

BEJÁRÁSFÜGGETLEN SZEKVENCIÁLIS VÉKONYÍTÁS

KARDOS PÉTER, NÉMETH GÁBOR ÉS PALÁGYI KÁLMÁN

A váz mint régió-alapú alakjellemző szemléletesen definiált a préri-tűz hasonlattal: Az objektum határának minden pontját egyidejűleg meggyújtjuk és feltételezzük, hogy a tűz minden irányban egyenletes sebességgel terjed. Ekkor a vázat azon pontok alkotják, ahol az egymással versengő tűzfrontok találkoznak és kioltják egymást. A vékonyítás a tűzfront-terjedést modellezi diszkrét képtereken úgy, hogy a kapott vázközelítés topológiailag ekvivalens legyen a kiindulási objektummal. Az iteratív objektum-redukció egy lépésében csak az aktuális objektum határpontjai közül a törölhetőnek minősítetteket távolítjuk el. Az eljárás terminál, ha az objektumon már nincs több törölhető pont.

A szekvenciális vékonyító eljárások kontúrkövetést alkalmaznak: bejárják az objektumok határpontjait és egyenként törlik a törlési feltételüknek eleget tevőket. Az így kapott vázak általában érzékenyek a határpontok bejárási sorrendjére. A jelen cikkben bemutatunk egy olyan 2-dimenziós szekvenciális vékonyító algoritmust, amely független a bejárási stratégiától, vagyis ugyanazt az eredményt adja a határpontok tetszőleges sorrendben történő vizsgálata mellett. A javasolt eljárásra bizonyítjuk a bejárásfüggetlenség és topológia-megőrzés tulajdonságokat.

Kulcsszavak: váz, vékonyítás, digitális topológia, topológia-megőrzés, bejárás-függetlenség.

1. Bevezetés

A vázat (*skeleton*) Blum vezette be mint a *középtengely-transzformáció* (*Medial Axis Transform, MAT*) eredményét [3]. A középtengely-transzformáció az objektum valamennyi pontjára megkeresi a hozzá legközelebbre eső határpontot(ka)t. Ha az eljárás valamely belső pontra egynél több legközelebbi határpontot talál, akkor azt a vázhoz tartozónak, vázpontnak minősíti. A vázat Blum egy szemléletes hasonlattal, a *préritűz terjedésével* illusztrálta: Ha a vizsgált objektum határának minden pontját egyidejűleg meggyújtjuk és feltételezzük, hogy a tűzfrontok minden irányba egyenletes sebességgel terjednek, akkor a váz azokból a pontokból áll, ahol az objektum belsejében az egymással versengő tűzfrontok találkoznak, kioltják egymást.

A váz mint régió-alapú alakleíró jellemző az elmúlt évtizedekben egyre fontosabb lett, kulcseleme számos, a képfeldolgozás és az alakfelismerés területén felmerült probléma megoldására javasolt módszernek [4].

A vázkijelölés (vagyis a matematikai váz egy alkalmas közelítése digitális bináris képeken) leggyakrabban alkalmazott módszere a front-terjedést modellező iteratív objektum redukció, a *vékonyítás* (*thinning*) [14]. A tűzfrontok terjedése – természeténél fogva – párhuzamos folyamat, így a legtöbb javasolt vékonyító algoritmus párhuzamos [5, 10, 14], vagyis az eljárás egy fázisában egyidejűleg távolítja el az aktuális objektum valamennyi törölhetőnek minősített határpontját. A szekvenciális vékonyító algoritmusok a kontúrkövetés technikáját alkalmazzák és egyenként távolítják el a törlési szabályukat kielégítő határpontokat [1, 9, 10].

A vázkijelölő eljárásokkal szemben támasztott két fő követelmény a topológia és az alak megőrzése. A digitális topológiában fontos fogalom az *egyszerű pont* (*simple point*): egy objektumpont akkor és csakis akkor egyszerű, ha törlése topológia-megőrző redukció [8]. Az egyszerűség lokális tulajdonság, vagyis (az általánosan feltételezett topológiájú képeken) eldönthető a kérdéses pont 3×3 -as környezete alapján. Az alak-információ megőrzésére a vékonyító eljárások végpont-feltételeket használnak, vagyis a vonal-végpontok megőrzésével biztosítják azt, hogy egy tetszőleges, üreget nem tartalmazó objektum ne zsugorodjon össze egyetlen ponttá.

A párhuzamos vékonyító algoritmusok egyidejűleg több pontot törölnek, így nehéz a topológiai korrektség biztosítása és bizonyítása. Ráadásul a vékonyítás egy iterációs lépése nem oldható meg egyetlen, csupán a 3×3 -as lokális környezetet figyelő párhuzamos redukcióval [13]. A fentiek miatt a párhuzamos vékonyító algoritmusok vagy több fázisra, párhuzamos redukcióra bontanak fel egyetlen iterációs lépést (ahol az eredmény érzékeny a fázisok sorrendjére), vagy pedig a 3×3 -nál bővebb (általában nem szimmetrikus) környezettel adják meg a törölhető pontjaikat [5].

A szekvenciális vékonyító eljárások esetében a topológia-megőrzés könnyen garantálható, ha a törölhető pontok olyan egyszerű pontok, amelyek nem vonal-végpontok. Probléma viszont, hogy a javasolt eljárások vázközelítése függ a határpontok bejárési sorrendjétől. A jelen cikkben egy olyan algoritmust javasolunk, mely ugyanazt az eredményt adja a határpontok tetszőleges bejárása mellett. Tudomásunk szerint ilyen eljárást még nem közöltek, a javasolt eljárás az első szekvenciális bejárásfüggetlen vékonyító algoritmus. Megjegyezzük, hogy Ranwez és Soille [12], valamint Iwanowski és Soille [7] eljárásai csupán olyan bejárásfüggetlen zsugorító algoritmusok, melyek vékonyításra csak a végpontok előzetes kijelölésével tehetőek alkalmassá. Módszerünk hatékonyan implementálható és letisztult (számos algoritmusnál jóval kevesebb nemkívánatos ágat tartalmazó) vázat eredményez.

A cikk 2. fejezete ismerteti a digitális topológia legfontosabb fogalmait, a 3. fejezetben bemutatjuk a bejárásfüggetlenség garantálásában fontos kritikus pontpárokat és tulajdonságaikat. A javasolt algoritmus a 4. fejezetben található, melynek bejárásfüggetlenségét az 5. fejezetben bizonyítjuk. A 6. fejezetben néhány tesztképen bemutatjuk módszerünk eredményeit, összevetve azokat a közelmúltban közölt AK^2 algoritmus [2] által kivont vázakkal.

2. A digitális topológia alapfogalmai

Jelölje \mathbb{Z}^2 a 2-dimenziós sík egész koordinátájú pontjait, a továbbiakban pontokat. Legyen $x = (x_1, x_2)$ és $y = (y_1, y_2)$ két pont. A leggyakrabban használt *szomszédsági (adjacency)* relációkat az $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ (euklidészi) távolság segítségével adjuk meg. Az x és az y pontok *4-szomszédosak*, ha $\|x - y\| \leq 1$ és *8-szomszédosak*, ha $\|x - y\| \leq \sqrt{2}$. Jelölje $N_4(x)$ és $N_8(x)$ az x -szel 4-, illetve 8-szomszédos pontok halmazát, továbbá jelölje $N_4^*(x) = N_4(x) \setminus \{x\}$ és $N_8^*(x) = N_8(x) \setminus \{x\}$ a valódi 4-, illetve 8-szomszédokat.

A p pont *j -szomszédos* ($j = 4, 8$) a nem-üres $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ ponthalmazzal, ha van olyan $s \in S$, hogy $s \in N_j(p)$. A különböző pontokból álló $\langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle$ sorozat $n \geq 0$ hosszú *j -út* ($j = 4, 8$) az s_0 pontból s_n -be az S ponthalmazban, ha a sorozat minden pontja S -beli és minden i -re ($1 \leq i \leq n$) s_i és s_{i-1} j -szomszédosak. (Meggjegyezzük, hogy $\langle s_0 \rangle$ egy 0-hosszú j -út.) Az $s_1 \in S$ és az $s_2 \in S$ pontok *j -összefüggők* ($j = 4, 8$) az S ponthalmazban, ha létezik j -út s_1 és s_2 között S -ben. Az S ponthalmaz *j -összefüggő* ($j = 4, 8$) az S' ponthalmazban ($S' \supseteq S$), ha S bármely két pontja j -összefüggő S' -ben. Könnyű belátni, hogy a j -összefüggőségi reláció – vagyis a reflexív és szimmetrikus j -szomszédsági reláció tranzitív lezártja – ekvivalencia-reláció valamennyi j -re ($j = 4, 8$). A j -összefüggőségi reláció tehát egy osztályozását adja meg egy tetszőleges ponthalmaznak, ahol az ekvivalencia-osztályokat *j -összefüggő komponenseknek* vagy *j -komponenseknek* (*j -component*) nevezzük.

Egy 2-dimenziós $(8, 4)$ *bináris digitális kép* (a továbbiakban $(8, 4)$ kép, vagy egyszerűen kép) a $(\mathbb{Z}^2, 8, 4, \mathbf{B})$ rendezett négyessel írható le [8], ahol a \mathbb{Z}^2 a képpontok halmaza; a $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{Z}^2$ a fekete pontok halmaza, melynek pontjaihoz „1” értéket rendelünk; komplementere, a $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathbf{B}$ a „0” értékű fehér pontok halmaza; a fekete pontokra a 8-összefüggőség érvényes, míg a fehérekre a 4-összefüggőséget tétélezzük fel.

A 8-összefüggőségi ekvivalencia-relációval a fekete pontokat partíciónáljuk. Az egy ekvivalenciaosztályba eső fekete pontok halmazát az adott kép *fekete komponensének* vagy *objektumának* nevezzük. Hasonlóképpen: a 4-összefüggőségi reláció a fehér pontok halmazát *fehér komponensekre* bontja fel. Egy $(8, 4)$ kép véges, ha a fekete pontok halmaza véges. Véges képen egyetlen végtelen fehér komponens található, amit *háttérnek* (*background*) nevezünk. A véges fehér komponens neve *üreg* (*cavity*). Egy véges kép reprezentálható egy P (véges) bináris tömbbel (bitmátrixszal), ahol valamennyi tömbön kívüli képpont értéke „0”.

A $(\mathbb{Z}^2, 8, 4, \mathbf{B})$ képen a $p \in \mathbf{B}$ fekete pont *határpont* (*border-point*), ha 4-szomszédos legalább egy fehér ponttal, azaz: $N_4(p) \setminus \mathbf{B} \neq \emptyset$. Jelölje $B(p)$ a p pont fekete 8-szomszédainak számát, vagyis az $N_8^*(p) \cap \mathbf{B}$ halmaz számosságát. A $p \in \mathbf{B}$ fekete pont *izolált* (*isolated*), ha $B(p) = 0$.

A vonal-végpontokat megőrző vékonyító algoritmusok többféle végpont-kritériumot alkalmaznak. Az általunk javasolt eljárásnál az alábbi alkalmazzuk:

2.1. Definíció. [5] A $(\mathbb{Z}^2, 8, 4, \mathbf{B})$ képen a $p \in \mathbf{B}$ fekete pont akkor és csak akkor végpont, ha $B(p) = 1$, vagy 2.

Legyen $p \in \mathbf{B}$ a $(\mathbb{Z}^2, 8, 4, \mathbf{B})$ kép egy fekete pontja. Jelölje $C(p)$ a $(\mathbb{Z}^2, 8, 4, \mathbf{B} \cap N_8^*(p))$ (csak a p valódi fekete 8-szomszédjait tartalmazó) kép fekete komponenseinek számát. $C(p)$ egyszerűen meghatározható a Hilditch-féle keresztszám [6] segítségével:

$$X_H(p) = \sum_{i=1}^4 b_i,$$

ahol

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } p_{2i} = 0 \text{ és } (p_{(2i+1)} \bmod 8 = 1 \text{ vagy } p_{(2i+2)} \bmod 8 = 1) \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

ahol az $N_8(p)$ halmaz pontjait (mint Boole-változókat) az 1. ábra szerint indexeljük. Könnyen belátható, hogy tetszőleges p határpontra $C(p) = X_H(p)$.

p_1	p_2	p_3
p_8	p	p_4
p_7	p_6	p_5

1. ábra. $N_8(p)$ pontjainak indexelése. Megjegyezzük, hogy a 2-dimenziós merőleges képrácsot (\mathbb{Z}^2) itt és a további ábrákon is a vele duális négyzetmozaikkal [11] reprezentáljuk.

2.2. Definíció. A $(\mathbb{Z}^2, 8, 4, \mathbf{B})$ képen a $p \in \mathbf{B}$ egyszerű pont (*simple point*), ha p törlése nem változtatja meg a kép topológiáját (vagyis nem szakít szét objektumot, nem töröl teljesen egy objektumot, nem hoz létre új üreget és nem olvaszt össze üregeket sem egymással, sem pedig a háttérrel) [8].

A 2-dimenziós $(8, 4)$ képeken az egyszerűség lokális tulajdonság, mivel egy képen a p pont egyszerű volta eldönthető $N_8(p)$ ismeretében. Az egyszerűségre adott számos kritérium közül az alábbi alkalmazzuk:

2.1. TÉTEL. [8] A $(\mathbb{Z}^2, 8, 4, \mathbf{B})$ képen a $p \in \mathbf{B}$ fekete pont akkor és csakis akkor egyszerű, ha p határpont, nem izolált pont és $C(p) = 1$.

3. Kritikus párok és tulajdonságaik

A p és q két, egymással 4-szomszédos pontokra vezessük be az $N_8(p, q) = N_8(p) \cup N_8(q)$, valamint a $N_8^*(p, q) = N_8(p, q) \setminus \{p, q\}$ jelöléseket. A továbbiakban jelölje $C(p, q)$ a fekete 8-komponensek számát $N_8^*(p, q)$ ban. Ezenkívül a $p_1 - p_8$ jelöléseket fogjuk alkalmazni a p pont 3×3 -as környezetén belül levő pontokra, az 1. ábrán látható módon.

3.1. *Definíció.* Legyen p egy kép tetszőleges objektumpontja. A $\Gamma_i(p)$ függvényt ($i = 1, 2, 3, 4$) a következőképpen definiáljuk:

$$\Gamma_i(p) = p_{2i} \wedge (p_{(2i-2) \bmod 8} \vee p_{(2i-1)}) \wedge (p_{(2i+1) \bmod 8} \vee p_{(2i+2) \bmod 8})$$

3.2. *Definíció.* Legyenek p és q egymással 4-szomszédos határpontok egy képen. A $\{p, q\}$ halmazt kritikus párnak nevezzük, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- $C(p) = C(q) = 1$,
- $3 \leq B(p), B(q) \leq 6$,
- $C(p, q) = 2$.

Egy kritikus pár lehet vízszintes vagy függőleges aszerint, hogy elemei egy sorban vagy egy oszlopban helyezkednek el.

Ha egy $\{p, q\}$ kritikus párban $q \in \{p_2, p_8\}$, akkor azt mondjuk, hogy q a kritikus párban a kisebb indexű, p pedig a nagyobb indexű elem, $q \in \{p_4, p_6\}$ esetben pedig értelemszerűen ennek fordítottja érvényes.

3.1. TÉTEL. Legyenek p és q olyan egymással 4-szomszédos határpontok egy képen, melyekre érvényes, hogy:

- I. $C(p) = C(q) = 1$,
- II. $3 \leq B(p), B(q) \leq 6$.

Ekkor az alábbi állítások egymással ekvivalensek:

- (a) $\Gamma_i(p) = 1$.
- (b) $\{p, q\}$ kritikus pár.
- (c) Bármelyik $x \in \{p, q\}$ pont törlése után a megmaradó $y \in \{p, q\} \setminus \{x\}$ objektumpontra teljesül, hogy $C(y) = 2$.

Bizonyítás.

Elegendő $q = p_4$ ($i = 2$) esetet vizsgálni, mert a többi lehetséges szituációban a szimmetria miatt más jelölésekkel ugyan, de azonos módon történhet a bizonyítás. Három összefüggést bizonyítunk, melyek alapján következik a tételben megfogalmazott ekvivalencia.

(a) \Rightarrow (b). Tegyük fel először, hogy $\Gamma_2(p) = (p_2 \vee p_3) \wedge (p_5 \vee p_6) = 1$. Azt kell belátnunk, hogy $C(p, q) = 2$. Mivel $C(p) = C(q) = 1$, így a $C(p, q)$ érték megegyezik a $p_2, q_2, q_4, q_6, p_6, p_8, p_2$ sorozatban előforduló 1-0 átmenetek számával. A feltevésünk alapján $p_2 \vee q_2 = 1$ és $p_6 \vee q_6 = 1$ adódik, továbbá mivel p és q határpontok, ezért $\neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_8 = 1$, és $\neg q_2 \vee \neg q_4 \vee \neg q_6 = 1$. Az előbbi négy összefüggésből adódik, hogy a p_2, q_2, q_4, q_6 sorozat és a q_6, p_6, p_8, p_2 sorozat is tartalmaz egy-egy 1-0 átmenetet. Továbbá 2-nél több 1-0 átmenetet nem tartalmazhat a $p_2, q_2, q_4, q_6, p_6, p_8, p_2$ sorozat, mivel akkor sérülne a $C(p) = C(q) = 1$ tulajdonság. Az előbbiekből tehát következik, hogy $C(p, q) = 2$, vagyis $\{p, q\}$ kritikus pár.

(b) \Rightarrow (a). Indirekt módon igazoljuk. Induljunk ki abból a feltevésből, hogy $\{p, q\}$ olyan kritikus pár, melyre $p_2 = p_3 = q_2 = 0$. Ekkor szükségszerűen $p_6 = p_5 = q_6 = 1$ is fennáll, különben nem teljesülne a $C(p) = C(q) = 1$ vagy a $3 \leq B(p), 3 \leq B(q)$ kikötés. Viszont ilyenkor a q_4 és p_8 értékétől függetlenül a $p_2, q_2, q_4, q_6, p_6, p_8, p_2$ sorozat csak egy darab 1-0 átmenetet fog tartalmazni, ami azt jelentené, hogy $C(p, q) = 1$, vagyis $\{p, q\}$ nem kritikus pár. Ugyanerre az ellentmondásra jutunk a $p_6 = q_6 = 0$ feltevésből is. Tehát $\Gamma_2(p) = (p_2 \vee p_3) \wedge (p_5 \vee p_6) = 1$.

(a) \Leftrightarrow (c). Tegyük fel, hogy a $\{p, q\}$ halmaz kritikus pár. $C(p) = C(q) = X_H(p) = X_H(q) = 1$, így a Hilditch-féle keresztszám definícióját alkalmazva megállapítható, hogy a $q = p_4$ törlése után a $C(p) = X_H(p) = 2$, ill. $p = q_8$ törlése után a $C(q) = X_H(q) = 2$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $p_5 = 1$ vagy $p_6 = 1$, azaz $p_5 \vee p_6 = 1$, és $q_1 = p_2 = 1$ vagy $q_2 = p_3 = 1$, azaz $p_2 \vee p_3 = 1$. Összevonva tehát a két feltételt, (c) pontosan akkor teljesül, ha

$$\Gamma_2(p) = (p_2 \vee p_3) \wedge (p_5 \vee p_6) = 1$$

egyenlőség fennáll. □

Most tetszőleges p objektumpontra bevezetünk három kifejezést, melyeket felhasználunk a későbbi definíciókban. A harmadik képletnél feltételezzük, hogy $p_{j+8} = p_j$ ($1 \leq j \leq 8$):

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= (\neg p_4 \wedge p_8 \wedge ((p_1 \wedge p_7) \vee (p_2 \wedge p_6))) \vee (\neg p_6 \wedge p_2 \wedge ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge p_8))), \\ \beta(p) &= (\neg p_2 \wedge p_6 \wedge ((p_5 \wedge p_7) \vee (p_4 \wedge p_8))) \vee (\neg p_8 \wedge p_4 \wedge ((p_3 \wedge p_5) \vee (p_2 \wedge p_6))), \\ \gamma(p) &= \bigvee_{i=1}^4 (p_{2i} \wedge p_{2i+2} \wedge \neg p_{2i+1} \wedge \neg p_{2i+4} \wedge \neg p_{2i+5} \wedge \neg p_{2i+6}). \end{aligned}$$

3.3. Definíció. Egy kép p objektumpontját rendre α -pontnak, β -pontnak, γ -pontnak nevezzük, ha $\alpha(p) = 1$, $\neg\alpha(p) \wedge \beta(p) = 1$, $\gamma(p) = 1$.

Az α -, β -, γ -pontokat a 2. ábrán szemléltetjük.

A kritikus párokat kritikus α -párnak, β -párnak, ill. γ -párnak fogjuk nevezni, ha mindkét elemük α -, β -, ill. γ -pont, továbbá $\alpha\beta$ -, $\alpha\gamma$ -, ill. $\beta\gamma$ -párokról fogunk beszélni, ha bennük éppen a megjelölt 2-2 fajta pont szerepel.

3.1. SEGÉDTÉTEL. *Egyetlen objektumpont sem szerepelhet egynél több kritikus α -párban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\{p, q\}$ kritikus α -pár, ahol $q = p_4$ (3. ábra). A 3.1. tétel szerint:

$$(p_2 \vee q_2) \wedge (p_6 \vee q_6) = 1. \quad (1)$$

Mivel $p_4 = q = 1$, ezért a 3.3. definíció szerint:

$$\alpha(p) = \neg p_6 \wedge p_2 \wedge ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_8 \wedge p_4)) = \neg p_6 \wedge p_2 \wedge ((p_1 \wedge q_2) \vee p_8) = 1. \quad (2)$$

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>1</td><td>.</td><td>.</td></tr> <tr><td>1</td><td>p</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>.</td><td>.</td></tr> </table>	1	.	.	1	p	0	1	.	.	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>.</td><td>1</td><td>.</td></tr> <tr><td>1</td><td>p</td><td>0</td></tr> <tr><td>.</td><td>1</td><td>.</td></tr> </table>	.	1	.	1	p	0	.	1	.	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>.</td><td>p</td><td>.</td></tr> <tr><td>.</td><td>0</td><td>.</td></tr> </table>	1	1	1	.	p	.	.	0	.	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>.</td><td>1</td><td>.</td></tr> <tr><td>1</td><td>p</td><td>1</td></tr> <tr><td>.</td><td>0</td><td>.</td></tr> </table>	.	1	.	1	p	1	.	0	.
1	.	.																																					
1	p	0																																					
1	.	.																																					
.	1	.																																					
1	p	0																																					
.	1	.																																					
1	1	1																																					
.	p	.																																					
.	0	.																																					
.	1	.																																					
1	p	1																																					
.	0	.																																					
(a)	(b)	(c)	(d)																																				
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>x</td><td>y</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>p</td><td>1</td></tr> <tr><td>.</td><td>z</td><td>1</td></tr> </table>	x	y	1	0	p	1	.	z	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>.</td><td>1</td><td>.</td></tr> <tr><td>0</td><td>p</td><td>1</td></tr> <tr><td>.</td><td>1</td><td>.</td></tr> </table>	.	1	.	0	p	1	.	1	.	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>.</td></tr> <tr><td>y</td><td>p</td><td>z</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	x	0	.	y	p	z	1	1	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>.</td><td>0</td><td>.</td></tr> <tr><td>1</td><td>p</td><td>1</td></tr> <tr><td>.</td><td>1</td><td>.</td></tr> </table>	.	0	.	1	p	1	.	1	.
x	y	1																																					
0	p	1																																					
.	z	1																																					
.	1	.																																					
0	p	1																																					
.	1	.																																					
x	0	.																																					
y	p	z																																					
1	1	1																																					
.	0	.																																					
1	p	1																																					
.	1	.																																					
(e)	(f)	(g)	(h)																																				
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>.</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>p</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>.</td></tr> </table>	.	1	0	0	p	1	0	0	.	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>.</td></tr> <tr><td>0</td><td>p</td><td>1</td></tr> <tr><td>.</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	.	0	p	1	.	1	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>.</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>p</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>.</td></tr> </table>	.	0	0	1	p	0	0	1	.	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 30px; height: 30px;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>.</td></tr> <tr><td>1</td><td>p</td><td>0</td></tr> <tr><td>.</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	.	1	p	0	.	0	0
.	1	0																																					
0	p	1																																					
0	0	.																																					
0	0	.																																					
0	p	1																																					
.	1	0																																					
.	0	0																																					
1	p	0																																					
0	1	.																																					
0	1	.																																					
1	p	0																																					
.	0	0																																					
(i)	(j)	(k)	(l)																																				

2. ábra. Az (a)-(d) ábrákon az α -pontok, az (e)-(h) ábrákon a β -pontok, az (i)-(l) ábrákon pedig a γ -pontok konfigurációi láthatók. Az (e) és (g) konfigurációkban $x \wedge y = 0$ vagy $z = 1$ kell, hogy teljesüljön. A "." helyén állhat akár 0, akár 1.

(2) alapján $p_6=0$, ezután (1)-ből $q_6 = 1$ adódik, és mivel a 3.3. definíció szerint $\alpha(q) = 1$, következik, hogy

$$\neg q_4 \wedge q_2 = 1. \quad (3)$$

Legyen $r = p_2$. Könnyen látható, hogy $\alpha(r) = 1$ csak akkor teljesülhet, ha $\neg r_4 \vee \neg r_6 = 1$. De mivel $r_6 = p = 1$ és (3) szerint $r_4 = q_2 = 1$, ezért biztos, hogy p_2 nem lehet α -pont.

$r = p_8$ -re hasonlóan észrevehető, hogy ha p_8 α -pont, akkor $r_6 = p_7 = 0$. Viszont mivel $p_6 = 0$, így ekkor $\Gamma_2(r) = 0$ lenne, ezért a 3.1. tétel szerint $\{p, p_8\}$ nem alkothat kritikus α -párt. Ugyanígy belátható, hogy ha $r = q_2$ és r α -pont, akkor $\Gamma_3(r) = 0$, ezért $\{q, q_2\}$ nem alkothat kritikus α -párt.

Végül legyen $r = q_6$. Mivel fentebb már láttuk, hogy $q_4 = r_3 = 0$ és $p_6 = r_8 = 0$, ezért $\alpha(r) = 0$, így q_6 sem lehet α -pont.

Ezzel végigvizsgáltuk az összes lehetséges p -vel vagy q -val szomszédos objektumpontot, így ha $\{p, q\}$ vízszintes helyzetű α -pár, akkor valóban teljesül az állításunk. Függőleges α -pár esetén a segéd-tétel hasonló módon bizonyítható. \square

3.2. SEGÉDTÉTEL. *Egyetlen objektumpont sem szerepelhet egynél több kritikus β -párban.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha a β -pontok környezetét 180 fokkal elforgatjuk, akkor éppen α -pontokat kapunk. Ezért a bizonyítás (eltérő jelölésekkel) ugyanúgy végezhető, mint az előző állítás esetén. \square

p_1	p_2	q_2	q_3
p_8	p	q	q_4
p_7	p_6	q_6	q_5

3. ábra. A $\{p, q\}$ halmaz szomszédsága $q = p_4$ esetben.

3.3. SEGÉDTÉTEL. Legyen $\{p, q\}$ egy kritikus β -pár, $\{r, s\}$ pedig egy kritikus α -pár, ahol q nagyobb indexű p -nél, s pedig nagyobb indexű r -nél. Ha p -nek 4-szomszédja r , akkor a $\{p, r\}, \{q, s\}$ halmazok $\alpha\beta$ -párok.

Bizonyítás. Legyen $\{p, q\}$ kritikus β -pár. Ismét csak a 3. ábrán látható szituációt elemezzük, a többi eset a szimmetriák miatt erre visszavezethető. Akkor ismét fennáll az (1) összefüggés, továbbá a 3.3. definíció szerint:

$$\beta(q) = \neg q_2 \wedge q_6 \wedge ((q_5 \wedge q_7) \vee q_4) = 1.$$

Ebből $q_6 = 1$ adódik. Ha $r = p_2$ lenne, akkor s szükségszerűen csak kisebb indexű lehetne r -nél, de ez sértené a tételben szereplő kikötést. Tehát csak $r = p_6$ lehet. $r_4 = q_6 = 1$ miatt a következő összefüggés teljesül:

$$\alpha(r) = \neg r_6 \wedge r_2 \wedge ((r_1 \wedge r_3) \vee (r_4 \wedge r_8)) = \neg r_6 \wedge ((p_5 \wedge p_7) \vee p_8) = 1. \quad (4)$$

Ha $p_8 = 1$ lenne, akkor $p_2 = 0$ kellene, hogy teljesüljön, különben $\beta(p) = 0$ lenne, azaz p nem lenne β -pont, ami ellentmond az állításban megfogalmazott feltevésnek. Tehát $p_8 = 0$, így ebből és a (4) összefüggésből következik, hogy $p_5 \wedge p_7 = 1$. Az előbbiekből alapján $s = r_8$ esetén $s_4 = r = 1$, és $s_2 = 0$ miatt $\alpha(s) = 0$ lenne, ezért csak $s = r_4 = q_6$ lehet, és könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor valóban teljesül az $\alpha(s) = 1$ feltétel. Tehát a $\{p, r\}, \{q, s\}$ halmazok valóban $\alpha\beta$ -párok. \square

3.4. SEGÉDTÉTEL. Ha p kritikus pár eleme, akkor p csak α -, β -, vagy γ -pont lehet.

Bizonyítás. Csak arra az esetre adunk bizonyítást, amikor $\{p, p_4\}$ alkot kritikus párt, a többi szituáció ehhez hasonlóan vizsgálható. Ha $\{p, p_4\}$ kritikus pár, akkor

$$\Gamma_2(p) = (p_2 \vee p_3) \wedge (p_5 \vee p_6) = 1. \quad (5)$$

Tegyük fel, hogy p nem α -pont, és nem β -pont. Azt kell igazolnunk, hogy ekkor p γ -pont. A De Morgan-azonosságok alkalmazásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \neg\alpha(p) \wedge \neg\beta(p) &= \\ &= (p_4 \vee \neg p_8 \vee ((\neg p_1 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_6))) \wedge \\ &\quad (p_6 \vee \neg p_2 \vee ((\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_8))) \wedge \\ &\quad (p_2 \vee \neg p_6 \vee ((\neg p_5 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_8))) \wedge \\ &\quad (p_8 \vee \neg p_4 \vee ((\neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_6))) = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Mivel $p_4 = 1$, ezért $(p_8 \vee ((\neg p_3 \vee \neg p_5) \vee (\neg p_2 \vee \neg p_6))) = 1$. Ha $p_8 = 1$, akkor $p_2 \vee p_6 = 1$, különben $C(p) > 1$ lenne. $p_2 = p_6 = 1$ esetben p nem lenne határpont, így e két pont közül pontosan az egyiknek kell objektumpontnak lennie. Ekkor azonban a (6)-ben szereplő konjunkcióban a középső 2 tag valamelyikének 0 lesz az értéke, így viszont (6) nem teljesülhetne. Tehát $p_8 = 0$, és

$$(\neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_6) = 1. \quad (7)$$

(5)-ből és (7)-ből következik, hogy $(p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5 \wedge \neg p_6) \vee (\neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_5 \wedge p_6) = 1$.

$(p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5 \wedge \neg p_6) = 1$ esetben $p_7 = 0$, különben $C(p) > 1$ lenne. Ekkor tehát $(p_2 \wedge p_4 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_7 \wedge \neg p_8) = 1$.

$(\neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_5 \wedge p_6) = 1$ esetben $p_1 = 0$, különben $C(p) > 1$ állna fenn. Így ekkor $(p_4 \wedge p_6 \wedge \neg p_5 \wedge \neg p_8 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$.

Mindkét esetben megállapítható, hogy $\gamma(p) = 1$, tehát a 3.3. definíció szerint p γ -pont. \square

3.4. *Definíció.* p -t biztonságos γ -pontnak nevezzük, ha γ -pont, és

$$\gamma^*(p) = (\neg p_4 \wedge \neg p_5 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_1 \wedge p_8 \wedge p_2) \vee (\neg p_6 \wedge \neg p_7 \wedge \neg p_8 \wedge \neg p_3 \wedge p_2 \wedge p_4) = 1.$$

A biztonságos γ -pontokat a 4. ábra szemlélteti.

0	1	.	.	1	0
1	p	0	0	0	1
.	0	0	.	0	.
(a)			(b)		

4. ábra. Konfigurációk, ahol p biztonságos γ -pont.

3.5. *SEGÉDTÉTEL.* *Kritikus γ -párban pontosan az egyik pont biztonságos γ -pont.*

Bizonyítás. Ha $\{p, q\}$ kritikus párban p biztonságos γ -pont, akkor $\gamma^*(p) = 1$. Egyszerűen belátható, hogy $\gamma(q) = 1$ csak úgy teljesülhet, ha

$$(\neg q_1 \wedge \neg q_2 \wedge \neg q_8 \wedge \neg q_5 \wedge q_4 \wedge q_6) \vee (\neg q_2 \wedge \neg q_3 \wedge \neg q_4 \wedge \neg q_7 \wedge q_6 \wedge q_8) = 1,$$

azaz ha $\gamma(q)^* = 0$. A $\gamma^*(p) = 0$ esetben is hasonlóan következtethetünk $\gamma^*(q) = 1$ -re. \square

4. A javasolt algoritmus

Az ismertetésre kerülő algoritmusunkban a bemeneti képet tároló P képmátrix mellett egy azzal megegyező méretű M segédmátrixot is bevezetünk abból a célból, hogy tároljuk a törölt vagy a törlésre esélyes képpontokat. A $p \in P$ és az $m \in M$ egymással megegyező indexű pontokra bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\neg N_4^*(p) = \{\neg p_2, \neg p_4, \neg p_6, \neg p_8\},$$

$$N_4^*(p) \wedge N_4^*(m) = \{p_2 \wedge m_2, p_4 \wedge m_4, p_6 \wedge m_6, p_8 \wedge m_8\}.$$

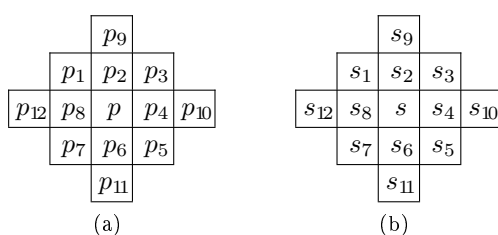
A H képpontokat tartalmazó halmazra jelölje $|H|$ a H -ban levő 1 értékű pontok számát.

Az algoritmusunk hatékonysága érdekében a két képmátrix (P és M) mellett két halmazt, R -t és Q -t is használunk, amelyekbe kigyűjtjük a számunkra érdekes képpontokat. Mivel nincs szükségünk bonyolultabb halmazműveletekre, így az R és a Q segédhalmazokat egy-egy láncolt listában is tárolhatjuk.

A javasolt algoritmus az iteratív objektum redukció előtt inicializálja az R halmazt és az M segédmátrixot. Az R halmazba bekerülnek a P -ben tárolt vékonyítandó kép objektumpontjai, az M segédmátrixnak pedig minden elemét 0-ra állítjuk.

A vékonyító eljárás egy iterációs lépése két menetből áll. Az első menetben megvizsgáljuk az R halmazban tárolt objektumpontokat. Ha találunk R -ben olyan nem izolált objektumpontot, amely megjelölt (1-re állított) M -ben, akkor azt már ebben a menetben törölhetjük. Ha pedig a vizsgált képpont határpont az aktuális P képen, de M -ben nincs megjelölve, akkor berakjuk őt a Q halmazba. Az első menet végén M minden elemét 0-ra állítjuk.

Az iterációs lépések második menetében sorra megvizsgáljuk a Q halmaz pontjait. Bevezetjük a p képpontra a 8-szomszédságnál bővebb, (p -n kívül) 12 pontot tartalmazó környezetet, ahol a p_i ($9 \leq i \leq 12$) pontok az 5(a). ábra szerint helyezkednek el. A második menetben a vizsgált pontok ezen bővebb környezetét vesszük figyelembe a P és az M mátrixokban. Szükségünk van még az s (Boole) változóra és a 12-elemű $S = (s_1, s_2, \dots, s_{12})$ bitvektorra, ahol $s = p \vee m$ és $s_i = p_i \vee m_i$ ($1 \leq i \leq 12$), vagyis s a vizsgált p képpont és a vele megegyező indexű M -beli pont



5. ábra. A p pont 12 elemű környezete P -ben, valamint az s pont és vizsgálandó S környezete.

összevagyoltja, S pedig p és m 12-elemű környezeteinek összevagyolásával kapható. S segítségével visszanyerhetjük p -nek az adott iteráció elején fennálló környezetét és eldönthetjük a vizsgált p képpont törölhetőségét. Az algoritmus pszeudo-kódjában szereplő $C(s)$, $B(s)$, $\Gamma_j(s)$ ($1 \leq j \leq 4$) jelölések az S -ben tárolt környezetnek (5(b). ábra) megfelelően értelmezendők.

A fenti jelölések segítségével az alábbiakban megadjuk a javasolt algoritmusunk pszeudo-kódját:

Input: a kiindulási bináris képet tároló P bitmátrix.

Output: a P képmátrix, amelyben a vázat tartalmazó bináris kép alakul ki.

Segédváltozók:

a Q és az R halmazok,

az M bitmátrix (melynek mérete megegyezik a P képmátrixéval),

az $S = (s_1, s_2, \dots, s_{12})$ bitvektor.

Inicializálás:

$R := \emptyset$

$Q := \emptyset$

for minden $p \in P$ elemre **do**

if $p = 1$ **then**

$R := R \cup \{p\}$

for minden $m \in M$ elemre **do**

$m := 0$

repeat

 1. *menet:*

for minden $p \in R$ képpontra **do**

 Legyen m a p -vel megegyező indexű pont M -ben.

if $B(p) > 0$ **and** $m = 1$ **then**

$p := 0$

$R := R \setminus \{p\}$

else if $0 < |N_4^*(p) \cap \neg N_4^*(m)| < 4$ **then**

$Q := Q \cup \{p\}$

$m := 0$

 2. *menet:*

for minden $p \in Q$ képpontra **do**

$Q := Q \setminus \{p\}$

 Legyen m a p -vel megegyező indexű pont M -ben.

$s := p \vee m$

if $s = 1$ **then**

for $i = 1, 2, \dots, 12$ **do**

$s_i := p_i \vee m_i$

if $C(p) = 1$ **and** $C(s) = 1$ **and** $3 \leq B(s) \leq 6$ **and**
 $\neg\gamma(s) \vee \gamma^*(s) = 1$ **then**
if teljesül az $F_1(s) - F_6(s)$ feltételek valamelyike **then**
 $p := 0$
 $R := R \setminus \{p\}$
 $m := 1$
for $i = 1, 2, 3, 4$ **do**
 $m_{2i} := m_{2i} \wedge \neg\Gamma_i(s)$
else
 $m := \neg\gamma(s) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^4 (p_{2i} \vee \neg m_{2i} \vee \neg\Gamma_i(s)) \right)$

until nem történt változás

Az $F_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) feltételeket a következő formulák és a 6. ábra maszkjai segítségével adjuk meg:

$F_1(s)$: S illeszkedik a 6(a)-6(b) ábrákon feltüntetett maszkok egyikére, ahol

$$\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) = 1.$$

$F_2(s)$: S illeszkedik a 6(c)-6(d) ábrákon feltüntetett maszkok egyikére, ahol

$$\begin{aligned} &\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_5) \wedge \neg(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_5) \wedge \neg(x_2 \wedge \neg x_3) \wedge \\ &\wedge \neg(\neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_6) \wedge \neg(x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_6) = 1. \end{aligned}$$

$F_3(s)$: S illeszkedik a 6(e) ábrán szereplő maszkra, ahol

$$\neg(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_5) = 1.$$

$F_4(s)$: S illeszkedik a 6(f)-6(g) ábrákon levő maszkok valamelyikére, ahol

$$\neg(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_5) \wedge \neg(x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_5) = 1.$$

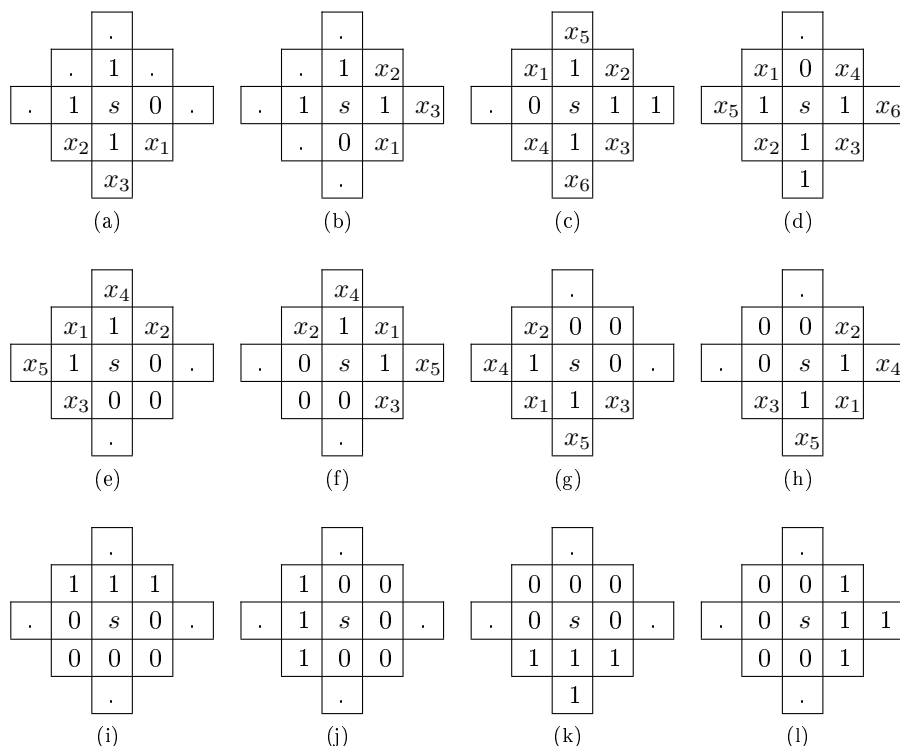
$F_5(s)$: S illeszkedik a 6(h) ábrán feltüntetett maszkra, ahol

$$\begin{aligned} &\neg(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_4) \wedge \\ &\wedge \neg(\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_5) \wedge \neg(x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_5) = 1, \end{aligned}$$

és

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \neq (1, 0, 0, 0, 0).$$

$F_6(s)$: S illeszkedik a 6(i)-6(l) ábrákon feltüntetett maszkok egyikére.



6. ábra. Az $F_1(s) - F_6(s)$ feltételekhez tartozó törlőmaszkok, ahol $s = p \vee m = 1$. Ha a maszk változót is tartalmaz, akkor az illeszkedéshez a feltételekben megadott logikai kifejezéseknek is teljesülniük kell. A "." ("don't care") maszkpozíciók fekete és fehér pontokra egyaránt illeszkednek.

5. Az algoritmus tulajdonságainak igazolása

Az alábbiakban igazolni fogjuk, hogy az ismertett algoritmusunk bejárásfüggetlen, topológia-megőrző, és bizonyos értelemben maximálisan vékonyít (utóbbinál az egyértelműség végett előbb definiálni fogjuk, hogy mit értünk maximálisan vékonyító algoritmuson). Előzetesen bevezetjük az ideális pontok fogalmát, melyekkel kapcsolatosan felírhatók bizonyos összefüggések a kritikus párokra, ill. az algoritmusunkra vonatkozóan. Ezeket felhasználjuk az említett tulajdonságok bizonyításánál.

5.1. Definíció. A p objektumpontot megmaradó sarokpontnak nevezzük, ha p illeszkedik a 7. ábrán levő maszkra.

5.2. *Definíció.* Egy p képpontot ideális pontnak nevezünk, ha az teljesíti a következő feltételeket:

- $3 \leq B(p) \leq 6$,
- $C(p) = 1$,
- teljesül az alábbi $G_1(p) - G_4(p)$ kritériumok egyike.

$G_1(p)$: p nem eleme kritikus párnak, és nem megmaradó sarokpont.

$G_2(p)$: p olyan α -pont, amely nem egy kritikus α -pár kisebb indexű tagja.

$G_3(p)$: p olyan β -pont, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

- i)* ha p egy β -párnak nagyobb indexű eleme, akkor ezen párba tartozó másik pont egy $\alpha\beta$ -párnak is eleme.
- ii)* ha p egy $\alpha\beta$ -párnak is eleme, akkor ezen párnak α -pontja egyben egy α -párnak kisebb indexű eleme.

$G_4(p)$: p olyan biztonságos γ -pont, amely sem $\alpha\gamma$ -párnak, sem pedig $\beta\gamma$ -párnak nem eleme.

0	0	0	0
0	p	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

7. ábra. A megmaradó p sarokpont környezete. (p egy izolált 2×2 -es "négyzet" bal felső eleme.)

5.1. SEGÉDTÉTEL. *Nincs olyan kritikus pár egy képen, melynek mindkét eleme ideális pont.*

Bizonyítás. Legyen $\{p, q\}$ kritikus pár, melyben p kisebb indexű q -nál. Ha $\{p, q\}$ α -pár, akkor nyilván p nem ideális pont, mivel $G_2(p)$ nem teljesül.

Tegyük fel, hogy $\{p, q\}$ β -pár, és teljesül $G_3(p)$. A 3.2. segédtétel alapján q nem lehet egy további kritikus β -párnak is az eleme, így $G_3(q)$ *i)* részfeltétele csak úgy teljesülhet, ha p eleme egy $\{p, r\}$ kritikus $\alpha\beta$ -párnak is. $G_3(p)$ szerint viszont ekkor kell, hogy legyen olyan $\{r, s\}$ kritikus α -pár, amelyben r kisebb indexű s -nél. A 3.3. segédtételből pedig így az következne, hogy $\{q, s\}$ is egy kritikus $\alpha\beta$ -pár, emiatt nem teljesülne $G_3(q)$ *ii)* részfeltétele, így q nem lehet ideális pont. Ha pedig abból indulunk ki, hogy $G_3(q)$ teljesül, akkor az előbbi esethez hasonlóan, a 3.3. segédtétel felhasználásával következtethetünk arra, hogy p nem ideális pont.

Most tegyük fel, hogy $\{p, q\}$ $\alpha\beta$ -pár. Ha p az α -pont, és $G_2(p)$ teljesül, akkor $G_3(q)$ nyilván nem teljesülhet a *ii*) feltétel megsértése miatt. Ugyanígy, ha q az α -pont, és $G_2(q)$ teljesül, akkor $G_3(p)$ nem teljesülhet. Tehát ekkor sem lehet mindkét pont ideális.

Végül ha p biztonságos γ -pont, és q nem γ -pont, akkor a 3.4. segédttétel szerint $G_4(p)$ nem teljesül, ha pedig q γ -pont, akkor a 3.5. segédttétel szerint q nem biztonságos γ -pont, így q nem lehet ideális pont. Ehhez hasonlóan belátható az is, hogy ha q biztonságos γ -pont, akkor p nem ideális pont. \square

5.2. SEGÉDTÉTEL. *Ha p α -pont vagy β -pont, de nem ideális pont, akkor p eleme egy olyan $\{p, q\}$ kritikus párnak, amelyben q ideális pont.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy p nem ideális pont. Ha p α -pont, akkor mivel $G_2(p)$ nem teljesül, ezért p biztosan kisebb indexű eleme egy $\{p, q\}$ kritikus α -párnak, tehát a 3.1. segédttétel szerint $G_2(q)$ teljesül, azaz q ideális pont.

Ha p β -pont, akkor mivel $G_3(p)$ nem teljesül, ezért vagy *i*), vagy *ii*) feltétel nem teljesül. Előbbi esetben p egy $\{p, q\}$ β -párnak nagyobb indexű eleme, amelyben q nem eleme $\alpha\beta$ -párnak, vagyis a 3.2. segédttétel szerint teljesül $G_3(q)$. *ii*) feltétel sérülése esetén p egy $\{p, q\}$ $\alpha\beta$ -párnak eleme, amelyben q vagy nem eleme α -párnak, vagy egy ilyen párban a nagyobb indexű elemként szerepel. Következésképpen teljesül $G_2(q)$, azaz q ezúttal is ideális pont. \square

A következő állítás igazolásához bevezetjük a $P' = P \vee M$ mátrixot

$$(P'(x, y) = P(x, y) \vee M(x, y), \text{ minden } (x, y) \text{ képpontra}).$$

A $p' \in P'$ pont indexe azonos lesz a $p \in P$ és az $m \in M$ ponttal. Mivel adott $p \in P$ esetén az algoritmusban használt S vektor elemei megegyeznek p' 12 elemű környezetének elemeivel, ezért az $s = p \vee m$ jelölést a továbbiakban p' -vel fogjuk helyettesíteni. Így az $F_1(p') - F_6(p')$ feltételek is hasonlóan értelmezendők p' környezetére, mint az algoritmus leírásában definiált $F_1(s) - F_6(s)$ feltételek.

5.1. TÉTEL. *A javasolt algoritmus akkor és csak akkor törli a p képpontot, ha valamely iterációjának elején p ideális pont.*

Bizonyítás. Ha $C(p) \neq 1$, vagy $C(p') \neq 1$, vagy $B(p') < 3$, vagy $B(p') > 6$, vagy $\neg\gamma^*(p') \wedge \gamma(p) = 1$, akkor nyilván p nem lenne ideális pont, és az algoritmus sem törölné azt. Ezért csak olyan p pontokat kell vizsgálnunk, amelyek meglátogatásakor $C(p) = 1$, $C(p') = 1$, $3 \leq B(p') \leq 6$, és $\gamma^*(p') \vee \neg\gamma(p') = 1$.

Tegyük fel először, hogy p -t törli az algoritmus valamely iteráció 2. menetében.

Ha p' α -pont, akkor az $F_1(p')$, $F_3(p')$, $F_4(p')$, $F_6(p')$ feltételek valamelyike kell, hogy teljesüljön, ugyanis az ezekben említett maszkokra történő illeszkedés esetén teljesülhet az $\alpha(p') = 1$ egyenlőség. Vegyük észre, hogy $F_1(p')$ -ben az $\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$, míg $F_4(p')$ -ben a $\neg(x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_5)$ kifejezések értéke pontosan akkor 0, ha p' egy kritikus α -pár kisebb indexű eleme. Viszont ha az $F_1(p')$ -ben

feltüntetett egyenlőség teljesül, akkor nyilván az előbbi kifejezések értéke is 1, így ekkor p' csak nagyobb indexű elem lehet egy ilyen párban. Továbbá ha p' a 6(e), 6(i), 6(j) ábrákon levő maszkok valamelyikére illeszkedik, akkor a maszkon levő helyzete alapján szintén biztos, hogy az nem lesz kisebb indexű elem egy kritikus α -párban. Tehát $F_1(p')$, $F_3(p')$, $F_4(p')$, $F_6(p')$ feltételek egyikének teljesülésekor a p' α -pont ideális pont lesz, mivel teljesül rá $G_1(p')$ vagy $G_2(p')$.

Most induljunk ki abból, hogy p' β -pont. Ekkor az $F_2(p')$, $F_4(p')$, $F_5(p')$, $F_6(p')$ feltételek valamelyike kell, hogy teljesüljön, mivel csak a 6(c), 6(d), 6(f), 6(g), 6(h), 6(k), 6(l) ábrák maszkjainak egyikére illeszkedő p' -re teljesülhet $\beta(p')$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $F_2(p')$, $F_4(p')$, $F_5(p')$ -n belüli konjunkciókban a zárójeles tagok negációjának értéke pontosan akkor 0, ha p' -ről elmondható, hogy egy kritikus β -pár nagyobb indexű eleme, vagy egy kritikus $\alpha\beta$ -párnak eleme. Ha pedig p' környezete a 6(k), 6(l) ábrák egyikének felel meg, akkor biztos, hogy p' nem eleme kritikus párnak. Következik tehát, hogy a p' β -pontra $G_1(p')$ vagy $G_3(p')$ teljesül, azaz p' ideális pont.

Most tekintsük azt az esetet, amikor p' γ -pont. Ekkor p' a 6(e)–6(h) ábrákon levő valamely maszkra illeszkedhet, vagyis $F_3(p')$, $F_4(p')$, $F_5(p')$ feltételek egyike kell, hogy teljesüljön. Ez esetben megfigyelhető, hogy a felsorolt feltételekhez tartozó konjunkcióban a zárójeles tagok negációjának értéke pontosan akkor 0, ha p' kritikus párt alkot egy α -ponttal vagy egy β -ponttal. Az is nyilvánvaló, hogy p' biztonságos γ -pont, különben nem teljesülne a $\neg\gamma(p') \vee \gamma^*(p') = 1$ feltétel. Ebből már következik, hogy a p' γ -pontra $G_1(p')$ vagy $G_4(p')$ teljesül, vagyis p' ekkor is ideális pont.

Az előbbieket alapján az is elmondható, hogy ha az említett konjunkciókban egyik zárójeles tag negációja sem 0 értékű, akkor p' vagy nem eleme kritikus párnak, vagy biztonságos γ -pont, amely nem eleme kritikus $\alpha\gamma$ -, ill. $\beta\gamma$ -párnak. Továbbá ha p' szomszédsága megfelel a 6(h) ábrának, akkor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \neq (1, 0, 0, 0, 0)$ miatt p' nem megmaradó sarokpont (a többi maszkon pedig egyértelműen látható, hogy azok biztosan nem egy megmaradó sarokpont környezetét mutatják).

A fentiekből megállapítható tehát, hogy a törlési feltételek teljesülésekor p' biztosan ideális pont, azaz p ideális pont volt az iteráció elején. Most tegyük fel, hogy az említett törlési feltételek nem teljesülnek, de p eleme egy tetszőleges $\{p, q\}$ kritikus párnak, és p törlésre kerül a következő iteráció 1. menetében. Vegyük észre, hogy a

$$\neg\gamma(p') \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^4 (p_{2i} \vee \neg m_{2i} \vee \neg\Gamma_i(p')) \right)$$

kifejezés értéke pontosan akkor 1, ha p' nem γ -pont és p -nek az iteráció elején nem volt olyan 4-szomszédja, amely már korábban törlésre került és kritikus párt alkotott p -vel. Ezért ha q -t p előtt látogatnánk meg, és q -t törölnénk, akkor $m = 0$ maradna, ha pedig q -t p után vizsgálnánk meg, és úgy törölnénk, akkor az $m_{2i} := m_{2i} \wedge \neg\Gamma_i(p')$ értékadások miatt lenne újból $m = 0$. Így viszont mindkét esetben ellentmondásra jutnánk abból a feltevésből, hogy p törlésre kerül,

hiszen a következő iteráció 1. menetében pontosan azon pontokat törli az algoritmus, amelyek M -beli segédértéke 1. Tehát q -t nem törölhettük az adott iterációban, vagyis a q -val megegyező indexű $q' \in P \vee M$ -re $F_1(q') - F_6(q')$ sem teljesül. Könnyen belátható, hogy ha p α -pont lett volna, akkor a 2. menetben teljesültek volna rá a törlési feltételek, de ezúttal ez nem lehetséges. Emellett a fentebb említett kifejezésben szereplő $\neg\gamma(p')$ feltétel miatt p γ -pont sem lehetett, tehát a 3.4. segédétel szerint p β -pont kellett, hogy legyen. Ha q α -pont, akkor egy kritikus α -párban kellett, hogy szerepeljen a kisebb indexű elem helyén, különben teljesült volna $F_1(q')$, $F_3(q')$, $F_4(q')$, $F_6(q')$ valamelyike. Ha q β -pont, akkor pedig kritikus $\alpha\beta$ -párnak eleme, vagy egy kritikus β -párban a nagyobb indexű elem kellett, hogy legyen, különben $F_2(q')$, $F_4(q')$, $F_5(q')$, $F_6(q')$ közül teljesült volna az egyik. Ebből következik, hogy $G_3(p)$ teljesült az iteráció elején, tehát p ebben az esetben is ideális pont volt.

Ha p nem teljesíti a törlési feltételeket, és nem eleme kritikus párnak, de törlésre kerül a következő iteráció 1. menetében, akkor ez csak úgy lehetséges, hogy p' környezete a 6(h) ábra maszkjának felelt meg. Ekkor

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 0, 0, 0)$$

állt fenn. Mivel az 1. menetben p meglátogatásakor $B(p) > 0$ teljesült, ezért könnyen ellenőrizhető, hogy p' nem lehetett megmaradó sarokpont az előző iterációban. Ellenkező esetben ugyanis annak bármely 1 értékű $x \in P \vee M$ szomszédjára teljesült volna az $F_3(x) - F_5(x)$ feltételek valamelyike, azaz $B(p) = 0$ adódott volna. Tehát ebben az esetben is ideális pontot töröl az algoritmus.

Végül tegyük fel, hogy p nem kerül törlésre. Akkor $F_1(p') - F_6(p')$ feltételek nem teljesülnek. Ha p a 6(h) ábra maszkjára illeszkedett úgy, hogy

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 0, 0, 0),$$

és a következő menetben p már nem törlődik, azaz $B(p) = 0$, akkor p biztosan megmaradó sarokpont volt, hiszen más esetben nem törlődött volna az összes p -vel szomszédos objektumpont. Így ekkor p nem lehetett ideális pont. Ha p nem volt megmaradó sarokpont, viszont eleme volt valamely $\{p, q\}$ kritikus párnak, akkor q törlésre kerül a 2. menet folyamán, különben az m értékével kapcsolatos fenti megállapításaink alapján $m = 1$ lenne az iteráció végére, és emiatt p a következő iteráció 1. menetében törlődne. Azt már beláttuk az előzőekben, hogy ha egy pontot töröl az algoritmus, akkor a törölt pont ideális pont volt, így esetünkben q is ideális pont kellett, hogy legyen. Továbbá mivel q p -vel kritikus párt alkotott, ezért az 5.1. segédétel szerint p nem lehetett ideális pont. \square

5.2. TÉTEL. *A javasolt algoritmus bejárásfüggetlen.*

Bizonyítás. Az 5.1. tétel szerint az 1. iterációban bejárasi sorrendtől függetlenül pontosan az ideális pontok fognak törlődni. Így a következő iterációra jellemző kiindulási kép is egyértelműen meghatározott, és ugyanez elmondható az összes

többi iteráció esetén is, tehát az algoritmus végén kapott kimeneti váz is egyértelmű, függetlenül attól, hogy milyen sorrendben járjuk be a pontokat. \square

5.3. Definíció. Legyen T egy vékonyító algoritmus, p a T kimeneti képmátrixában szereplő tetszőleges objektumpont, $X(p)$ pedig jelöljön egy p -re vonatkozó feltételt. Azt mondjuk, hogy T maximálisan vékonyít az $X(p)$ feltétel szerint, ha bármely bemenet esetén a T által előállított vázban nem szerepel olyan 2×2 -es négyzet alakú objektumrészlet, melyben valamelyik p pixel határpont és teljesül $X(p)$.

5.3. TÉTEL. *A javasolt algoritmus maximálisan vékonyít a $(C(p) = 1) \wedge (B(p) \leq 6)$ feltétel szerint.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy marad olyan 2×2 -es négyzet alakú objektumrészlet az algoritmusunk kimeneti képén, amelynek valamely p pontjára teljesül a $(C(p) = 1) \wedge (B(p) \leq 6)$ feltétel. Ezen egyik pont sem lehet ideális pont, különben az eljárás még nem állt volna meg az 5.1. tétel szerint. Ha az objektumrészletünk valamely pontja eleme kritikus párnak és nem γ -pont, akkor az 5.2. segédttétel alapján biztosan lenne még olyan pont, amely ideális, azaz törlésre kerülne, de akkor az előző esethez hasonlóan megint ellentmondásra jutnánk. Ha az objektumrészlet valamely pontja γ -pontként szerepelne egy kritikus párban, akkor pedig a kritikus pár másik eleme kell, hogy α -pont vagy β -pont legyen, különben lenne olyan p pont a kapott képen, amelyre $G_4(p)$ teljesül, vagyis p ideális pont lenne. Viszont ez az eset sem lehetséges az 5.2. segédttétel alapján, mivel akkor is kellene még lennie ideális pontnak a képen. Következésképpen a kimeneti képen nem szerepel kritikus pár. Az említett objektumrészletben valamely p -re $C(p) = 1$, és p nem eleme kritikus párnak. Egy ilyen p csak abban az esetben nem lesz ideális pont, ha megmaradó sarokpont, de ekkor könnyen látható, hogy ebben az objektumnegyresben a p -n kívüli három objektumpont mind ideális pont. Mivel minden lehetséges esetben azt kapjuk, hogy maradt még ideális pont a kimeneti képen, ezért ellentmondásra jutottunk a kezdeti feltevésből, így a tételt bebizonyítottuk. \square

5.4. TÉTEL. *A javasolt algoritmus topológia-megőrző.*

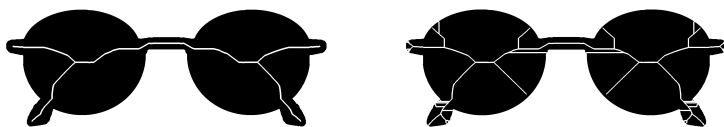
Bizonyítás. Az iterációk 2. menetében a 2.1. tétel alapján egyértelmű, hogy csak egyszerű pontokat törölünk. Ha az 1. menetben két egymással 4-szomszédos p , q pont kerül törlésre, akkor az 5.1. tétel szerint mindkettő ideális pont, így az 5.2. segédttétel szerint nem alkothattak kritikus párt az előző iteráció elején. Tehát akár p -t, akár q -t töröljük előbb, a 3.1. tétel alapján $C(p) = 1$ vagy $C(q) = 1$ teljesül a másodikként sorra kerülő pontra, ezért ekkor is csak egyszerű pontok kerülhetnek törlésre a 2.1. tételből adódóan.

A 2.2. definíció szerint tehát csak olyan pontokat töröl az algoritmus, amelyek nem változtatják meg a kép topológiáját. \square

6. Eredmények

A javasolt algoritmust számos bináris képre teszteltük és megállapíthattuk, hogy eljárásunk letisztult vázkijelölést eredményez. Módszerünk alkalmazhatóságát most hat tesztképen mutatjuk be (8–13. ábra). Eredményeinket összevetettük a közelmúltban közölt AK^2 algoritmus [2] által kivont vázakkal (8–13. ábra). A hat tesztképre a javasolt és az AK^2 algoritmus futási idejét az 1. táblázat foglalja össze.

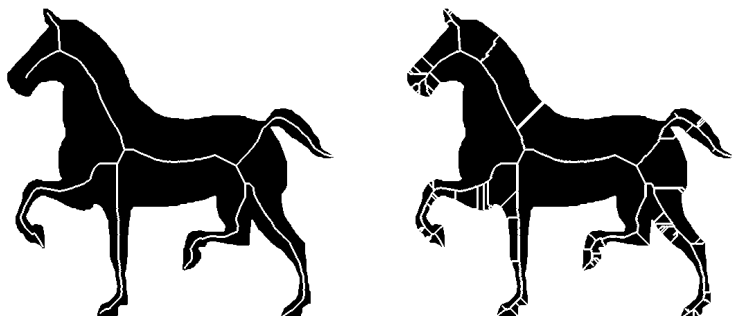
Módszerünk és az AK^2 algoritmus összevetése alapján megállapíthatjuk, hogy az igényelt iterációk számát tekintve nincs közöttük számottevő eltérés, de a javasolt algoritmus egyrészt jelentősen gyorsabb, másrészt pedig nem eredményez felesleges, zavaró vázágot (1. táblázat, 8–13. ábra). A két eljárás összevetésénél megemlíthető még, hogy az általunk javasolt maximálisan vékonyít (vagyis egy pont vastag vázat eredményez), míg az AK^2 algoritmus által produkált vázakban sűrűn előfordulnak két pont vastagságú vonalrészletek.



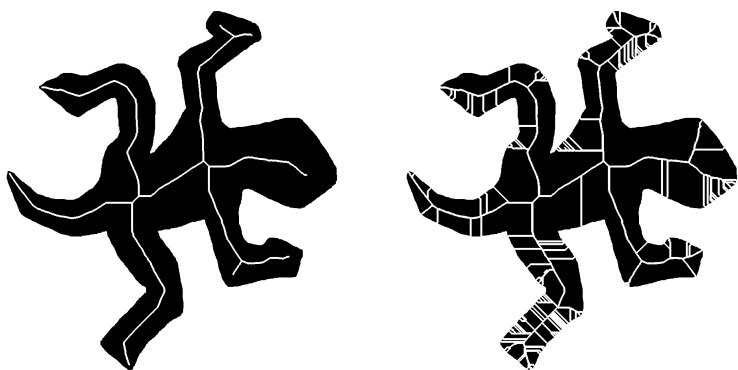
8. ábra. Eredmények egy 2110×880 méretű tesztképre. A javasolt algoritmus (bal) és az AK^2 eljárás (jobb) vázközelítésit rávetítettük a kiindulási képre.



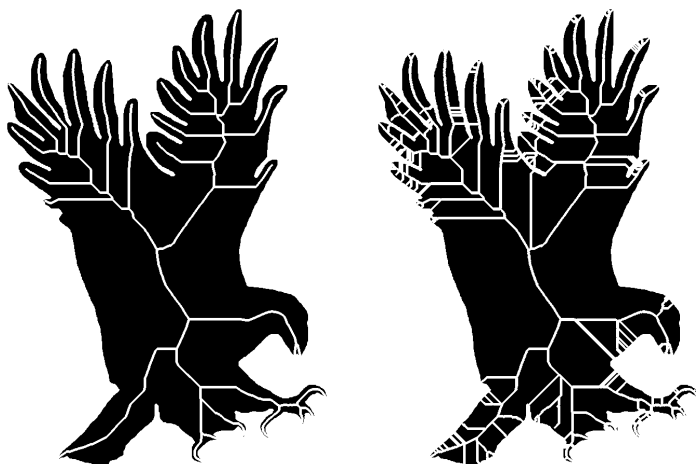
9. ábra. Eredmények egy 1000×1000 méretű tesztképre. A javasolt algoritmus (bal) és az AK^2 eljárás (jobb) vázközelítésit rávetítettük a kiindulási képre.



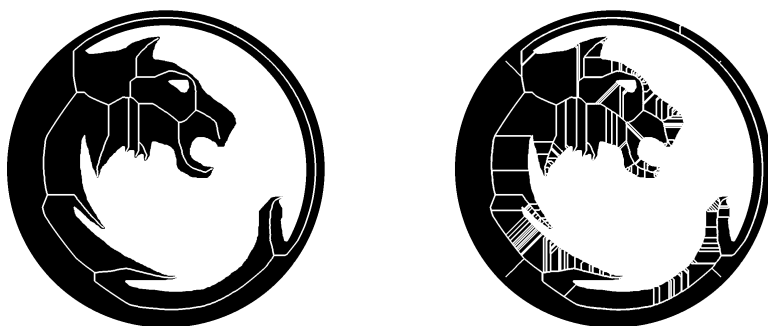
10. ábra. Eredmények egy 524×524 méretű tesztképre. A javasolt algoritmus (bal) és az AK^2 eljárás (jobb) vázközelítést rávetítettük a kiindulási képre.



11. ábra. Eredmények egy 992×1000 méretű tesztképre. A javasolt algoritmus (bal) és az AK^2 eljárás (jobb) vázközelítést rávetítettük a kiindulási képre.









12. ábra. Eredmények egy 644×906 méretű tesztképre. A javasolt algoritmus (bal) és az AK^2 eljárás (jobb) vázközelítést rávetítettük a kiindulási képre.



13. ábra. Eredmények egy 1004×1004 méretű tesztképre. A javasolt algoritmus (bal) és az AK^2 eljárás (jobb) vázközelítést rávetítettük a kiindulási képre.

1. táblázat. A javasolt és az AK^2 algoritmus futási idejének összehasonlítása hat tesztképre. Mindkettő eljárást kétprocesszoros Intel(R) Core(TM)2 6300 (1.86GHz) PC-n futtattuk.

Tesztkép	Képméret	Iterációszám		Futási idő (sec)	
		AK^2	Javasolt	AK^2	Javasolt
	2110 × 880	310	311	42.73	20.68
	1000 × 1000	173	174	11.82	4.25
	524 × 524	96	97	1.93	0.62
	922 × 1000	151	152	9.28	3.55
	644 × 906	179	180	7.5	4.18
	1004 × 1004	164	165	11.65	5.13

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Gilles Bertrand és Michel Couprie francia kutatóknak (Institut Gaspard-Monge, Laboratoire A2SI, Groupe ESIEE, Noisy-le-Grand), hogy rendelkezésre bocsátották az AK^2 algoritmusuk implementációját.

Hivatkozások

- [1] ARCELLI, C.: *Pattern thinning by contour tracking*, Computer Graphics and Image Processing **17**, (1981) 130–144.
- [2] BERTRAND, G., COUPRIE, M.: *New 2D parallel thinning algorithms based on critical kernels*, in Proc. 11th Int. Workshop Combinatorial Image Analysis, IWCIA 2006, Lecture Notes in Computer Science 4040, Eds. Flach, B., Eckardt U., Knauer, U., Polthier, K., Springer, (2006) 45–59.
- [3] BLUM, H.: *A transformation for extracting new descriptors of shape*, in Models for the Perception of Speech and Visual Form, Ed. Wathen-Dunn, W., MIT Press, Cambridge, (1967) 362–380.
- [4] GONZALES, R.C., WOODS, R.E.: *Digital Image Processing, 3rd Edition* (Prentice Hall, 2008).
- [5] HALL, R.W.: *Parallel connectivity-preserving thinning algorithm*, in Topological Algorithms for Digital Image Processing, Machine Intelligence and Pattern Recognition 19, Eds. Kong, T.Y., Rosenfeld, A.: North-Holland, (1996) 145–179.
- [6] HILDITCH, C.J.: *Linear skeletons from square cupboards*, in Machine Intell. Eds. Meltzer B., D. Michie, D., New York Amer. Elsevier, (1969) 403–420.
- [7] IWANOWSKI, M., SOILLE, P.: *Order independence in binary 2D homotopic thinning*, in Proc. 13th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGC I 2006, Lecture Notes in Computer Science 4245, Eds. Kuba, A., Nyúl, L., Palágyi, K. Springer, (2006) 592–604.
- [8] KONG, T.Y., ROSENFELD, A.: *Digital topology: Introduction and survey*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing **48**, (1989) 357–393.
- [9] KWOK, P.C.K.: *A thinning algorithm by contour generation*, Communications of the ACM **31**, (1988) 1314–1324.
- [10] LAM, L., LEE, S.-W., SUEN, C.Y.: *Thinning methodologies – A comprehensive survey*, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence **14**, (1992) 869–885.
- [11] MARCHAND-MAILLET, S., SHARAIHA, J.M.: *Binary Digital Image Processing. A Discrete Approach*, (Academic Press, 2000).
- [12] RANWEZ, V., SOILLE, P.: *Order independent homotopic thinning for binary and grey tone anchored skeletons*, Pattern Recognition Letters **23**, (2002) 687–702.
- [13] ROSENFELD, A.: *A characterization of parallel thinning algorithms*, Information and Control **29**, (1975) 286–291.
- [14] SUEN, C.Y., WANG, P.S.P., (EDS.): *Thinning Methodologies for Pattern Recognition*, Series in Machine Perception and Artificial Intelligence - Vol. 8 (World Scientific, 1994).

(Beérkezett: 2008. augusztus 8.)

Alkalmazott Matematikai Lapok (2010)

KARDOS PÉTER, NÉMETH GÁBOR ÉS PALÁGYI KÁLMÁN

Szegedi Tudományegyetem, Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszék
6720, Szeged, Árpád tér 2.

{pkardos, gnemeth, palagy}@inf.u-szeged.hu

ORDER-INDEPENDENT SEQUENTIAL THINNING

PÉTER KARDOS, GÁBOR NÉMETH AND KÁLMÁN PALÁGYI

Skeletons are region-based shape descriptors which summarize the general form of objects/shapes. An illustrative definition of the skeleton is given using the prairie-fire analogy: the object boundary is set on fire and the skeleton is formed by the loci where the fire fronts meet and extinguish each other. Thinning is a frequently used method for making an approximation to the skeleton in a topology-preserving way. It is based on a digital simulation of the fire front propagation: the border points of a binary object that satisfy certain topological and geometric constraints are deleted in iteration steps. The entire process is then repeated until only an approximation to the skeleton is left. Sequential thinning algorithms use boundary tracking and delete the actual border point if it satisfies the deletion condition. The skeletons produced by those algorithms generally depend on the applied traversing strategy. A new 2-dimensional sequential thinning algorithm is presented. It is topology-preserving and order independent (i.e., it produces the same skeleton for any traversing strategies).

Keywords: skeleton, thinning, digital topology, topology preservation, order independence.