Alkalmazott Matematikai Lapok **27** (2010), 175-188.

TERMÉSZETES VÍZFOLYÁSOK ÖNTÖZŐVÍZ KÉSZLETÉNEK MEGHATÁROZÁSÁT CÉLZÓ MATEMATIKAI MODELLEK

PRÉKOPA ANDRÁS, SZÁNTAI TAMÁS, ZSUFFA ISTVÁN

A dolgozat első két szakaszában a természetes vízfolyások vízhozam intenzitását vizsgáljuk valószínűségelméleti alapon. Megmutatjuk, hogy bizonyos, reális feltételek mellett ez a valószínűségeloszlás gamma típusú. A harmadik szakaszban a vízkivételi műtárgy optimális kapacitásának meghatározását célzó modellt fogalmazunk meg, midőn víztározásra nincs lehetőség, vagy azt nem szándékozunk igénybe venni. A negyedik szakaszban a modell egy optimális tározókapacitás meghatározását és az optimális vízhasznosítást célozza, miközben a vízigények nagy valószínűséggel való teljesítését előírjuk. Végül az utolsó, ötödik szakaszban az előbb említett, megbízhatósági feltételhez hozzávesszük még azt, hogy a vízigények legfeljebb adott számú napon nem teljesülnek és egy vízkivételi műtárgy kapacitásának a költségét minimalizáljuk.

1. Poisson-folyamat által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatok

A Poisson-típusú sztochasztikus folyamat gyakran előfordul a hidrológiában. Jelen esetben az esőzések időpontjainak egymásutánjáról tételezzük fel, hogy Poisson-folyamatot alkot. Ezen azt értjük, hogy ha $\xi(I)$ jelöli egy I időintervallumban történő esőzések (véletlen) számát, akkor

a) minden olyan $I_1, \ldots, I_n$ intervallumrendszer esetén, melyben bármely két intervallumnak nincs közös belső pontja, a $\xi(I_1), \ldots, \xi(I_n)$ valószínűségi változók függetlenek,

b) $\xi(I)$ Poisson-eloszlású $\lambda(I)$ paraméterrel, ahol $\lambda(I) \geq 0$.

Egy Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamat azt jelenti, hogy a Poisson-folyamat véletlen eseményeihez, az adott esetben az esőzési időpontokhoz tartozik egy véletlen másodlagos jelenség, az adott esetben ez egy véletlen árhullám. A másodlagos jelenségek eseményterét jelölje Y. Ebben értelmezve van egy vagy több valószínűségi mérték.

A másodlagos folyamatok tárgyalására igen alkalmas az ún. szorzattér módszer [3]. Ez abban áll, hogy a másodlagos folyamatot a (t, y) elempárok halmazában, másszóval a $T \times Y$ szorzattérben tekintjük, ahol T az időtengely egy részhalmaza, ennek eleme t. A másodlagos folyamat egy speciális lefutása, realizációja egy véletlen pontrendszert jelent a $T \times Y$ térben. Valóban, ha $\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$ alkotják a Poisson-típusú véletlen eseményfolyamatot és $\dots, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots$ a megfelelő másodlagos jelenségek sorozata, akkor a másodlagos folyamat adott realizációja jellemezhető a $T \times Y$ térbeli

$$\dots, (t_{-1}, y_{-1}), (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots$$

véletlen pontrendszerrel.

A másodlagos folyamatok szorzattérszerű elméletének alaptétele a következőt mondja ki [3].

Ha a Poisson-folyamat különböző eseményeihez tartozó másodlagos jelenségek Y térből való kiválasztása egymástól független és azonos eloszlású, μ valószínűségi mértékkel, akkor a $T \times Y$ térben elhelyezkedő véletlen pontrendszer szintén Poisson-típusú $\lambda \times \mu$ paraméter-mértékkel.

Ha a Poisson-folyamat különböző időpontokban bekövetkező eseményeihez tartozó másodlagos jelenségek függetlenek, de a t időpontban bekövetkezett eseményhez tartozó másodlagos jelenség valószínűségeloszlása függ a t-től, tehát az árhullám levonulása függ attól, hogy az árhullám kiváltása mely időpontban történt, akkor a μ mérték helyett μ_t mértékekről kell beszélnünk, és a szozattérbeli Poisson-típusú véletlen pontrendszer D halmazhoz tartozó paraméter-mértékét az alábbi integrál származtatja

$$\int_C \mu_t(D_t)\lambda(\mathrm{d}t), \tag{1}$$

ahol C a D halmaz vetülete a T halmazra és D_t pedig a D halmaz közös része a $T \times Y$ tér ama részhalmazával, melyen t állandó, vagyis $D_t = \{y \mid (t, y) \in D\}$.

A $T \times Y$ szorzattér D halmazába eső véletlen pontok számát $\eta(D)$ jelöli. Az (1) integrál tehát $E(\eta(D))$-vel egyenlő.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy μ_t független t-től.

A másodlagos folyamatok elméletének egy másfajta tárgyalása található a [10] dolgozatban.

2. Az öntözővízkészlet meghatározása a másodlagos folyamatok elméletére támaszkodó modell alapján

Az árhullám-intenzitás időbeli lefutását jellemezze egy $f(t, \kappa)$ függvény, ahol κ valószínűségi változó, esetleg valószínűségi vektorváltozó. Ennek egy lehetséges változata a következő

$$f(t, \kappa) = \kappa t^{\alpha-1} e^{-\beta t}, \qquad t \geq 0. \tag{2}$$

A t_i időpontban történt esőzés által kiváltott árhullám az

$$f(t - t_i, \kappa_i), \qquad t \geq t_i \tag{3}$$

függvénynek megfelelően vonul le, ahol a különböző i indexekhez tartozó κ_i valószínűségi változók függetlenek. A vízhozamintenzitást a (3) függvények szuperpozíciója, tehát a

$$\sum_{t_i \leq t} f(t - t_i, \kappa_i) = \eta_t$$

függvény írja le. Meghatározzuk az η_t valószínűségi változó eloszlását a (2) függvény esetében.

Alaptételünkből következik, hogy a t időpontban az (a, b) határok között futó intenzitásgörbék száma Poisson-eloszlást követ, melynek paraméterét az alábbi integrál adja meg

$$\int_{-\infty}^{t} P(a \leq \kappa(t - x)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-x)} \leq b) \lambda(\mathrm{d}x). \tag{4}$$

Erre vonatkozólag az $a = y$, $b = y + \mathrm{d}y$ esetben az alábbi eredményt kapjuk, feltételezve még, hogy $\lambda(\mathrm{d}x) = \lambda \, \mathrm{d}x$, ahol $\lambda \geq 0$ állandó:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{t} P(y \leq \kappa(t - x)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-x)} \leq y + \mathrm{d}y) \lambda \, \mathrm{d}x \\ &\quad = \int_{0}^{\infty} P(y \leq \kappa v^{\alpha-1} e^{-\beta v} \leq y + \mathrm{d}y) \lambda \, \mathrm{d}v \\ &\quad = \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left[1 - e^{-y\delta e^{\beta v} v^{1-\alpha}} \right] \mathrm{d}y \lambda \, \mathrm{d}v \\ &\quad = \lambda \int_{0}^{\infty} \delta e^{\beta v} v^{1-\alpha} e^{-y\delta e^{\beta v} v^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

ahol κ exponenciális eloszlású $1/\delta$ várható értékkel. Az exponenciális eloszlás feltételezése nem lényeges, más eloszlást is választhatunk.

A t időpontbeli vízhozamintenzitás eloszlásfüggvénye a következő módon kapható meg. Jelölje $\eta(I)$ a t időpontban az I intervallumban elhelyezkedő egyedi intenzitásgörbék számát. Ekkor az előbbiek szerint $\eta(I)$ Poisson-eloszlású (4) paraméterrel az $I = (a, b)$ esetben. Eszerint a keresett valószínűségeloszlás karakterisztikus függvénye:

$$e^{\int_0^\infty (e^{iuy} - 1) E(\eta(\mathrm{d}y))} = e^{\lambda \int_0^\infty (e^{iuy} - 1) \left[\int_0^\infty \delta e^{\beta v} v^{1-\alpha} e^{-y\delta e^{\beta v} v^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}y}. \tag{5}$$

Az $\alpha = 1$ esetben eredményként az alábbi adódik:

$$e^{\lambda \int_0^\infty (e^{iuy}-1) \frac{e^{-\delta y}}{\beta y}\, \mathrm{d}y},$$

ami egy gamma-eloszlás karakterisztikus függvénye. Ugyanis, ha $\alpha = 1$, akkor (5) így folytatható:

$$e^{\lambda \int_0^\infty (e^{iuy}-1) \left[\int_0^\infty \delta e^{\beta v} e^{-y\delta e^{\beta v}}\, \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}y} = e^{\lambda \int_0^\infty (e^{iuy}-1) \frac{1}{\beta y} e^{-\delta y}\, \mathrm{d}y}. \tag{6}$$

A gamma-eloszlás karakterisztikus függvényének (6) alakban való előállítását illetően lásd a [2] könyv 92. oldalát.

Az ebben a szakaszban alkalmazott megfontolások átvihetők bonyolultabb $f(t, \kappa)$ árhullámfüggvények esetére is. Az eredmény azonban nem feltétlenül képletszerű, de mindenképpen numerikusan nyerhető. Eredményként η_t eloszlását és a vízhiányos időszak átlagos hosszúságát tudjuk nyújtani.

3. Sztochasztikus programozási modell, melyben a vízkivételre szolgáló készülék kapacitása a meghatározandó számérték

Egymás utáni időszakokat (periódusokat) tekintünk és bevezetjük a következő jelöléseket:

η_k	a szolgáltatandó öntözővíz iránti igény nagysága a k-adik periódusban: $\eta_k = h_k - \gamma_k$, ahol h_k állandó és az összes vízigényt jelenti, γ_k pedig a csapadék mennyisége a k-adik periódusban,
ξ_k	a vízhozam a k-adik periódusban,
m	a készülék kapacitása,
M	az m kapacitást ésszerűen korlátozó felső határ,
$p(m)$	a készülék ára a kapacitás függvényében,
$\zeta_k = \min(m, \xi_k)$	a k-adik periódusban kiszolgáltatható vízmennyiség,
c_k	egységnyi víz haszna a k-adik periódusban,
K	a periódusok száma,
N	az évek száma,
$p > 0$	N éven át konstansnak feltételezett inflációs ráta.

Tételezzük fel, hogy a k-adik periódusban vízhiány esetén a hiányzó víz mennyiségével arányos kár keletkezik. Ez a feltételezés egyébként implicite már szerepelt c_k bevezetésekor, mert a c_k számnak csak az előbbi feltételezés mellett van értelme; c_k egyébként nem más, mint az említett pozitív arányossági tényező. A tárgyalandó feladat a nemlineárisan növekvő büntetés esetére is megfogalmazható.

A k-adik periódusban keletkezett véletlen nagyságú kárt az alábbi valószínűségi változó szolgáltatja

$$\chi_k = c_k\left[(\eta_k - \zeta_k)\right]_+ = \begin{cases} c_k(\eta_k - \zeta_k), & \text{ha } \eta_k > \zeta_k, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

K egymásutáni periódust tekintve, az összes bekövetkező kár várható értéke $\sum\limits_{k=1}^{K} E(\chi_k)$ lesz. Ha a várható összes kár nagyságát a tárgyévre és az azt követő N egymás utáni évre összegezve szeretnénk minimalizálni, akkor az okozott károk várható értékét jelenértéken tekintve, az alábbi optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\min\left[p(m) + \sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{k=1}^{K} E(\chi_k)\right)\frac{1}{(1+p)^i}\right], \quad \text{feltéve, hogy} \quad 0 \le m \le M \tag{7}$$

A (7) feladat egyváltozós optimalizálási feladat, a $[0, M]$ intervallumon keressük a célfüggvény minimumát. Megmutatjuk, hogy a célfüggvényben szereplő összeg az m változó konvex függvénye. Elegendő a konvexitást egy tagra megmutatni. Jelölje G_k az η_k, F_k a ξ_k valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, f_k pedig az ehhez tartozó sűrűségfüggvényt. Ekkor a ζ_k valószínűségi változó definíciója szerint:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_k}E(\chi_k) &= E\left([\eta_k - \zeta_k]_+\right) \\
&= \int_0^m E\left([\eta_k - z]_+\right) f_k(z)\,\mathrm{d}z + \int_m^\infty E\left([\eta_k - m]_+\right) f_k(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^m \left(\int_z^\infty (1 - G_k(x))\,\mathrm{d}x\right) f_k(z)\,\mathrm{d}z + \int_m^\infty (1 - G_k(x))\,\mathrm{d}x\ (1 - F_k(m)) \\
&= \int_0^m \int_0^\infty (1 - G_k(y+z)) f_k(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_m^\infty (1 - G_k(x))\,\mathrm{d}x\ (1 - F_k(m)).
\end{aligned} \tag{8}$$

A levezetésben felhasználtuk, hogy ha egy ξ valószínűségi változónak $f(x)$ a sűrűségfüggvénye, $F(x)$ az eloszlásfüggvénye és létezik a várható értéke, akkor parciális integrálással könnyen igazolható, hogy tetszőleges z valós számra

$$E\left([\xi - z]_+\right) = \int_z^\infty (x - z) f(x)\mathrm{d}x = \int_z^\infty (1 - F(x))\mathrm{d}x.$$

A (8) formula m változó szerinti kétszeres deriválásával meggyőződhetünk arról, hogy $(1/c_k)E(\chi_k)$ konvex függvény. Minthogy $c_k > 0$, $k = 1, \ldots, N$, következik, hogy $E(\chi_k)$ és ezek összege is konvex. $p > 0$ miatt pedig az N évre összegzett és jelenértékre hozott várható kár mennyisége is az m változó konvex függvénye. Ha $p(m)$ is konvex, akkor az egész célfüggvény konvex. Ha $p(m)$ nem konvex, akkor a célfüggvény konvexitása nem bizonyítható, azonban bizonyos esetekben ettől még lehet akár konvex is, amint az a példánk esetében is látható. Az optimalizálás viszonylag egyszerűen elvégezhető. A vízhozamok eloszlására választhatjuk a gamma, a vízigények eloszlására pedig a normális eloszlást.

A (7) modellnek több variánsa fogalmazható meg. A további lehetőségek lényegében a vízszolgáltatás folyamatosságának előírt megbízhatósági szintjét tartalmazzák valamilyen formában.

A (7) modellt azon a numerikus példán szemléltetjük, amelyet az [5] dolgozat szerzői egy sorbakapcsolt tározórendszer tervezésére szolgáló sztochasztikus programozási modell szemléltetésére dolgoztak ki. Most a két sorbakapcsolt tározó közül csak az elsőt tekintjük három egymást követő perióduson át (június, július és augusztus). Feltesszük, hogy a véletlen vízigényeket leíró η_1, η_2, η_3 valószínűségi változók egymástól és a véletlen vízhozamoktól is független, gamma eloszlásúak az alábbi paraméterekkel:

	várható érték (m^3)	szórás (m^3)	ϑ	λ
η_1	215 760	327 120	0,000 002 016	0,435 038 479
η_2	433 608	243 600	0,000 007 307	3,168 400 000
η_3	484 416	214 368	0,000 010 541	5,106 426 041

Hasonlóan feltesszük, hogy a véletlen vízhozamokat leíró ξ_1, ξ_2, ξ_3 valószínűségi változók egymástól és a véletlen vízigényektől is független, gamma eloszlásúak az alábbi paraméterekkel:

	várható érték (m^3)	szórás (m^3)	ϑ	λ
ξ_1	464 822	186 984	0,000 013 295	6,179 658 245
ξ_2	320 576	266 040	0,000 004 529	1,452 005 071
ξ_3	2660 40	234 040	0,000 004 857	1,292 152 284

A vízkivételre szolgáló készülék forintban mért ára legyen a következő szakaszonként lineáris függvény:

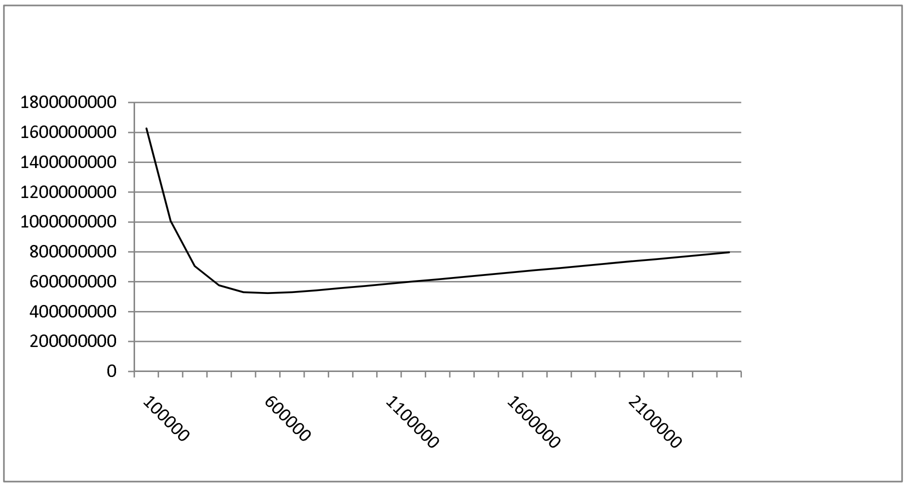
$$p(m) = \begin{cases} 100m, & \text{ha } m \leq 500\,000, \\ 50\,000\,000 + 150(m - 500\,000), & \text{ha } m > 500\,000, \end{cases}$$

és tegyük fel, hogy 25 000 000 m^3-nél nagyobb kapacitású vízkivételi művet nem építhetünk ki.

Egy m^3 öntözővíz haszna az egyes periódusokban legyen rendre $c_1 = 200$ Ft, $c_2 = 300$ Ft, $c_3 = 250$ Ft. Legyen $N = 10$ és a konstans inflációs ráta $p = 0,05$.

Ekkor a (7) egyváltozós optimalizálási feladat a Matlab programrendszer néhány beépített függvénye (gamma, gammainc, quad, dblquad, fminbnd) segítségével könnyen megoldható.

A fent leírt tesztfeladat optimális megoldása $m = 580\,391\ m^3$ és a hozzá tartozó optimum érték 523 146 000 Ft lett. Az 1. ábra a (7) optimalizálási feladat célfüggvény értékeit mutatja grafikusan az m változó megengedett értékeinek teljes tartományára.



1. ábra. A (7) optimalizálási feladat célfüggvény értékeinek grafikonja.

4. Optimalizálási modell a tározható víz esetére

Egymás utáni periódusokat tekintünk és bevezetjük az alábbi jelöléseket:

ξ_0	a tározóban lévő víz mennyisége az első periódus elején,
ξ_k	a vízhozam a k-adik periódusban,
$a_k(b_k)$	a tározóban lévő víz megengedett legkisebb (legnagyobb) mennyisége a k-adik periódusban,
z_k	az öntözésre használandó víz mennyisége a k-adik periódusban,
N	a periódusok száma,
$f(z_1,\ldots,z_N)$	az öntözővíz hasznának jelenértéke, ha az egyes periódusokban $z_1,\ldots,z_N$ vízmennyiséget használtunk el,
m	a vízkivételt szolgáló műtárgy kapacitása,
p	általunk előírt, 1-hez közeli megbízhatósági szint.

A modellt alkotó feladatot a következőképpen fogalmazzuk meg:

$$\max[f(z_1,\ldots,z_N)-p(m)] \quad \text{feltéve, hogy}$$
$$P\left\{a_k \le \xi_0+\sum_{j=1}^{k}\xi_j-\sum_{j=1}^{k}z_j \le b_k,\ k=1,\ldots,N\right\} \ge p \tag{9}$$
$$0 \le z_k \le m, \quad k=1,\ldots,N.$$

Amennyiben m adott, akkor ezt egyszerűen nem tekintjük változónak, a feladaton mást változtatni nem szükséges. Ha a véletlen nagyságú η_k vízigényeket a modellbe be akarjuk építeni, ez minden további nélkül lehetséges a 3. szakaszban tárgyalt modell mintájára. A (9) feladat algoritmikus megoldására a $\xi_1,\ldots,\xi_N$ valószínűségi változók eloszlására tett speciális feltevések mellett lehetőség van, lásd az [7], [8], [9] cikkeket. A (9) modellt m méretezésére célszerű felhasználni.

A (9) modell egy további variánsa az, amikor a döntéshozó megadhatja a vízkivételi műtárgy kiépítésére fordítható $p(m)$ pénzösszeg K nagyságát. Ekkor $p(m)$-et kivonni sem szükséges a maximalizálandó célfüggvény értékéből és a módosított modellt alkotó feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\max f(z_1,\ldots,z_N) \text{ feltéve, hogy}$$
$$P\left\{a_k \le \xi_0+\sum_{j=1}^{k}\xi_j-\sum_{j=1}^{k}z_j \le b_k,\ k=1,\ldots,N\right\} \ge p \tag{10}$$
$$p(m) \le K 0 \le z_k \le m, \quad k=1,\ldots,N.$$

Érdemes megemlíteni, hogy ha a $\xi_1,\ldots,\xi_N$ valószínűségi változók együttes eloszlása folytonos és sűrűségfüggvénye logaritmikusan konkáv, akkor a (9) és (10) feladatok $(m, z_1,\ldots,z_N)$ megengedett megoldásainak halmaza konvex (lásd például Prékopa [6]). Ha tehát $f(z_1,\ldots, z_N)$ és $p(m)$ konvex függvények, akkor a (9) és (10) feladatok konvexek.

Tekintsünk a (10) feladatra példaként egy tározót négy egymást követő hónapon át, mondjuk április elejétől július végéig, amely havi vízhozam adatai együttes normális eloszlásúak az alábbi várható értékekkel, szórásokkal és korrelációkkal:

	várható érték ($10^6 m^3$)	szórás ($10^6 m^3$)	korrelációs együtthatók			
ξ_1	79,74	83,51	1,000	0,284	-0,017	0,047
ξ_2	29,78	63,11	0,284	1,000	0,333	0,198
ξ_3	-4,52	73,98	-0,017	0,333	1,000	0,579
ξ_4	-43,44	73,96	0,047	0,198	0,579	1,000

Képezzük ezekből az aggregált

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \xi_1 \\
\zeta_2 &= \xi_1 + \xi_2 \\
\zeta_3 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\
\zeta_4 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4
\end{aligned}$$

valószínűségi változókat.

Ezek, mint a $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ valószínűségi változók lineáris transzformáltjai, továbbra is együttes normális eloszlásúak az alábbi transzformált várható értékekkel, szórásokkal és korrelációkkal:

	várható érték ($10^6 m^3$)	szórás ($10^6 m^3$)	korrelációs együtthatók			
ζ_1	79,740	83,510	1,000 000	0,858 792	0,670 483	0,542 108
ζ_2	109,520	118,112	0,858 792	1,000 000	0,872 681	0,735 707
ζ_3	105,000	149,408	0,670 483	0,872 681	1,000 000	0,934 830
ζ_4	61,560	191,201	0,542 108	0,735 707	0,934 830	1,000 000

Tegyük fel, hogy a (10) optimalizálási feladatban $f(z_1, z_2, z_3, z_4) = 40z_1 + 70z_2 + 80z_3 + 50z_4$, azaz az öntözővíz haszna a felhasznált vízmennyiségek lineáris függvénye. Legyen az m kapacitású vízkivételt szolgáló műtárgy telepítési költsége is lineáris függvény: $p(m) = 50m$. Legyen a tározó vízszintjének legkisebb értékére minden periódusban $a_k = 100, k = 1, 2, 3, 4$; legnagyobb értékére minden periódusban $b_k = 1000, k = 1, 2, 3, 4$ előírva és tegyük fel, hogy az első periódus kezdetén teli tározóval indul a szezon. Ekkor, ha különböző kiépítési költség korlátok mellett megoldjuk az így keletkező optimalizálási feladatot, akkor a döntéshozó elemezni tudja, hogy mekkora kapacitású vízkivételi műtárgyat érdemes kiépíteni. A valószínűségi korlát valószínűségen belüli kifejezését új változók bevezetésével kicsit egyszerűsítve a K kiépítési költség korlát különböző értékeire végülis az alábbi optimalizálási feladatot oldottuk meg:

$$\max\,(40z_1 + 70z_2 + 80z_3 + 50z_4) \text{ feltéve, hogy}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= 100 + z_1 - 1000 \\
l_2 &= 100 + z_1 + z_2 - 1000 \\
l_3 &= 100 + z_1 + z_2 + z_3 - 1000 \\
l_4 &= 100 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 1000 \\
u_1 &= 1000 + z_1 - 1000 \\
u_2 &= 1000 + z_1 + z_2 - 1000 \\
u_3 &= 1000 + z_1 + z_2 + z_3 - 1000 \\
u_4 &= 1000 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 1000
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
100P\begin{pmatrix} l_1 & \le & \zeta_1 & \le & u_1 \\ l_2 & \le & \zeta_2 & \le & u_2 \\ l_3 & \le & \zeta_3 & \le & u_3 \\ l_4 & \le & \zeta_4 & \le & u_4 \end{pmatrix} &\ge 90,00 \\
50m &\le K \\
z_1 &\le m \\
z_2 &\le m \\
z_3 &\le m \\
z_4 &\le m
\end{aligned}
$$

Vegyük észre, hogy a fenti feladatban a valószínűségi korlátot 100-zal felszorozva szerepeltetjük, hogy a feladat numerikusan stabilabban legyen megoldható. Ekkor az egyedüli nehézséget a valószínűség és parciális deriváltjai értékeinek a számítása jelenti. Ehhez célszerű a valószínűséget a következőképpen előállítani:

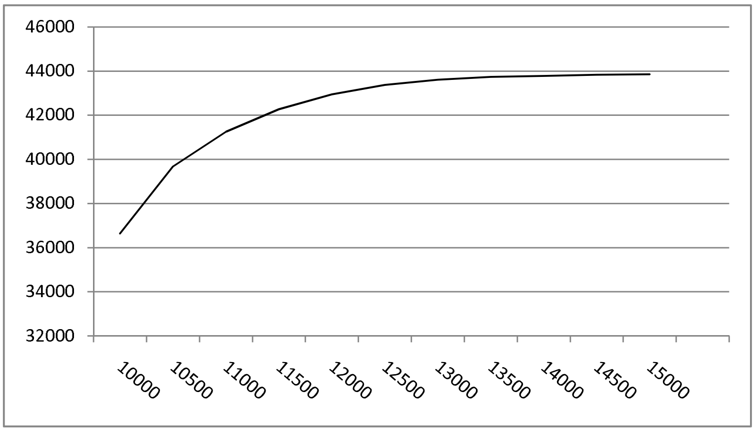
$$
\begin{aligned}
P\begin{pmatrix} l_1 & \le & \zeta_1 & \le & u_1 \\ l_2 & \le & \zeta_2 & \le & u_2 \\ l_3 & \le & \zeta_3 & \le & u_3 \\ l_4 & \le & \zeta_4 & \le & u_4 \end{pmatrix} &= F(u_1,u_2,u_3,u_4) - F(l_1,u_2,u_3,u_4) \\
&- F(u_1,l_2,u_3,u_4) - F(u_1,u_2,l_3,u_4) \\
&- F(u_1,u_2,u_3,l_4) + F(l_1,l_2,u_3,u_4) \\
&+ F(l_1,u_2,l_3,u_4) + F(l_1,u_2,u_3,l_4) \\
&+ F(u_1,l_2,l_3,u_4) + F(u_1,l_2,u_3,l_4) \\
&+ F(u_1,u_2,l_3,l_4) - F(l_1,l_2,l_3,u_4) \\
&- F(l_1,l_2,u_3,l_4) - F(l_1,u_2,l_3,l_4) \\
&- F(u_1,l_2,l_3,l_4) + F(l_1,l_2,l_3,l_4),
\end{aligned}
$$

ahol $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ a $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$ valśzínűségi változók megadott paraméterek szerinti együttes normális eloszlásának az eloszlásfüggvényét jelöli. Ez pedig azt jelenti, hogy egyetlen valószínűség értékének a számításához $2^4 = 16$ darab 4-dimenziós normális eloszlásfüggvény értéket kell kiszámítani.

Az így kapott nemlineáris programozási feladatnak elkészítettük az AMPL modelljét, a többdimenziós normális eloszlásfüggvény értékeinek a számításához beillesztettük A. Genz ([1]) numerikus integrálási kódját az AMPL rendszerbe, majd a LOQO solverrel megoldottuk a feladatot a K kiépítési költség korlát különböző értékeire. Az eredményeket a következő táblázat foglalja össze:

sorszám	K	optimum	m	z_1	z_2	z_3	z_4
1	10000	36634,493	200,001	200,001	180,665	199,848	0,000
2	15000	39682,114	210,011	210,011	206,903	209,975	0,010
3	11000	41250,695	220,003	220,003	212,155	219,996	0,001
4	11500	42270,302	230,004	230,004	209,583	229,990	0,003
5	12000	42948,048	240,010	240,010	202,120	239,990	0,003
6	12500	43378,927	250,012	250,012	191,146	249,973	0,009
7	13000	43615,155	259,999	259,999	177,390	259,973	0,003
8	13500	43741,739	269,943	268,574	162,960	269,943	0,002
9	14000	43792,337	279,971	268,973	151,969	279,971	0,001
10	14500	43836,424	289,895	268,947	141,354	289,895	0,000
11	15000	43861.877	299,046	268,963	132,222	299,046	0,002

A K kiépítési költség korlát különböző értékei mellett elérhető öntözési hasznokat a 2. ábra grafikonján is megjelenítettük. Ez a grafikon hasznos lehet a döntéshozó számára annak eldöntésében, hogy meddig érdemes növelni a vízkivételi műtárgy kiépítésére fordítandó pénzösszeget annak függvényében, hogy az mekkora növekedést jelent az öntözővíz hasznosulásában. A döntés meghozatalakor természetesen azt is figyelembe kell venni, hogy a vízkivételi műtárgy kiépítése egyszeri költséget jelent, míg az öntözővíz haszna több éven át realizálható.



2. ábra. Az öntözővíz hasznosulása a vízkivételi műtárgy kiépítésére fordítható pénzösszeg függvényében.

5. Sztochasztikus programozási modell, melyben a vízhiányos napok számát korlátozzuk

Adott időszakot tekintünk, ez lehet pl. az év, mondjuk augusztus hónapja. Előírjuk majd, hogy b-nél több napos kiesés adott, 1-hez közeli p valószínűséggel ne legyen. Modellünket egy n napból álló periódusra írjuk fel. Bevezetjük a következő jelöléseket.

$\xi_1, \ldots, \xi_n$	napi vízhozamok,
$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$	napi csapadékok,
$\eta_1, \ldots, \eta_n$	napi vízigények,
m	a vízkivételi műtárgy 1 napi kapacitása,
M	m felső korlátja,
$p(m)$	a vízkivételi műtárgy ára.

A k-adik napon van elegendő öntözővíz akkor és csak akkor, ha fennáll az alábbi öszszefüggés

$$\min(\xi_k, m) + \gamma_k \geq \eta_k. \tag{11}$$

Legyenek $x_1, \ldots, x_n$ csak a 0 és az 1 értékeket felvevő determinisztikus változók. Az alábbi

$$\min(\xi_k, m) + \gamma_k \geq x_k \eta_k \tag{12}$$

összefüggés nem jelent korlátozást, ha $x_k = 0$, de korlátozást jelent, mégpedig nem mást, mint (11)-et, ha $x_k = 1$. Előírva az

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n - b$$

feltételt (12) mellé, ezáltal azt kivántuk meg, hogy az (11) feltételek közül legalább $n - b$ teljesüljön, tehát legfeljebb b esetben álljon fenn (11) ellenkezője. Modellünk ezek után a következő módon fogalmazható meg:

$$\left.\begin{gathered}\min p(m) \text{ feltéve, hogy}\\ P\{\min(\xi_k, m) + \gamma_k \geq x_k \eta_k,\ k = 1, \ldots, n - b\} \geq p\\ x_1 + \cdots + x_n \geq n - b,\\ x_k = 0 \text{ vagy } 1,\ k = 1, \ldots, n, \quad 0 \leq m \leq M.\end{gathered}\right\} \tag{13}$$

Ennek a modellnek is több variánsa fogalmazható meg, akárcsak a korábbiaknak. Többek között beépíthető a célfüggvénybe egy b-től függő költségtényező. Ha a $\xi_k, \eta_k, \gamma_k,\ k = 1, \ldots, N$ valószínűségi változók együttes eloszlása folytonos és az együttes sűrűségfüggvény logaritmikusan konkáv, akkor a (13) feladat feltételei, kivéve az $x_k = 0, 1$ feltételeket, konvex halmazt határoznak meg.

Hivatkozások

[1] A. Genz: *Numerical Computation of the Multivariate Normal Probabilities.* Journal of Computational and Graphical Statistics **1** (1992) 141–150.

[2] B. V. Gnyegyenko, A. N. Kolmogorov: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai.* Akadémiai Kiadó, Budapest (1951).

[3] A. Prékopa: *On secondary processes generated by random point distributions of Poisson type.* Annales Univ. Sci. R. Eötvös, Sectio Math. **2** (1959) 139–146.

[4] A. Prékopa: *Contributions to the theory of stochastic programming.* Mathematical Programming **4** (1973) 202–221.

[5] A. Prékopa, T. Rapcsák, I. Zsuffa: *Egy új módszer sorbakapcsolt tározórendszer tervezésére sztochasztikus programozás felhasználásával.* Alkalmazott Matematikai Lapok, **2** (1976) 189–2001.

[6] A. Prékopa: *Stochastic Programming.* Kluwer Scientific Publishers Dordrecht, Boston (1995).

[7] A. Prékopa, T. Szántai: *On Optimal Regulation of a Storage Level with Application to the Water Level Regulation of a Lake.* European Journal of Operational Research **3** (1979) 175–189.

[8] T. Szántai: *Evaluation of a Special Multivariate Gamma Distribution.* Mathematical Programming Study **27** (1986) 1–16.

[9] T. Szántai: *A Computer Code for Solution of Probabilistic Constrained Stochastic Programming Problems.* In: Numerical Techniques for Stochastic Optimization (Yu. Ermoliev, R. J.-B. Wets, eds.), Springer, New York, (1988) 229–235.

[10] L. Takács: *Poisson folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól.* MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei **4** (1954) 473–504.

(Beérkezett: 2010. április 24.)

PRÉKOPA ANDRÁS
Rutcor, Rutgers University
prekopa@rutcor.rutgers.edu
ELTE TTK
Operációkutatási Tanszék
prekopa@cs.elte.hu

SZÁNTAI TAMÁS
BME TTK
Matematikai Intézet, Differenciálegyenletek Tanszék
szantai@math.bme.hu

DETERMINATION OF THE IRRIGATION WATER CONTENT OF NATURAL STREAMFLOWS

A. Prékopa, T. Szántai and I. Zsuffa

In the first part of the paper a theorem is proved which states that if rainfalls occur according to a Poisson process and the inflows have gamma density profiles with independent, exponentially distributed amplitudes, then the stationary distribution of the streamflow intensity is gamma. In the further parts of the paper three optimization models are presented that lead to three different solutions of the problem. In the first one the optimal capacity of a pump station is to be determined when the water cannot be stored. In the second one the optimal capacity of a reservoir, where the water can be stored, and an optimal water usage policy are to be found, given that the water demands should be met by prescribed large probability. In the third one an upper bound is imposed on the number of days when demands may not be met and the cost of a pump station is to be minimized.

A folyók öntözővíz készlete meghatározásának problémáját Zsuffa István vetette fel több évvel ezelőtt. A feladat részletes kidolgozására nemrég került sor az első két szerző részéről, akik ezt a közös dolgozatot barátjuk és munkatársuk, Zsuffa István emlékének ajanlják.

The problem of finding the irrigation water contents of rivers was formulated by István Zsuffa many years ago. The detailed elaboration of the problem is more recent and is due to the first two authors who offer this paper to the memory of their friend and co-worker, István Zsuffa.