerinti deriváltjának a szélsőértékét. Tehát az entrópia létezése biztosítja az összes fluktuáció csillapodását, a rendszer stabilitását.

Az entrópia második deriváltjának negatív definitését azzal az esettel szemléltethetjük, amikor egyedül csak a belső energia változhat. Ugyanis az entrópiára érvényes összefüggések szerint

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{1}{T}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} &= -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial E} < 0,\end{aligned}$$

minthogy

$$\frac{\partial T}{\partial E} = \frac{1}{C_V},$$

ahol  $C_V$  az állandó térfogaton vett fajhő, amely pozitív.

A lineáris nemegyensúlyi termodinamika mindenképpen homogén testekre vonatkozik. Kérdés, mennyiben lehet felhasználni eredményeit az inhomogén rendszerekre, vajon az egyensúlytól távolabbi rendszerekre extrapolálható-e ez a stabilitás? Vannak válaszok az irodalomban (pl. Glansdorff-Prigogine (1971)), de ezek még nem adnak teljes körű megoldásokat. Az egyensúlyi tartománytól messze távol a helyzet változik. Ott ugyanis a kémiai kinetika játszik lényeges szerepet, s a kémiai kinetika bizonyos típusaira a rendszer instabillá válhat. Ez azt mutatja, hogy jelentős különbség van az egyensúlyban levő rendszerekre vonatkozó törvények és az egyensúlytól távolabb lévő nemegyensúlyi rendszerekre vonatkozó törvények között. Az egyensúly törvényei univerzálisak, azonban távol az egyensúlytól a viselkedés nagyon specifikussá válhat.

<sup>17</sup>Vitáinkon ezt az álláspontot képviselte mindvégig Martinás Katalin és Ván Péter is.

<sup>18</sup>Érdemes itt megjegyezni, hogy a nemegyensúlyi értelmezés nem adható meg a szokásos (egyensúlyi) keretek között. Ha valahogy mégis értelmezhetjük a nemegyensúlyit, akkor az általános nemegyensúlyinak speciális esete az, amelyik közel van az egyensúlyhoz. Egyféle formális közelítése a fentieknek a híres *Onsager-elmélet*, amelyet Matolcsi (2004) kitűnően interpretál.

### 9. Önszerveződés: instabilitás, bifurkáció és evolúció

Elméletileg a *bifurkáció* egyszerűen az egyenletek új megoldásának megjelenése bizonyos kritikus érték(ek)re. Ezek a megoldások egymást követő *instabilitások* mellett nyerhetők, amelyek akkor fordulnak elő, amikor egyre jobban eltávolodunk az egyensúlytól. Például, vizsgáljunk meg egy kémiai reakciót, amely az alábbi rátaegyenletnek felel meg:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X (X - R).$$

Nilvánvaló, hogy az  $R < 0$ -ra az egyetlen időfüggetlen megoldás az  $X = 0$ . Az  $R = 0$  pontban egy új megoldás bifurkációját kapjuk, az  $X = R$ -t. Könnyen belátható, hogy az  $X = 0$  megoldás instabil, míg az  $X = R$  stabil. Általában egymást követő bifurkációkat kapunk, ha növeljük a megfelelő  $\alpha$  karakterisztikus paraméter értékét. A bifurkáció matematikai elmélete általában nagyon komplex. Gyakran nagyon fáradságos kifejtést igényel, de vannak esetek, amelyekben pontos megoldás lehetséges. Egy nagyon egyszerű ilyen típusú helyzetet ír le *René Thom* (1975) *katasztrófa elmélete*, amely akkor alkalmazható, amikor a diffúziót negligáljuk az  $X_i$  evolúciójából, és csak egy potenciálból származtatjuk. Ekkor a következő alakot írhatjuk fel:

$$\frac{dX_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial X_i}, \quad (15)$$

amelyben  $V$  egy potenciálfüggvényt jelöl. Ez egy meglehetősen kivételes eset. Azonban, amikor teljesül, a (15) egyenlet megoldásainak egy általános klasszifikációja lehetővé teszi azon pontok megkeresését, amelyekben vannak változások a tartós állapotok stabilitási tulajdonságaiban. Ezek azok a pontok, amelyeket Thom a *katasztrófák együttesének* nevezett.

Végül egy általános fogalmat említünk meg, amely fontos szerepet játszik az *önszerveződés* elméletében, mégpedig a *strukturális stabilitást*<sup>19</sup>. A fogalom a leg-egyszerűbben a *ragadozó-áldozat versengésnek* megfelelő Lotka-Volterra egyenletek<sup>20</sup> egyszerűsített alakjával illusztrálható:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= by, \\ \frac{dy}{dt} &= -bx. \end{aligned} \quad (16)$$

A (16) rendszer  $(x, y)$  fázissterében a zárt trajektóriák végtelen halmaza veszi körbe az origót. A rendszer Jacobi-sajátértékei tisztán imaginárius komplex számok. Hasonlítsuk össze a (16) rendszer megoldásait azokkal, amelyeket a következő egyen-

<sup>19</sup>Konkrét vizsgálatra lásd a Móczár - Krisztin (2006) tanulmányt, amelyben a szerzők a keynesi elmélet Harrod-féle növekedési modelljének strukturális stabilitását vizsgálják.

<sup>20</sup>A Lotka-Volterra rendszer közgazdasági adaptációját lásd in Goodwin (1967).

letekből kapunk:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= by + ax. \\ \frac{dy}{dt} &= -bx + ay.\end{aligned}$$

Az utóbbi esetben, még a legkisebb  $a$  ( $a < 0$ ) paraméterérték mellett is, az  $x = 0$ ,  $y = 0$  pont aszimptotikusan stabil, vagyis egy olyan egyensúlyi pont, amelyhez az összes trajektória konvergál a fázistérben. Ekkor  $(0, 0)$ -ban a Jacobi-sajátérték negatív valós résszel rendelkezik. Per definitionem, a (16) egyenletek által meghatározott rendszert *strukturálisan instabílnak* nevezzük, mivel a rendszer kis perturbációja megváltoztatja a fázisképét.

A strukturális stabilitás fogalma alkalmasnak látszik arra, hogy a legkompaktabb módon kifejezzük az innováció ideáját, új mechanizmus és új faj megjelenését, amelyek kezdetben hiányoztak a rendszerből.

A *Brüsszelerátor modell* tanulmányaink szempontjából különösen érdekes, mivel a megoldások dinamikai tulajdonságainak széles választéka tanulmányozható elégségesen távol az egyensúlytól: a határciklusok, a nem uniformizált tartós állapotok, a kémiai hullámok. Amikor a kémiai kinetikába a diffúziót is belefoglaljuk, a reakció-diffúzió egyenletek az alábbi alakot veszik fel a Brüsszelerátor modellben (részletesen lásd in Nicolis-Prigogine (1977)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= A + X^2Y - BX - X + D_X \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= BX - X^2Y + D_Y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}.\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy kezdeti értékeként a koncentrációs értékeket vesszük. A következő alakú megoldásokat keressük:

$$\begin{aligned}X &= A + X_0(t) \sin \frac{n\pi r}{L}, \\ Y &= \frac{B}{A} + Y_0(t) \sin \frac{n\pi r}{L},\end{aligned}\tag{17}$$

amelyben  $n$  egy integer szám és az  $X_0$  és  $Y_0$  még mindig időfüggők. Ezek a megoldások kielégítik a határfeltételeket, az  $X = A$ -t és  $Y = B/A$ -t az  $r = 0$ -ra és  $r = L$ -re. Ezután alkalmazhatjuk a lineáris stabilitáselemzést, amivel egy olyan diszperziós egyenletet nyerünk, amely a rendszerhez tartozó megfelelő Jacobi-sajátértéket hozzákapcsolja a (17)-beli  $n$  integer által adott tér-függőséghez.

Az eredmények a következők. Az instabilitás különbözőképpen állhat elő: a két diszperziós egyenletnek két olyan gyöke lehet, amelyek komplex konjugáltak, és valamely pontban a gyökök valós részei eltűnnek. Ez az eset határciklushoz vezet: az irodalomban ezt nevezik *Hopf-bifurkációnak*. Egy másik lehetőség, hogy két negatív valós gyökünk van, amelyek közül az egyik pozitívvá válik valamely kritikus pontban. Ez a helyzet vezet a térben nem uniformizált egyensúlyi állapotokhoz. Ezt nevezik *Turing-bifurkációnak*, mert Turing volt az első, aki megjegyezte

a morfogenezisről írt klasszikus tanulmányában (Turing (1952)), hogy egy ilyen bifurkáció lehetséges a kémiai kinetikában.

Lotka (1924) célkitűzése az volt, hogy a biológiai folyamatok egy új rendszerezését adja meg, és kifejtése tudatosan matematikai volt. Az egyszerű

$$dX/dt = aX$$

differenciálegyenleten alapuló növekedési folyamatok tanulmányozása után, Lotka bonyolultabb egyenleteket is vizsgált. Észrevette, hogy az ilyen folyamatokra az általános alak a

$$dX/dt = a + bX + cX^2 + \dots,$$

amely hamarosan olyan kísérletekre vezetett, amelyek ilyen típusú egyszerű modellekre vezetnek. Egyik ilyen felfedezése volt a „populáció szaporodási törvénye”, amelyet a

$$dX/dt = aX + bX^2$$

differenciálegyenlettel definiált, az

$$X(t) = (a/b) / [1 + \exp(-at)]$$

megoldással, amely a közismert logisztikus görbe függvényalakja. Lotka hatalmas energiát szentelt arra, hogy kiderítse törvényének igazságát, vagy hamisságát. Ehhez különböző adatbázisokat, mint például az USA lakossága, a muslincák vagy a baktériumtelepek száma stb., használt fel statisztikai vizsgálataiban. Elképzelése helyes volt, mivel a differenciálegyenlete azon alapult, hogy egy populáció növekedésének pozitívan kell kapcsolódnia a populáció szintjével, és a növekedés megáll, amikor elérjük az abszolút limitet.

Lotka az evolúciót, mint „az irreverzibilis változásokon átmenő rendszer múltját” definiálja. Olyan evolúciós törvényt célzott meg, amely pontosan úgy funkcionál, mégpedig az általánosság ugyanolyan fokával, mint a termodinamika törvényei, különösen a termodinamika második törvénye. A törvény egyetlen irányt állapított meg az izolált rendszerben megjelenő folyamatokra, és ezért egy *evolúciós törvénynek* tekinthető.

A közgazdasági dinamikában a számunkra érdekes legfontosabb eszme azonban az, hogy az alapul szolgáló modell, amelyen belül a keretet differenciálegyenletek szolgáltatják, a *disszipatív dinamikus rendszerekhez* tartoznak. A szokásos dinamikus rendszerek *konzervatívak*, amelyekben bizonyos mennyiség, általában az energia, a rendszer pályái és mozgásai mentén konzervált. Lotka kimutatja, hogy ezek a rendszerek reverzibilisek, vagyis az idő visszafordítható bennük, ami analitikus megoldásokat nyújt a mozgások korábbi helyzeteire. A keringő bolygók mozgását leíró fizikai rendszer megoldható előre, hogy megállapítsuk a Mars jövőbeli helyzetét, vagy visszafelé, hogy megállapítsuk a korábbi helyzetét. Lotka, mint a fejlődést kutató biológus, olyan matematikai modell-osztályok kifejlesztésében volt érdekelt, amelyek irreverzibilisek, vagyis amelyek nem fordíthatók visszafelé. Egy ilyen rendszerre az egyensúly fogalma nem a Naprendszernek, az égi mechanikának megfelelő periodikus mozgás volt, sem a hasonló fizikai egyensúlyoké, hanem inkább egy

disszipatív rendszerre vonatkozó egyensúly, egyféle súrlódásos Naprendszer, hővesztéssel járó, irány nélküli időfolyam. Biológiai egyedek kipusztulnak, szervezetek fejlődnek. Lotka szerint a társadalmi tudományoknak is ilyen *disszipatív rendszereket* (amelyeket Samuelson (1947) elsőfajú stabilitással jellemez Picardra (1928) hivatkozva) kell modelleznie. Lotka a nyílt és zárt rendszerek közötti distinkciójával és a velük kapcsolatos különböző egyensúlyi fogalmakkal bizonyos mértékben az általános rendszerelmélet (*von Bertalanffy* (1973)) lámpásának is tekinthető.

Lotka könyvének második része a kinetikát tárgyalja, és elsősorban a növekedés egyszerű egyenletét, az eredményül kapott logisztikus görbét vizsgálja. Az egyes fejezetek különböző populációkat és a növekedési törvény különböző példáit teszik nagytól alá. Samuelson természetesen átveszi ezt a kifejtést a *Foundations* 291–94. oldalain és hivatkozik Lotkára. Samuelson populáció elméletei hasonlóak Lotka populáció-növekedésről kifejtett elméleteivel.

A harmadik rész a statikáról szól, amelyben Lotkát az egyensúly érdekelte, vagyis az  $F_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$  függvények zérus értékekkel. Megjegyzi, hogy a kinetika szempontjából az egyensúly (vagyis egy stacionárius állapot) olyan állapot, amelyben a sebesség, a  $dX_i/dt$  zérussal egyenlő. Másképpen, az egyensúly dinamikus fogalma az erők mérlegéhez kapcsolódik, és megjegyzi, hogy ennek jelentése etimológiailag szorosan kapcsolódik az „egyensúly” mint „*aequa libra*” kifejezéshez. Ezeknél is érdekesebb a harmadik jelentés, az energetikában kifejezve, miszerint egy rendszer dinamikus egyensúlyban van, amennyiben az az energia dimenzióban kifejezett bizonyos függvények minimumát (vagy néha a maximumát) elérte; egy olyan állapot, amelyben a virtuális munkavégzés tetszőleges kis elmozdítása kompatibilis a korlátok eltűnésével (i. m. p. 144). Az egyensúly változásaiban a

$$dX_i/dt = F_i(X_1, X_2, \dots, X_n; P)$$

alakú egyenleteket vizsgálta, amelyben a  $P$  lassan nő, úgyhogy a megoldások, vagy egyensúlyi állapotok, amelyeket a  $P = \text{konstans}$  mellett származtattunk, folytonosan ahhoz az esethez kapcsolódnak, amelyben  $P$  nem egy konstans, hanem inkább egy lassú változó. Ezt követi a *Le Chatelier-elv* (a legkisebb kényszer elve), amely a következőképpen jellemezhető: „Mindegyik kémiai egyensúlyban levő rendszer, valamely egyensúlyi tényező változásának hatására, egy olyan irányú transzformáción megy keresztül, hogy ha kizárólag csak ez a transzformáció következik be, akkor a kérdéses tényező ellenkező irányú változását fogja eredményezni. Az egyensúlyi tényezők a hőmérséklet, a nyomás és az elektromos erő, amelyek megfelelnek a három energiaformának, a hőnek, az elektromosságnak és a mechanikai energiának.” (Lotka, 1924, 281. o). Másképpen, ha valamely rendszert (anyagot vagy anyagok halmazát) egyensúlyi állapotában megzavarunk, a rendszer úgy állítja helyre az egyensúlyát, hogy a zavaró hatást semlegesíti. Samuelson volt az, aki felhívta a közgazdászok figyelmét a *Le Chatelier-elvre*, és felhasználta a költségek és a termelés magyarázatában.<sup>21</sup> Érdekes lehet itt megemlíteni, hogy Lotka példáiból kitűnik, hogy maga is tisztában volt korának matematikai közgazdasági

<sup>21</sup>Részletes kifejtését lásd in Zalai (2000) 442–445. o.

irodalmával, könyvében például hivatkozik is Cournotra, Edgeworthra, Jevonsra és Pareto-ra. Az  $X_i$ -k – könyvének negyedik részében – élő organizmusok aggregátumai; mint állapotváltozók valójában „energia transzformerek”, és a dinamika ezeknek a „motoroknak” a dinamikája. Ezért a koncepciójáért érdemelte ki később Lotka az „ökológia atyja” címet. Megjegyzí, hogy eszméi fényt deríthetnek kvantitatíve a közgazdaságtan biológiai alapjaira, azokra az összefüggésekre, amelyek bizonyos biológiai és bizonyos közgazdasági mennyiségek között léteznek. Az életért folyó verseny elsősorban az elérhető energiáért folyó küzdelem.<sup>22</sup> Ebben az értelemben az energia értékes az organizmus számára, de ami nagyon különböző dolog attól, hogy azt mondjuk, hogy a közgazdasági érték az energia formája. A társadalmi fejlődés és a gazdasági szervezet energetikai közelítései Friedrich Wilhelm Ostwald elméleteit tükrözik, aki azt hirdette, hogy az energia a centrális szervező fogalom a fizikai és a biológiai tudományokban.

### 10. Időoperátorok

Prigogine (1980) a változások leírására alkalmas módszerek három osztályát különbözteti meg: (1) az átlagok evolúciójával foglalkozó makroszkopikus módszerek, mint pl. Fourier törvénye, a kémiai kinetika; (2) sztochasztikus módszerek, mint a Markov-láncok; (3) a klasszikus vagy kvantummechanika.

Az utóbbi években a makroszkopikus leírás területén valami egészen új és váratlan dolgok történtek, különösen a nemlineáris, az egyensúlytól távoli helyzetekben: még egyszerű példák is egymást követő bifurkációkhoz, különböző téridőbeli strukturákhoz vezethetnek. Ez viszont drasztikusan korlátozza a makroszkopikus leírás egységesítő erejét, és azt mutatja, hogy önmagában nem szolgáltathatja az időbeli evolúció konzisztens leírását. Ráadásul, a makroszkopikus egyenletek nem tartalmaznak információt arról, hogy mi történik a bifurkációs pontokban? Milyen lesz a rendszer törése adott bifurkációkat követően?

Ezért olyan sztochasztikus elmélet felé kell fordulni, mint a Markov-láncok. De itt is új dolgok jelennek meg. Különösen érdekes a fluktuációk és a bifurkációk közötti zárt összefüggés, ami mély alterációkhoz vezet a valószínűségelmélet klasszikus eredményeiben. A nagy számok törvénye többé nem érvényes a bifurkációk közelében, és a valószínűségi eloszlásokra vonatkozó lineáris mesteregyenletek megoldásának unicitása is elvész.

A sztochasztikus és makroszkopikus módszerek közötti összefüggés világos. Pontosan akkor észlelhető, amikor az átlagmennyiségek nem elégitik ki a zárt egyenleteket, amelyek a bifurkációs pontokhoz oly közel vannak, hogy a statisztikai elmélet teljes apparátusát kell használnunk. A makroszkopikus vagy sztochasztikus és a dinamikus módszerek közötti összefüggés azonban, továbbra is kihívás marad. Ezt a kérdést sokféle szempontból vizsgálták a múltban.

<sup>22</sup>Lásd Hotelling (1931).

A kvantumelmélet is bizonyára szerepet játszik ebben, mert a klasszikus trajektóriák feladására kényszerít minket. De a második törvénnyel való kapcsolata szempontjából, az instabilitás fogalma, amelyet ismétlődően megvitattak, alapvető jelentőségűnek tűnik. A mozgási egyenletek strukturája a mikroszkopikus szinten levő „véletlenszerűséggel” ekkor a makroszkopikus szinten levő irreverzibilitásként jelenik meg. Ebben az értelemben már *Poincaré* (1921) előrejelezte az irreverzibilitás jelentését. Poincarének az alapvetően determinisztikus leírásba vetett hite azonban túlságosan is szilárd volt, hogy a természet releváns statisztikai leírását komolyan vizsgálja. A helyzet mára már teljesen különböző. Sok évvel Poincaré után a természet determinisztikus leírásába vetett bizalmunk megingott, mind mikroszkopikus, mind makroszkopikus szinten. A klasszikus vagy kvantumfizika természetes korlátjai csökkenthetik az előrejelző erejüket. Bár az újonnan megjelent fogalmak segítenek e folyamat megfordításában. Ezek közül a legérdekesebb az  $M$  mikroszkopikus időoperátor. Az időoperátor pontos matematikai értelmezésére nagyon sok próbálkozás történt. Ezek sikere több szempontból is vitatott, s elsősorban az értelmezési tartományok definiálásán buknak el.

Az egyik ilyen próbálkozás Prigogine nevéhez fűződik, aki bevezeti a *második idő* fogalmát, amely egy belső idő és teljesen különbözik attól, amely megcímkézi a trajektóriákat vagy hullámfüggvényeket. Ez az időoperátor egy új bizonytalansági relációt teljesít az  $L$  Liouville-operátorral. A  $\langle T \rangle$  és a  $\langle T^2 \rangle$  átlagokat az alábbi bilineáris formulákon keresztül definiálhatjuk<sup>23</sup>:

$$\langle T \rangle = \text{tr} \rho^\dagger T \rho, \quad \langle T^2 \rangle = \text{tr} \rho^\dagger T^2 \rho.$$

Elégge érdekesen, a 'közönséges' idő, a dinamika címkéje, ekkor egy átlag lesz az új időoperátor felett. Ez valójában a bizonytalansági reláció következménye (vö. Prigogine, 1980, 188. o. és 209. o.), ami azt implikálja, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle T \rangle &= \frac{d}{dt} \text{tr} \left[ (e^{-iLt} \rho)^\dagger T (e^{-iLt} \rho) \right] = \\ &= i \text{tr} \left[ \rho^\dagger e^{iLt} (LT - TL) e^{-iLt} \rho \right] = \\ &= \text{tr} \rho^\dagger \rho = \text{konstans}. \end{aligned}$$

Egy megfelelő normalizációval ezt a konstans egynek vehetjük. Így azt kapjuk, hogy

$$dt = d \langle T \rangle.$$

Szavakban, a makroszkopikus idő egyszerűen az új időoperátor feletti átlag. Ebben a perspektívában a szokásos idő fogalmát csak akkor nyerhetjük vissza, amikor  $T$  egy olyan triviális operátor (mint a klasszikus mechanikában), hogy

$$T \rho(x, v, t) = t \rho(x, v, t).$$

<sup>23</sup>A klasszikus mechanikában az átlagolási operátor a fázistér feletti integrációt jelenti, amihez hasonló szerepet játszik a nyom operátor a kvantummechanikában, azaz  $\text{tr} O = \sum_n \langle n | O n \rangle$ , és a sűrűség operátor, azaz  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ .



Ekkor a „kor” független az eloszlás alakjától a fázistérben. Ezzel szemben, az új fogalom azt implikálja, hogy a „kor” függ magától az eloszlástól, és többé nem egy külső paraméter, nem egy egyszerű címke, mint a konvencionális megfogalmazásban.

A Prigogine-féle időoperátor azonban a jelenlegi formájában hasonlóképpen értelmezhetetlen, mint a kvantummechanikai (lásd később a (b) pontban). Nem adja meg pontosan azt a függénysztyált, amelyen az operátor hat.

A kvantummechanikában az időoperátor pontos matematikai értelmezésére tett próbálkozások közül, most kettőt emelünk ki.<sup>24</sup>

(a) Legyen  $X$  a térben négyzetesen integrálható komplex értékű függvények összessége, ami egy tömegpont állapotainak Hilbert-terét képezi. Az önadjungált

$$H = -\frac{\Delta}{2m} + V$$

Hamilton-operátor értelmezési tartománya az  $X$ -nek egy sűrű altere. Egy folyamat olyan függvény, amely minden  $t$  pillanathoz hozzárendel egy  $\Psi_t$  elemet  $X$ -ben; a folyamat kielégíti az

$$i\frac{d\Psi_t}{dt} = H\Psi_t$$

egyenletet. Minden fizikai mennyiség az  $X$ -ben (természetszerűleg sűrűn) értelmezett önadjungált operátor. Így a  $T$  időoperátornak is ilyennek kell lennie, hogy a  $HT - TH = i$  teljesüljön egy sűrű altéren (*kanonikus felcserélés*). Ilyen viszont nem létezik, mivel a  $t$ -vel való szorzás nincs értelmezve  $X$ -ben (mi az a  $t$ , amivel meg kellene szorozni egy a térben értelmezett függvényt?).

(b) Legyen  $C$  az időben és térben értelmezett komplex értékű kétszer differenciálható függvények összessége. Ezen értelmezett az idő szerinti differenciálás, valamint a

$$-\frac{\Delta}{2m} + V$$

másodrendű térbeli differenciáloperátor. Így értelmezhető  $Z_0$ , mint azoknak a  $C$ -beli  $\phi$  függvényeknek az összessége, amelyek kielégítik az

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{2m} + V\right)\phi = 0$$

egyenletet. Ezen térbeli integrálással skalárszorzatot értelmezünk, azzal teljessé téve  $Z_0$ -t, kapjuk  $Z$ -t, s most ez képezi a tömegpont állapotainak Hilbert-terét. Ebben a felfogásban egy állapot maga egy folyamat. Minden fizikai mennyiség a  $Z$ -ben (természetszerűleg sűrűn) értelmezett önadjungált operátor. Az az érdekesség, hogy itt az energia-operátor  $i(\partial/\partial t)$ . Formálisan ez és a  $t$ -vel való szorzás operátora kielégíti a kanonikus felcserélési relációt. Csakhogy a  $t$ -vel való szorzás csupán a  $C$ -ben értelmes,  $Z$ -ben nem. Ugyanis, ha  $\phi$  a  $Z_0$  eleme, akkor  $t\phi$  már

<sup>24</sup>Ezek megfogalmazásáért Matolcsi Tamásnak tartozom köszönettel.

nem az. És másképpen sem értelmezhető olyan önadjungált operátor, amely az energiával kanonikusan felcserél.

További próbálkozások abból indulnak ki, hogy általánosabb értelmezésben fizikai mennyiségnek nem kell önadjungált operátornak lennie, csak maximális szimmetrikusnak. Ilyen időoperátor viszont nincs.

## 11. Következtetések

Hosszú ideig a klasszikus mechanika abszolút előrejelezhetőségét úgy tekintették, mint a fizikai világ tudományos képének egy lényeges eleme. A modern tudomány három évszázada alatt (1685-től számítva, amikor is Newton előadta a *Principia c.* művét a Royal Society-ben) a tudományos világkép egy új, sokkal árnyaltabb fogalom irányába tolódott át, amelyben mind a determinisztikus, mind a sztochasztikus megközelítések jelentős szerepet játszanak. A sztochasztikus elemek nemcsak a makroszkopikus szint bifurkációs elméleteiben lényegesek, hanem a mikroszkopikus leírásban is, amint azt már a klasszikus mechanika is bebizonyította. Ez az evolúció még napjainkban is tart. Az is jól érzékelhető, hogy a *termodinamika törvényei nem kerülhetők meg az ökögazdasági modellekben*. Szigorúan a termodinamika törvényeiből kiindulva, Bródy (1989) és Samuelson (1992) tanulmányaira támaszkodva, megmutattuk, hogy Neumann János sejtése nem igazolható: a gazdasági modelljében a termodinamikában definiált potenciálokkal és azokhoz kapcsolódó irreverzibilis folyamatok rátáival nem értelmezhető izomorf módon a növekedés. Vagyis várat még magára egy olyan ökögazdasági modell, amely a termodinamika törvényein a valóság jobb közelítésére alkalmas. Az új időfogalom még nem jutott el a közgazdászokig, de az időoperátorok pontos értelmezése új távlatokat nyithat, különösen a makroökonómiai elméletekben. Erre talán, a megfelelő pontosítások után, leginkább Prigogine *második idő* fogalma aspirálhat. Az eddigi statikus egyensúlyi referencia pontokat felváltják a dinamikus, időben változó *sztochasztikus egyensúlyi referencia függvények*, ami forradalmian új megvilágításba helyez számos társadalomtudományi, s főleg közgazdasági kérdést. Mindez a dinamikai rendszerek új vizsgálatát eredményezi, új fogalmak és definíciók jelennek meg, új elméletek váltják fel az eddigi stabilitás-, bifurkáció-, evolúció- stb. elméleteket.

## Hivatkozások

- [1] BARUCHA-REID, A. T.: *Elements of the theory of Markov processes and their applications*, New-York, McGraw-Hill, (1960).
- [2] BERTALANFFY, L.: *General system theory*. New-York: George Braziller, (1968).
- [3] BRÓDY ANDRÁS: „*Economics and Thermodynamics*”, in John von Neumann and Modern Economics, ed. by M. Dore, S. Chakravarty and R. Goodwin, Oxford, Clarendon Press, (1989).
- [4] CHANDRASEKHAR, S.: *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Reviews of Modern Physics, **15**(1), (1943), 1–89.

- [5] DEBREU, G.: *Excess Demand Functions*, Journal of Mathematical Economics, **1**, (1972), 15–23.
- [6] DIRAC, P. A. M.: *A New Notation for Quantum Mechanics*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **35**:416., (1939).
- [7] DIRAC, P. A. M.: *The principles of quantum mechanics*, 4th ed. Oxford: Clarendon, (1958).
- [8] EINSTEIN, A.: *On the movement of small particles suspended in stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat*, Ann.d. Physik **17**, (1905) (In Investigations of the theory of Brownian movement, ed. R. Fürth, Dover, New York, 1956)
- [9] EINSTEIN, A., LORENTZ, H. A., WEYL, H., ÉS MINKOWSKI, H.: *The principle of relativity*, London: Methuen (Dover ed.), (1923).
- [10] GEORGESCU-ROEGEN, N.: *The Entropy Law and the Economic Process*, University of Alabama, Distinguished Lecture Series No.1, (1971).
- [11] GIBBS, J. W.: *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Yale University Press, Reprinted (1981) by Ox Bow Press, Woodbridge, CO, (1902).
- [12] GLANSDORFF, P. ÉS PRIGOGINE, I.: *Thermodynamic theory of structure, stability, and fluctuations*, New-York, Wiley-Interscience, (1971).
- [13] GOODWIN, R. M.: „A growth cycle” in Feinstein, C. H. (ed.): *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge, Cambridge University Press, (1967).
- [14] HAWKING, S. W.: *Az idő rövid története*, Budapest, Talentum, (1998).
- [15] HAWKING, S. W. – R. PENROSE: *A tér és az idő természete*, Budapest, Talentum, (1999).
- [16] HIRSCH: *Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek*, Alkalmazott Matematikai Lapok, **14**, (1989), 171–232.
- [17] HOTELLING, H.: *The Economics of Exhaustible Resources*, Journal of Political Economy, Vol. **39**, (1931), 137–175.
- [18] KOLMOGOROV, A. N.: *On the conservation of conditionally periodic motions under small perturbation of the Hamiltonian*. Dokl. Akad. Nauk. SSR 98, (1954), 527–530.
- [19] KORNAI JÁNOS: *Antiequilibrium*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, (1971).
- [20] LAGRANGE, J. L.: *Théorie des fonctions analytiques*, Paris: Imprimerie de la République, (1976).
- [21] LOTKA, A. J.: *Elements of Mathematical Biology*, reprinted by Dover, 1956, New York, (1924).
- [22] LJAPUNOV: *The general problem of the stability of motion*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse **9**(2):27:474, (1908).
- [23] MANTEL, R. R.: *On the characterizations of aggregate excess demand*, Journal of Economic Theory, **7**, (1974), 348–353.
- [24] MARTINÁS KATALIN: *About Irreversibility in Economics*, Open Sys. & Information Dyn. **7**, (2000), 349–364.

- [25] MATOLCSI TAMÁS: *Ordinary Thermodynamics (Nonequilibrium homogeneous processes)*, Akadémia Kiadó, Budapest, (2004).
- [26] MÓCZÁR JÓZSEF, KRISZTIN TIBOR: *A Harrod-modell strukturális stabilitása*, Szigma, XXXVII. évf., 1-2. szám (2006), 1-31.
- [27] NEUMANN JÁNOS: „*A Model of General Economic Equilibrium.*” Translated into English by C. Morgenstern. Rev. Econ. Studies **13**:1-9 [VI, 3]), (1945).
- [28] NEUMANN JÁNOS: *A kvantummechanika matematikai alapjai*, Akadémiai Kiadó, Budapest, (1980/1932).
- [29] NICOLIS, G. ÉS PRIGOGINE, I.: *Self-organization in non-equilibrium systems*, New-York: Wiley, (1977)
- [30] PICARD. É.: *Traite d'analyse*, Paris: Gauthier-Villars, (1928).
- [31] PLANCK, M.: *Vorlesungen über Thermodynamik*, Leipzig, (1930).
- [32] POINCARÉ, H.: *Science and Hypothesis*, in The foundations of science, New-York: The Science Press, (1921).
- [33] PRIGOGINE, I.: *From Being to Becoming*, San Francisco, Freeman, (1980).
- [34] THOM, R.: *Structural stability and morphogenesis*. Reading, Massachusetts: Benjamin, (1975)
- [35] TURING, A. M.: *The chemical basis of morphogenesis*. Phil. Trans. Roy, Soc. London, Ser. B. **237**:37, (1952), 37-72.
- [36] SAMUELSON, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Mass, (1947).
- [37] SAMUELSON, P. A.: „*Economics and Thermodynamics: von Neumann's Problematic Conjecture*”, in Rational Interaction, ed. by R. Selten, Berlin, Springer-Verlag, (1992).
- [38] SHAFER, W., SONNENSCHNEIN, H.: „*Market demand and excess demand functions*”, in Handbook of Mathematical Economics, Vol. **2**, eds. K. J. Arrow - M. D. Intriligator, Amsterdam, North-Holland, (1982), 671-93.
- [39] SONNENSCHNEIN, H. F.: *Market Excess Demand Functions*, Econometrica, Vol. **40**, (1972), 549-563.
- [40] SONNENSCHNEIN, H. F.: *Do Walras' Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions?*, Journal of Economic Theory, Vol. **6**, No. **4**, (1973), 345-54.
- [41] VÁN PÉTER: *Bevezetés a nemegyensúlyi termodinamikába*, Egyetemi jegyzet, BMGE, Budapest, (2005)
- [42] ZALAI ERNŐ: *Matematikai közgazdaságtan*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, (2000)

*(Beérkezett: 2009. július 27.)*

MÓCZÁR JÓZSEF

Budapesti Corvinus Egyetem

Matematikai közgazdaságtan és Gazdaságelemzések Tanszék

jozsef.moczar@uni-corvinus.hu

THE NEWEST RESULTS OF PHYSICAL MATHEMATICS  
AS THE POSSIBLE INVESTIGATION TOOLS OF ECONOMICS

JÓZSEF MÓCZÁR

The aim of this paper is to outline the newest results of physics, i.e., the stochastic mathematical relations of relativity theory and quantum mechanics as well as irreversible dynamics which can be applied for some economic problems. For example, the correct interpretation of time operators using for the macroeconomic theories may provide a serious improvement in approach to the reality. The stochastic dynamic equilibrium reference functions will take over the role of recent static equilibrium reference points, which may also reveal some nonequilibrium questions of macroeconomics. The concepts and definitions of thermodynamics and biological evolution have been adopted in economics by Paul A. Samuelson, but he did not concern the newest results of quantum mechanics, e.g., the time operators. Now we do it. In addition, following Samuelson, we show that von Neumann growth model cannot be explained as a peculiar extension of thermodynamic irreversibility.