Alkalmazott Matematikai Lapok **30** (2013), 81-106.

A KLASSZIKUS MATEMATIKA EGY LEHETSÉGES ÁLTALÁNOSÍTÁSA[1]

RÁZGA TAMÁS

Dolgozatunk elsődleges célja, hogy bevezessük a *reálisan ellentmondásmentes matematikai elméletek* fogalmát, és matematikai-logikai alapon megmutassuk, hogy ezek ismeretelméletileg egyenértékűek a klasszikus értelemben vett *ellentmondásmentes elméletekkel*, így képesek arra, hogy természetleírásunk teljes értékű alapját képezzék. Ismertetjük Q(k)-t mint a *természetes számok* és R(γ)-t mint a *valós analízis* egy javasolt új, általános elméletét. Megmutatjuk, hogy Q(k) és R(γ) egyaránt *reálisan ellentmondásmentes*, valamint hogy egyfelől reális esély van a γ állandó értékének kísérleti módszerekkel (azaz numerikus számítások eredményeként) való meghatározására, másfelől arra, hogy γ értékének megfelelő választásával a fizikai természetleíráshoz egy, a mainál jobban alkalmazkodni képes matematikai elmélethez juthassunk.

1. Bevezetés

A múlt század közepére tehető, amikor a matematika alapjainak kutatói olyan kérdésekkel kezdtek foglalkozni, hogy (1) természetes számnak tekinthetjük-e a $10^{10^{10}}$ jelsorozattal definiált absztrakt számot; hogy (2) megadható-e olyan definíció, mely egzakt módon tesz különbséget a véges és a végtelen számok között; hogy (3) egy konkrét matematikai állítást tekinthetünk-e egy adott axiómarendszer következményének, ha annak (formális) levezetése több, mint 10^{1000} szimbólum-jel alkalmazását igényli; és végül hogy (4) mit kezdhetünk a természetes számok aritmetikájának egy olyan rendszerével, mely *reálisan ellentmondás-mentes* (ha pl. a *reális bizonyítások* hosszát 10^{1000}-re korlátozzuk), ugyanakkor a klasszikus logika (mely a bizonyítások hosszát nem korlátozza) szempontjából *ellentmondásos.*

Az előbbi négy kérdés közül az első kettőt Van Dantziggal [1], míg az utóbbi kettőt Rohit Parikh-hal [2] hozhatjuk kapcsolatba. A felvetett problémakör meglehetősen komoly, művelőinek köre nem csak e két szerzőre korlátozódik, hanem

[1]Az Alkalmazott Matematikai Lapok szerkesztősége nem azonosítja magát az idő közben elhunyt szerző filozófiai következtetéseivel, azonban a gondolat- és szólásszabadság jegyében a dolgozatot nem kívánta megcsonkítani.

egy új matematikai-logikai iskola, az úgynevezett ultrafinitizmus megalapításához vezetett [3].

Dolgozatunk szempontjából az a lényeg (ezt ragadjuk meg), hogy ezen új matematikai-logikai iskola szerint az aritmetikában jogosan kérdőjelezhetjük meg, hogy mindaz, ami érvényes a kis, a közepes és a nagy számok körére, az minden további nélkül kiterjeszthető az olyan nagyon-kicsi és az olyan nagyon-nagy számokra is, amelyek előállítása meghaladja (nemcsak technikai adottságainkból, hanem fizikai korlátainkból is következő) realitásunkat, és így csak a képzeletünkben lehetséges.

Dolgozatunkban a *reális bizonyítások* hosszát a κ jellel korlátozzuk, de κ tényleges értékét mindvégig nyitva hagyjuk, erre vonatkozóan csak néhány előzetes utalást teszünk.

Ugyanakkor szilárdan meg vagyunk győződve arról, hogy ha κ értékét helyesen választjuk, úgy (ismeretelméletileg) nem tehető különbség a „csak” *reálisan ellentmondásmentes* és a klasszikus értelemben vett *ténylegesen ellentmondásmentes* aritmetikai elméletek között.

E hivatkozások és bevezető gondolatok után dolgozatunk programja a következő:

a) Vizsgálataink alapjául a természetes számok aritmetikájának Raphael M. Robinsonról elnevezett legegyszerűbb axiómarendszerét, az úgynevezett Q-aritmetikát választjuk.

   A 2. fejezetben megmutatjuk, hogy: (1) habár a Q-aritmetika a Peano-aritmetika leggyengébb alrendszerét képezi, mégis alkalmas arra, hogy benne a számelmélet jó néhány közismert tétele legyen megfogalmazható és bizonyítható; (2) a Q-aritmetika keretein belül könnyen definiálható az $y = \exp(a, x)$ hatványfüggvény a szokásos tulajdonságokkal (kivéve azt, hogy minden a-hoz és x-hez tartozik y); (3) minden c értékhez van olyan $k = k(c)$ természetes szám, melynél egyetlen y természetes számra sincs az $y = \exp(2, k(c))$ egyenlőségnek c -nél rövidebb *bizonyítási hosszú* bizonyítása; (4) következésképpen Q-aritmetika kiegészíthető a (Q9) axiómával (ami az előbb említett körülményt fejezi ki kellően nagy $c = \kappa$ esetére) úgy, hogy az eredő Q(k)-aritmetika (a *bizonyítási hosszak* „nagyon-nagy” κ-ra korlátozásával) *reálisan ellentmondásmentes*.

b) A 3. fejezetben becsléseket teszünk $k(c)$ értékére, valamint röviden kitérünk arra, hogy amennyiben az összeadás és szorzás műveleti függvényeit logikai függvényekkel helyettesítjük, akkor az így kapott (még gyengébb) $\mathrm{Q}^*(\mathrm{k}^*)$ aritmetikában $k(c) \gg k^*(c)$.

   Ez utóbbi körülményre is tekintettel megmutatjuk, hogy κ megfelelően nagy értékűre választása esetén nem tehetünk különbséget a „csak” *reálisan ellentmondásmentes* és a klasszikus értelemben *ténylegesen ellentmondásmentes* aritmetikai rendszerek között, így a természetes számok aritmetikájának lehetséges (kívánatos) általánosításaként a Q(k) és $Q^*(k^*)$ aritmetikák egyaránt számításba jönnek.

c) A 4. fejezetben felvázoljuk a *valós számok* Q(k)-aritmetikával kompatibilis új elméletét, megmutatjuk, hogy pusztán ennek keretein belül nem lehetséges a *határozott integrál* értelmezése, mert ehhez külön axiómára van szükség, valamint rávilágítunk arra, hogy a valós számok egyértelműen a *mikro-* és *makro-számok* kategóriájába sorolhatók.

d) Az 5. fejezetben vázlatosan tárgyaljuk a *valós analízis* általánosításához (és ezen belül a határozott integrál értelmezéséhez) szükséges külön axiómákat, és megmutatjuk, hogy az ezekkel kiegészített elmélet *reálisan ellentmondásmentes.*

e) Befejezésül a 6. fejezetben összegezzük vizsgálataink alábbi főbb tanulságait:

(i) mivel az új elmélet (κ kellően nagy értékűre választása esetén) bizonyítottan *reálisan ellentmondásmentes*, ezért nincs okunk arra, hogy azt ne tekintsük (a klasszikus értelemben vett) *ténylegesen ellentmondás-mentes* elméletnek;

(ii) az új elmélet γ állandója (elvileg) ugyanúgy tapasztalati úton határozható meg (például számítógéppel támogatott nagypontosságú numerikus számítások eredményeként), mint ahogy a Bolyai-geometria δ állandója is megkapható nagyprecizitású földmérések (illetve fizikai megfigyelések) eredményeként;

(iii) végül felvázolunk néhány gondolatot arról, hogy miként lehet az új, általános elméletet felhasználni arra, hogy általa a fizikai természetleírásunkhoz egy, a mainál jobban alkalmazkodni képes *matematikai háttérelmélethez* juthassunk.

2. Q és Q(k) aritmetikai rendszerek

Ismeretes (lásd pl. [4]), hogy a természetes számok (amik összességét a kialakult gyakorlat szerint a továbbiakban egyszerűen csak $\mathbb{N}$-nel jelöljük) legáltalánosabb elméletét a Raphael M. Robinson által bevezetett Q-aritmetika adja. Ezt az elméletet választjuk további vizsgálataink kiinduló alapjául, mint ahogy ezt választottuk e dolgozat előfutárát képező forrásmű [5] alapjául is. (Hivatkozott dolgozatunkban még nem ismertük e témakör kiterjedt irodalmát, és ezért Q-aritmetika helyett egyszerűen csak RA-rendszerről beszéltünk).

I. Részben e kiterjedt irodalomra (aminek további részletei pl. [6]-ban és [7]-ben találhatók), részben a már idézet forrásmunkára [5] hivatkozással az alábbiakban röviden összefoglaljuk a Q-aritmetika dolgozatunk szempontjából leglényegesebb adottságait.

a) A Q-aritmetika formális rendszere a „0” *konstans* jelet, az „S”, a „+” és a „·” műveleti jeleket, az „=” egyenlőség jelet, valamint *változójeleket* használ.

b) A Q-aritmetika első hét axiómája azonos a Peano-aritmetika első hét axiómájával.

c) A Peano-aritmetika *teljes indukciós axiómasémáját* a Q-aritmetikában az alábbi (lényegesen „gyengébb”) axióma helyettesíti:

(**Q8**) $a = 0$, vagy van olyan b, hogy $a = \mathrm{S}b$ (ahol a és b változójelek).

d) A Q-aritmetikában precízen definiálható a *hatványozás* $y = \exp(a, x)$ művelete (a szokásos főbb tulajdonságokkal), ahol is x, y és a természetes számváltozók.

e) Parikh tétele értelmében [2, Theorem 4.3.] Q-aritmetikában ugyanakkor nem bizonyítható a hatványozás műveleti függvényének totális volta, vagyis hogy az a és x változók minden konkrét a és x értékéhez található legyen olyan y, hogy $y = \exp(a, x)$ fennáll.

f) Q-aritmetikán belül megadható a természetes számoknak egy olyan $\mathbb{N}_0$ összessége (nevezzük ezeket a továbbiakban egyszerűen csak $\mathbb{N}_0$-számoknak), hogy:

(i) az $\mathbb{N}_0$-számok köre az „S”, a „+” és a „·” műveletekkel szemben zárt;

(ii) tetszőleges a és x $\mathbb{N}_0$-számokhoz van olyan $\mathbb{N}$-beli y szám, hogy $y = \exp(a, x)$;

(iii) az $\mathbb{N}_0$-számok körében *számsorozatokat* és *függvénysorozatokat* definiálhatunk az ezekre vonatkozóan ismert összefüggések szinte érintetlen fenntartása mellett;

(iv) az $\mathbb{N}_0$-számok körében a Q-aritmetika olyan alapvető tételek bizonyítására képes, mint a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös létezése; a *kínai maradéktétel*; vagy mint pl. *Gauss alaptétele* a természetes számok prímszám-szorzatra történő felbontásáról.

Feltehető továbbá [8], hogy az $\mathbb{N}_0$-számok körében a Q-aritmetika a számelmélet olyan legismertebb tételeinek a bizonyítására is elegendő, mint például a *„nagy” Fermat-tétel*, valamint hogy egy természetes szám és annak kétszerese között mindig van prímszám, és így tovább.

Megjegyzés. (i) és (ii) igazolásához leginkább a [2]-ben, [4]-ben és [6]-ban található háttérismeretekre hivatkozunk, míg (iii) és (iv) alátámasztásánál [8]-ra hagyatkozunk.

A Q-aritmetikán belül valamely m természetes számnak a (Q-*aritmetika* formális nyelvén keresztül történő) formális kifejezésére az alábbi két módon van lehetőség:

$$\underline{m} = \text{SSS}\ldots\text{S0} \quad \text{azaz „}m\text{” darab „S”-jel valamint egy darab „0”-jel;} \tag{1}$$

vagy

$$\underline{0} = 0; \qquad \underline{2 \cdot m} = \text{SS0} \cdot \underline{m} \qquad \underline{2 \cdot m + 1} = \underline{2 \cdot m} + \text{S0} \tag{2}$$

ahol is $\underline{m}$ jelöli az m természetes szám Q-aritmetikán belüli formális változatát.

Az (1) *szám-kifejezés* a megszokottabb (Gödel is ezt használta), a (2) kifejezés viszont „gazdaságosabb", ugyanis például az $m = 2^k$ természetes szám formális kifejezésére (1) szerint $2^k + 1$, míg (2) esetén mindösszesen $6 \cdot k$ formális jelre van szükség.

Dolgozatunkban – amikor csak megtehetjük – mi mindvégig a (2) *szám-kifejezést* használjuk.

Tegyük fel, hogy valamilyen okból (pl. Univerzumunk fizikai törvényeiből kifolyólag) formális logikai műveleteink hosszában korlátozva vagyunk, és így pl. egy *kifejezést* (ezen belül egy *szám-kifejezést* is), egy *formulát*, vagy egy *bizonyítást* csak akkor áll módunkban reálisan (hitelt érdemlően) elfogadni, ha azok jelsorozat-hosszúsága kisebb valamely κ számnál.

Dolgozatunkban feltételezzük, hogy Univerzumunk (az aritmetika vonatkozásában is) ilyen tulajdonságú, és abban létezik ilyen κ *szám* is, bár annak *konkrét értékét* nyitva hagyjuk.

Megjegyzés. A fizika mai állása szerint Univerzumunk véges, a benne foglalt atomok száma mintegy 10^{80}-ra becsülhető, és így a $\kappa \approx 10^{80}$ érték is egy ilyen *szóba-jöhető* korlátot képvisel.

2.1. Definíció. Valamely *kifejezésről* (*szám-kifejezésről* is), *formuláról* vagy *bizonyításról* akkor mondjuk, hogy az *reális* (azaz tényszerű, megvalósítható, tehát nem képzeletbeli), ha annak Q-aritmetikán belüli kifejezéséhez κ-nál kevesebb formális jelre van szükség;

2.2. Definíció. Egy elméletről akkor mondjuk, hogy *reálisan ellentmondásmentes*, ha abban egyik axióma tagadásának sincs *reális bizonyítása.*

A mondottak értelmében a Q-aritmetikán belül (2) szerint kifejezhető legnagyobb szám:

$$n_{\max} \approx 2^{\kappa/4}. \tag{3}$$

Ha viszont (2) nem alkalmazható (mert pl. a Q-aritmetikán belül a „+" és „·" műveleti függvényeket logikai függvényekkel helyettesítjük – lásd később, a 3. fejezetben), akkor:

$$n_{\max} \approx \kappa. \tag{4}$$

2.1. Tétel. *c minden értékéhez található olyan $k = k(c)$ természetes szám, hogy az $y = \exp(2, k(c))$ egyenlőségnek egyetlen y természetes szám esetén sincs c-nél rövidebb bizonyítása.*

A tételre szigorú, formális bizonyítás is adható, melynek ismertetésétől (annak terjedelme és matematikai-logikai mélységei okán) itt most eltekintünk, és helyette megelégszünk egy informális bizonyítási változat ismertetésével.

De mielőtt állításunk ezen informális igazolásába kezdenénk, először is pontosítjuk a használt legfőbb fogalmakat, valamint az azokkal kapcsolatos jelölésmódot.

Valamely „A" állítás *bizonyítási hosszán* az annak formális bizonyításában szereplő szimbolikus jelek összes számát, illetve a *bizonyítási lépés-számán* az ugyanezen bizonyításban alkalmazott összes következtetések számát értjük (ez utóbbi vonatkozásban valamely konkrét axióma alkalmazása is következtetésnek számít).

$\mathrm{Q}|\!-_c$ A-val jelöljük azt, hogy Q-aritmetikán belül az „A" állításnak van c, vagy rövidebb *bizonyítási hosszú* bizonyítása, míg $\mathrm{Q}|\!\not-_c$ A-val ennek az ellenkezőjét.

Hasonlóan: $\mathrm{Q}|\!-_{(c)}$ A-val jelöljük azt, hogy Q-aritmetikán belül az „A" állításnak van c, vagy rövidebb *bizonyítási lépés-hosszú* bizonyítása, míg $\mathrm{Q}|\!\not-_{(c)}$ A-val az ellenkezőjét.

Mindezek alapján a 2.1. tétel azt állítja, hogy van olyan $k = k(c)$ természetes szám, hogy:

$$\forall y\{\mathrm{Q}|\!\not-_c \mathrm{y} = \exp(2, k(c))\}. \tag{5}$$

Bizonyítás.

A tétel bizonyításához egyfelől felhasználjuk azt a trivialitást, hogy

$$[\mathrm{Q}|\!-_c \mathrm{A}] \rightarrow [\mathrm{Q}|\!-_{(c)} \mathrm{A}], \tag{6}$$

másfelől G. Kreisel Q-aritmetikára (mint véges számú axiómára épült elméletre) bizonyított sejtését (bizonyítását lásd pl. [9]-ben), amit az alábbi segédtételben fogalmazunk meg:

2.1. SegĂŠdtĂŠtel. *Ha valamely $B(x)$ állításhoz található olyan c természetes szám, hogy az alábbi összefüggés minden k természetes számra (külön-külön) fennáll:*

$$Q|\!-_{(c)} B(\underline{k}),$$

akkor egyúttal

$$Q|\!-\forall x B(x).$$

A 2.1. segédtétel alapján még egy segédtételt fogalmazunk meg és bizonyítunk be.

2.2. SegĂŠdtĂŠtel. *Q-aritmetikán belül adott c-hez mindig van olyan d természetes szám, hogy:*

$$\forall y \, \forall \, (x \geq \underline{d}) \left\{ Q|\!-_{(c)} \, y = \exp(2, x) \right\} \tag{7}$$

E segédtétel igazolásához két trivialitást veszünk figyelembe. Először is azt, hogy minden c természetes számhoz van olyan $c^*(\geq c)$, hogy:

$$\left[\mathrm{Q}|\!-_{(c)}\, y = \exp(2,d)\right] \to \forall(x \leq d)\,\left[\mathrm{Q}|\!-_{(c^*)}\, y = \exp(2,x)\right]$$

másodszor pedig azt a körülményt (lásd a 2.e) pontnál), hogy:

$$\mathrm{Q}|\!\not-\,\forall a\,\forall x\,\exists y\,[y = \exp(a,x)]$$

Tételezzük mármost fel, hogy valamely adott c mellett (7) nem áll fenn, azaz:

$$\forall d\,\exists y\,\exists(x \geq d)\,\left\{\mathrm{Q}|\!-_{(c)}\, y = \exp(2,x)\right\}.$$

Ez esetben (a figyelembe vett első trivialitás miatt) egyúttal:

$$\forall d\,\forall(x \leq d)\,\exists y\,\left\{\mathrm{Q}|\!-_{(c^*)}\, y = \exp(2,x)\right\}$$

következésképpen (a 2.1. segédtétel miatt) $\mathrm{Q}|\!-\forall x\,\exists y\,[y = \exp(2,x)]$ eredményre jutunk, ami ellentmondván a második trivialitásnak, végül is igazolja (7)-t.

Mindezen előzmények után visszatérünk a 2.1. tétel, azaz (5) igazolásához.

Először is észrevesszük, hogy (6)-ból, valamint $|\!\not-_c$ és $|\!\not-_{(c)}$ definíciójából következően:

$$\left[\mathrm{Q}|\!\not-_{(c)}\,\mathrm{A}\right] \to \left[\mathrm{Q}|\!\not-_c\,\mathrm{A}\right],$$

és így a 2.2. segédtétel a *bizonyítási lépés-számról* közvetlenül kiterjeszthető a *bizonyítási hosszra* is, azaz minden c-hez mindig van olyan k természetes szám, hogy:

$$\forall y\,\forall(x \geq \underline{k})\,\{\mathrm{Q}|\!-_c\, y = \exp(2,x)\}. \tag{8}$$

Legyen $k_{\min}$ a (8) szerinti k számok közül a legkisebb és definiáljuk $k(c)$-t $k(c) = k_{\min}$-ként. Nyilvánvaló, hogy $k(c)$ előbbi definíciója esetére a 2.1. tétel bizonyítást nyert. □

II. Q(k)-aritmetikát úgy kapjuk meg Q-aritmetikából, hogy ez utóbbi összesen 8 axiómáját (azaz a **Q1** …, **Q8** axiómákat) az alábbi 9. axiómával egészítjük ki:

(**Q9**) az $\exp(2,k)$ kifejezés egyetlen természetes számmal sem megegyező, azaz:

$$\forall y\,[\exp(2,\underline{k}) \neq y],$$

ahol k valamely (aritmetikailag formálisan kifejezhető) fix, természetes *szám-kifejezés.*

Alább megmutatjuk, hogy ha k értékét megfelelően választjuk, úgy Q(k)-aritmetika *reálisan ellentmondásmentes*, és így szilárd alapját képezheti az *általános matematikának.*

2.2. Tétel. *Ha „k" egy tetszőleges olyan szám-kifejezés, amire fennáll, hogy*

$$k \geq k(\kappa), \tag{9}$$

akkor a Q(k)-aritmetika reálisan ellentmondásmentes.

Megjegyzés. Itt $k(c)$ a 2.1. tétel bizonyítása során definiált *szám-függvény*, míg κ pedig a *reális szám-ábrázolás* és a *reális bizonyítás* 2.2. a) definícióval bevezetett korlátja.

Bizonyítás. A k *szám-kifejezés* (9) szerinti választása esetén itt elegendő csak azt igazolnunk, hogy a **Q9** axióma tagadását jelentő alábbi kifejezésnek:

$$\exp(2, k(\kappa)) = y \tag{10}$$

Q-aritmetikán belül egyetlen y érték mellett sincs *reális bizonyítása.*

Mivel a 2.1. tétel alapján tudjuk, hogy a Q-aritmetikán belül (10)-nek egyetlen y érték esetén sincs κ-nál rövidebb *bizonyítása*, így – a reális bizonyíthatóság 2.2. b) definícióját figyelembe véve – a 2.2. tétel értelemszerűen fennáll.

A klasszikus logika szerint Q(k) *ellentmondásos*, mert a Q-aritmetikán belül minden lehetséges κ értékre a (10) összefüggés külön-külön bizonyítható.

Ez a körülmény azonban két okból sem árnyékolhatja be a 2.1. tétel érvényességét, sem pedig az aritmetika általánosítását célzó, jelen dolgozatban kifejtett törekvéseinket:

(i) a klasszikus logika nem szab semminemű korlátot a bizonyítások hosszának, megengedi a 10^{80}-nál is hosszabb, és így csak gondolatilag kivitelezhető bizonyítási konstrukciókat is;

(ii) a 10^{80}-nál nagyobb számok körében maguknak az axiómáknak az érvénye is kérdéses. □

3. Megfontolások, becslések, következtetések

Dolgozatunk egyik legfőbb állítása és egyik legfőbb mondanivalója az, hogy a *reális ellentmondás-mentesség* korántsem egy *mesterkélt kitaláció*, hanem inkább a klasszikus matematikai gondolkodás egyik gyenge pontjára rámutató olyan fogalom, ami alapját képezheti a matematika (ezen belül elsősorban az aritmetika és analízis) általánosításának.

Mindezzel kapcsolatban az előző pontban matematikai-logikai módszerekkel mutattuk meg, hogy léteznek olyan κ és $k(\kappa)$ természetes számok, melyek mellett a *reális ellentmondás-mentesség* fogalma nemcsak filozófiailag, de matematikailag is értelmezhető.

Az előzőekben mind κ, mind pedig a 2.1. tétel bizonyítása során definiált $k(c)$ *szám-függvény* értékeinek a kérdését nyitva hagytuk, megelégedtünk ezek puszta létezésével.

Mivel a dolgozatunk tárgyát képező új *aritmetikai* és *valós függvénytani* rendszer-modellt nem pusztán gondolati konstrukciónak szántuk, hanem annak közvetlen gyakorlati alkalmazására is gondoltunk, ezért a most következő fejezetben becslésekbe bocsátkozunk κ szóba-jöhető értékeit, és a $k(c)$ *számfüggvény* egy valószínűsíthető felső korlátját illetően.

Hangsúlyozzuk, hogy itt főleg sejtéseken alapuló becslésekről és nem bizonyításokról lesz szó.

Becslésekről, melyek segítenek eligazodni eredményeink alkalmazhatóságában, és amikkel kapcsolatos esetleges tévedések alapvető célunkat és mondanivalónkat nem befolyásolják.

3.1. κ értékének előzetes becslése

Első témakörként κ értékére teszünk becsléseket.

Úgy gondoljuk, hogy az alábbi nagy-számok eléggé közismertek és sokat mondóak:

(i) Földünk atomjainak a száma $\approx 10^{50}$.

(ii) Galaxisunk atomjainak a száma $\approx 10^{70}$.

(iii) Univerzumunk atomjainak a száma $\approx 10^{80}$.

A fenti számokra hivatkozással alig hihető, hogy egy *reális bizonyítás hossza* nagyobb lehessen, mint 10^{50}, az viszont teljességgel kizárható, hogy ez a *bizonyítási hossz* elérhesse a 10^{80} értéket. Következésképpen nem sokat tévedhetünk, ha a továbbiakban κ értékére:

$$\kappa \approx 10^{80} \tag{11}$$

becslést tesszük.

3.2. Egy lehetséges becslés $k(c)$ függvény felső korlátjára

Második témaként definiáljuk a $\mu(c)$ függvényt, mely – sejtésünk szerint – egy felső korlátját képezi a $k(c)$ számfüggvénynek. Vagy pontosabban, definiálni fogunk valamely $\mu(c)$ függvényt, melyről azt sejtjük, hogy (legalább is) a $k = 2^m$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$ számok körében:

$$k(c) \leq \mu(c).$$

Jelöljük $\Lambda(k)$-val azt a formálisan kifejezhető állítást, hogy $x = k$ mellett van olyan y, melynél az $\exp(2, x) = y$ egyenlőség fennáll, és jelöljük $\lambda(k)$-val ennek a formális *bizonyítási hosszát.*

Tudjuk, hogy I. d) szerint „$Q|-\Lambda(x) \to \Lambda(2 \cdot x)$”, így $\lambda\left(2^{m+1}\right)$ könnyen kifejezhető $\lambda\left(2^m\right)$-ből:

$$\lambda\left(2^{m+1}\right) = \lambda\left(2^m\right) + \alpha \cdot m + \beta, \tag{12}$$

amiből viszont könnyen megkapjuk $\lambda(2^m)$ értékét:

$$\lambda\left(2^m\right) = \alpha/2 \cdot m^2 + (\beta - \alpha/2) \cdot m \tag{13}$$

Megjegyzés.

(i) (12) származtatásánál figyelembe vettük, hogy a bizonyítás során $\Lambda(x) \to \Lambda(2 \cdot x)$ összefüggésbe x helyére be kell helyettesítenünk a $k = 2^m$ számkifejezést, ami (2) értelmében (és x minden előfordulásánál) $4m$ formális jel felhasználását jelenti.

(ii) α és β természetes számok, és (i)-ből következően: $\alpha \geq 12$.

(iii) Könnyen ellenőrizhető, hogy (13)-hoz hasonló összefüggésre jutunk akkor is, ha $\Lambda(k)$-t nem az I. d) szerinti $\Lambda(x) \to \Lambda(2 \cdot x)$ összefüggés, hanem az I. d) (ii)-ben jelzett azon körülmény alapján kívánjuk bizonyítani, hogy az $\mathbb{N}_0$-számok körében $\Lambda(k)$ már eleve teljesül. (Ez utóbbi esetben nyilvánvalóan azt kell bizonyítanunk, hogy k $\mathbb{N}_0$-szám.)

A mondottak (és a 2.1. tételben szereplő $k(c)$ számfüggvény definíciója) értelmében egyértelműen valószínűsíthető, hogy a

$$\mu(c) = 2^{\sqrt{c}}$$

függvény egy felső korlátját képezi a $k(c)$ számfüggvénynek, azaz

$$k(c) \leq 2^{\sqrt{c}}.$$

Mindebből, valamint (9)-ből következően azt mondhatjuk, hogy ha

$$k \geq 2^{\sqrt{\kappa}}, \tag{14}$$

akkor Q(k) (nagy valószínűséggel) *reálisan ellentmondásmentes.*

3.3. Q$^*-$(k) aritmetika és egy becslés $k^*(c)$ függvény felső korlátjára

Q(k)-aritmetikának egy érdekes alternatívájához (nevezzük ezt Q*(k)-aritmetikának) jutunk, ha Q-aritmetikában az *összeadás* és *szorzás* műveleti függvényeit logikai függvényekkel helyettesítjük (az ötlet R. Parikhtól származik, lásd pl. [10]). Ebben, a Q-aritmetikánál lényegesen „gyengébb” elméletben a (3) számábrázolás nem lehetséges, a természetes számok formális kifejezésénél csak (4)-re hagyatkozhatunk.

$Q^*(k)$-aritmetikában $k(c)$ függvény helyett $k^*(c)$ függvény szerepel, aminek felső korlátjára

$$k^*(c) \le c$$

függvényt valószínűsítjük, és azt várjuk, hogy ha

$$k^* \ge c, \tag{15}$$

akkor $Q^*(k)$ (nagy valószínűséggel) *reálisan ellentmondásmentes.*

3.4. Egy ismeretelméleti konklúzió

Be kell látnunk, hogy ha κ és k értékeit (11), illetve (14) alapján választjuk, úgy Q(k)-aritmetika (illetve $Q^*(k)$-aritmetika már akár (15) választása esetén is) *reálisan ellentmondásmentes.*

Be kell látnunk továbbá, hogy nem áll módunkban különbséget tenni a (*klasszikus logika szerinti*) *„tényleges”* és a (dolgozatunk szerinti) *reálisan ellentmondásmentes* elméletek között, így (ismeretelméletileg) ez utóbbiakat is kénytelenek vagyunk *teljes értékű elméleteknek* tekinteni.

4. A valós számok általános elméletének alapjai

A *valós számokat* (amik összességét $\mathbb{R}$-rel jelöljük) nem a *természetes számokból* származtatjuk (meglehetősen nehézkes és vitatható gondolatmenet eredményeként), hanem olyan *önálló fogalomként* kezeljük, melynek a *természetes számokkal* való vitathatatlanul szoros kapcsolatát a továbbiakban is változatlanul fenn kívánjuk tartani.

A *valós számokhoz* (mint tőlünk függetlenül objektíven létező entitásokhoz) az alábbi axiómákkal kifejezett tulajdonságokat rendeljük:

4.1. Axióma.

A. Test axiómák:

(i) A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza *testet alkot*, melyben az alábbiak kerülnek definiálásra:

• két konstans (nevezetesen a „0” és az „1” elem), valamint

• két művelet (nevezetesen a „+” összeadás és a „·” szorzás).

(ii) E két konstansra és két műveletre $\mathbb{R}$-ben érvényes axiómák az alábbiak:

• mindkét művelet *kommutatív*, azaz:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$, valamint $a \cdot b = b \cdot a$;

• mindkét művelet *asszociatív*, azaz:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a+(b+c) = (a+b)+c,$ valamint $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c;$

• e két művelet együttesen *disztributív*, azaz:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$

• a „0" elem *additív*, az „1" elem pedig *multiplikatív* egységet képez, azaz:

$\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a,$ valamint $a \cdot 1 = a;$

• $\mathbb{R}$-ben minden elemnek létezik *additív inverze*, azaz:

$\forall a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $x \in \mathbb{R},$ hogy $a + x = 0;$

• $\mathbb{R}$-ben minden a $\neq 0$ elemnek létezik *multiplikatív inverze*, azaz:

$\forall a \in \mathbb{R}$ és a $\neq 0$ esetén van olyan $x \in \mathbb{R},$ hogy $a \cdot x = 1.$

Megjegyzés. Az utóbbi két *inverzt* $x = -a$, illetve $x = a^{-1}$ értékként is jelöljük.

B. Rendezési axiómák:

(i) A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza *rendezett testet* alkot, melynek egyetlen rendezési relációja van, amit „<"-vel jelölünk.

(ii) E rendezési relációra $\mathbb{R}$-ben az alábbi axiómák érvényesek:

• $0 < 1;$

• $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén ha $a < b,$ akkor egyúttal $a + c < b + c;$

• $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ és $0 < c$ esetén ha $a < b,$ akkor egyúttal $a \cdot c < b \cdot c.$

C. Közbensőérték axióma:

Ha egy *polinom* egy *zárt intervallum* egyik végén *pozitív*, másik végén *negatív* értéket vesz fel, úgy az *intervallumnak* van olyan belső pontja, ahol a *polinom* értéke pont *zérus*.

D. Kapcsolat a természetes számokkal:

(i) Létezik olyan $f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(x)$ függvény, mely a *természetes számokat* egyértelműen leképzi a *valós számok* körébe úgy, hogy:

• $f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(0) = 0;$

• $f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(\mathrm{S}0) = 1;$

• $f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(\mathrm{S}m) = f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(m) + 1.$

(ii) Archimedesi axióma:

- minden $a \in \mathbb{R}$-hez van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy

$$f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(m) \leq |a| < f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(\mathrm{S}m).$$

(iii) Rekurzíven definiált *valós függvények* axiómája:

- ha f *polinom*, akkor $g = f$ *rekurzív függvény*;
- ha g_1 és g_2 *rekurzív függvények*, akkor $g = g_1 + g_2$, valamint $g = g_1 \cdot g_2$ ugyancsak *rekurzív függvények*;
- ha $g_1(x)$ *rekurzív függvény*, m pedig *számváltozó*, akkor $g_1 = g\left[f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(m)\right]$ szintén *rekurzív függvény* (az m természetes számmal, mint paraméterrel);
- ha g_0 és $g_1(m,x)$ *rekurzív függvények*, és m egy $\mathbb{N}_0$-beli *számváltozó*, akkor az alábbi összefüggéssel definiált $g(m)$ ugyancsak *rekurzív függvény*:

  $g(0) = g_0$;

  $g(\mathrm{S}m) = g_1\left[m, g(m)\right]$.

(iv) A *teljes indukció elvének* $\mathbb{R}_0$-beli alkalmazhatósága:
Ha $g(\mathrm{x})$ egy (az előbbi pont szerint definiált) *rekurzív függvény*, m pedig egy $\mathbb{N}_0$-beli *számváltozó*, amelyre az alábbi összefüggések fennállnak:

$$g(0) = 0; \quad \text{valamint}$$

$$\forall(m \in \mathbb{N}_0)\left\{[g(m) = 0] \to [g(\mathrm{S}m) = 0]\right\}; \tag{16}$$

akkor egyúttal az alábbi összefüggés is fennáll:

$$\forall(m \in \mathbb{N}_0)\left[g(m) = 0\right]. \tag{17}$$

Megjegyzés.

– Axiómarendszerünkben kerültünk minden halmazelméleti alapot, mivel Q(k)-aritmetika inkompatibilis a valós számok axiomatizálásához alapul választott Zermelo–Fraenkel-axiómarendszerrel (létezik Q(k)-aritmetikával kompatibilis *általánosított halmazelmélet* is, ennek felvázolására azonban jelen dolgozat keretein belül nem vállalkozhattunk).

– Ha a *valós számokat* (a jelen dolgozatban alkalmazott gyakorlattól eltérően) halmazelméleti alapon axiomatizáljuk, úgy a C. és D. axiómák helyett elegendő az egyedüli „*teljességi axiómára*” hagyatkozni, mely szerint „a *valós számok* minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának van $\mathbb{R}$-beli legkisebb felső határa”.

– A C. axiómában szereplő *polinomokat* az alábbiak szerint definiáljuk:

• ha *a valós szám*, úgy $f = a$ egy *polinom*;

• ha x egy *valósszám-változó*, akkor $f = x$ egy *polinom*;

• ha f_1 és f_2 *polinomok*, akkor $f = f_1 + f_2$ is egy *polinom*;

• ha f_1 és f_2 *polinomok*, akkor $f = f_1 \cdot f_2$ is egy *polinom*.

– A D. axióma hivatott arra, hogy (halmazelméleti alapok hiányában) megteremtse a kapcsolatot a *valós számok* és a *természetes számok* között, és (egyebek mellett) lehetővé tegye (a 2. fejezet I. f) (ii) pontjában mondottak értelmében azonban csakis az $\mathbb{N}_0$-számok körében) a *rekurzíven definiált függvények* fogalmának bevezetését, valamint a *teljes indukció elvének* $\mathbb{R}_0$-beli alkalmazhatóságát is.

– Mivel – a D. 1. axióma értelmében – minden *m természetes számnak* van $\mathrm{m} = f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(m)$ *valós számbeli* megfelelője, ezért nem okozhat félreértést, ha a továbbiakban m-nek az *m valós szám*-megfelelőjét egyszerűen csak m-mel jelöljük.

Most pedig következzék néhány definíció, hogy azután majd rátérhessünk a *valós számok* dolgozatunkban javasolt új *általános elméletének* néhány függvénytani vonatkozására.

4.1. Definíciók.

a) Valamely a valós számot akkor, és csakis akkor nevezünk $\mathbb{R}_0$-számnak, ha van olyan m és n $\mathbb{N}_0$-beli *természetes szám*, hogy $|a| = m/n$.

b) A valós számok körében értelmezett *függvények* (beleértve a *folytonos* és az adott intervallumon belül *egyenletesen folytonos* függvényeket is) fogalma és definíciója az új, általános matematikai rendszerben is megegyezik a klasszikus elméletben megszokottal.

c) Az alábbi módon képzett $f(x)$ *valós függvényeket* tekintjük *alapfüggvénynek*:

• ha $f_1(x)$ egy *rekurzív függvény*, akkor $f(x) = f_1(x)$ egy *alapfüggvény*;

• ha $f_1(x)$ és $f_2(x)$ *alapfüggvények*, akkor $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, illetve (feltéve, ha van olyan x, hogy $f(x)_2 \neq 0$) $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ ugyancsak alapfüggvények.

d) Az ${}^{©}f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy az az $f(x)$ függvény $\mathbb{R}_0$-*reprezentációja*, ha:

- ${}^{©}f(x)$ egy *alapfüggvény*, valamint ha
- minden $\mathbb{R}_0$-beli *a valós számra*: $f(a) = {}^{©}f(a)$.

e) Az $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$ függvényről azt mondjuk, hogy az az $f(\xi)$ függvény $[x_0, x]$ intervallumra vonatkozó *határozott integrálja*, ha az kielégíti az alábbi kritériumokat:

(i) $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x_0\} = 0$;

(ii) $\alpha \cdot \mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\} + \beta \cdot \mathrm{I}\{g(\xi), x_0, x\} = \mathrm{I}\{\alpha \cdot f(\xi), x_0, x\} + \mathrm{I}\{\beta \cdot g(\xi), x_0, x\}$;

(iii) $\mathrm{I}\{f(\xi), x_1, x_2\} + \mathrm{I}\{f(\xi), x_2, x_3\} = \mathrm{I}\{f(\xi), x_1, x_3\}$;

(iv) $(\exists M)(\exists m)\{(\forall x)[(x_1 \leq x \leq x_2) \to (M \geq f(x) \geq m)] \to$
$\to [M \cdot (x_2 - x_1) \geq \mathrm{I}\{f(\xi), x_1, x_2\} \geq m \cdot (x_2 - x_1)]\}$,

ahol α, β, m és M *valós számok.*

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a 4.1. definíciók e) pontja értelmében (valamint a *klasszikus matematika* gyakorlata szerint) definiált $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$ nem képez *valós függvényt.*

4.1. Tétel. *Ha m és n tetszőleges $\mathbb{N}_0$-számok, x_0 és x pedig tetszőleges valós számok, $\delta = \frac{x - x_0}{n}$, valamint $x_i = x_0 + i \cdot \delta$, akkor mindig fennáll, hogy:*

$$\begin{aligned} \frac{x^{m+1} - x_0^{m+1}}{m+1} &> \sum_{i=1}^{n} (\delta \cdot x_i^m) > \mathrm{I}\{x^m, x_0, x\} > \\ &> \sum_{i=0}^{n-1} (\delta \cdot x_i^m) > \frac{(x-\delta)^{m+1} - (x_0 - \delta)^{m+1}}{m+1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Bizonyítás.
Könnyen ellenőrizhető, hogy az alábbi összefüggés minden i-re $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ fennáll:

$$\begin{aligned} \frac{(x_i + \delta)^{m+1} - x_i^{m+1}}{m+1} &> (x_i + \delta)^m \cdot \delta > \mathrm{I}\{x^m, x_i, x_{i+1}\} > \\ &> x_i^m \cdot \delta > \frac{x_i^{m+1} - (x_i - \delta)^{m+1}}{m+1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Összegezve (19)-et $i = 0$-tól egészen $n-1$-ig, közvetlenül kapjuk (18)-at. □

Észre kell vennünk, hogy a 4.1. tételben n értéke $\mathbb{N}_0$-szám, amihez két megjegyzés kívánkozik:

– Csak akkor van módunk (D. 3. és D. 4. értelmében) $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$-t definiálni és (18)-at levezetni, ha felvállaljuk az n értékére (hogy az $\mathbb{N}_0$-szám) tett jelentős megkötést.

– Q(k)-aritmetika **Q9** axiómájából egyértelműen következik, hogy $n < k$, így a *klasszikus matematikában* megszokott $n \to \infty$ határátmenet itt tehát most nem alkalmazható.

Ebből következően n minden lehetséges értékénél az $\mathrm{I}\{x^m, x_0, x\}$ függvény *alsó* és *felső* korlátjának – (18) *jobb*, illetve *baloldalának* – a különbsége nagyobb egy jól definiált (x_0, x és k értékeivel kifejezhető) *pozitív valós számnál*, és így $\mathrm{I}\{x^m, x_0, x\}$ nem képez *valós függvényt*.

5. Az analízis általános elméletének alapjai

A *valós számok* 4.1. pont szerinti axiómái önmagukban nem elegendőek a függvények (*klasszikus analízisben* megszokott elvárások szerinti) *integráljának* a származtatására, így az *analízis általános elméletének* megalapozásához még további axiómákra van szükségünk.

Ezen kiegészítő axiómák megfogalmazásánál figyelembe kell vennünk a *valós számok* tulajdonságainak $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}_0$ szerinti különbözőségét, illetve sajátos kettősségét.

Azt mondhatjuk, hogy $\mathbb{R}$ képviseli a *valós számok* (minden „finom" részletre is kiterjedő) „*mikro-struktúráját*", és $\mathbb{R}_0$ pedig annak (a részleteket „elnagyoló") *makro-struktúráját.*

5.1. Axióma.

E. Az integrálfüggvény axiómái:

(i) A *valós számok* körében értelmezett minden egyes *egyenletesen folytonos* $f(\xi)$ függvényhez és $[x_0, x]$ zárt intervallumhoz egyértelműen tartozik az $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$ *integrálfüggvény*, mégpedig oly módon, hogy az kielégíti a 4.1. definíciók e) pontban rögzített mind a négy integrálkritériumot. Az $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$ *integrálfüggvényt* (a klasszikus integráltól való megkülönböztetés céljából) a továbbiakban gyakran csak $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\} \equiv \int_{x_0}^{x} f(\xi)\Delta\xi$-vel jelöljük.

(ii) Az $f(\xi) = \xi^m$ függvény *integrálfüggvényének* $\mathbb{R}_0$-*reprezentációjára* az alábbi összefüggés áll fenn:

$$^{\copyright}\mathrm{I}\{\xi^m, x_0, x\} = \frac{(x-\gamma)^{m+1}}{m+1} - \frac{(x_0-\gamma)^{m+1}}{m+1},$$

ahol is x_0 és x $\mathbb{R}_0$-számok, γ pedig egy (kellően kis) *valós szám*, ami az analízis új *általános elméletének* alapvető állandóját képezi.

(iii) Ha az *egyenletesen folytonos* $f_1(\xi)$ és $f_2(\xi)$ *valós függvények* $\mathbb{R}_0$-*reprezentációi* megegyeznek, azaz:

$$^{©}f_1(\xi) = {}^{©}f_2(\xi),$$

akkor minden x_0-ra és x-re egyúttal az alábbi összefüggés is fennáll:

$$^{©}\mathrm{I}\{f_1(\xi), x_0, x\} = ^{©}\mathrm{I}\{f_2(\xi), x_0, x\}.$$

F. Az analízis általános elméletének további kiegészítő axiómái:

(i) Ha a $g(x)$ *valós függvénynek* létezik a $^{©}g(x)$ $\mathbb{R}_0$-*reprezentációja*, akkor $g(x)$-hez mindig tartozik egy (és csakis egy) $f(x)$ függvény oly módon, hogy minden x_0 és x *valós számok* mellett az alábbi összefüggés fennáll:

$$^{©}\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\} = ^{©}g(x) - ^{©}g(x_0). \tag{20}$$

Az ily módon definiált $f(x)$ függvényt $g(x)$ *deriváltjának* nevezzük, és a klasszikus deriválttól való megkülönböztetés céljából $f(x) = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$-vel jelöljük.

(ii) Ha $g(x) = 1(x)(= 1)$; $g(x) = x$; vagy $g(x) = u(x) \cdot v(x)$ (ahol is $u(x)$ és $v(x)$ *deriválható függvények*), akkor az alábbi összefüggések fennállnak:

$$\frac{\Delta 1(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\Delta x}{\mathrm{d}x} = 1,$$

$$^{©}\frac{\Delta\,(u(x)\cdot v(x))}{\mathrm{d}x} = {}^{©}\frac{\Delta u(x)}{\mathrm{d}x} \cdot v(x+\gamma) + u(x+\gamma) \cdot {}^{©}\frac{\Delta v(x)}{\mathrm{d}x}.$$

(iii) Ha $\eta(x)$ és $\psi(x)$ *deriválható függvények*, melyekre az $x_0 \le \xi \le x$ intervallumon belül az $y = \eta[\psi(\xi)]$ függvényérték mindenütt értelmezett, $h(x)$-t pedig úgy definiáljuk, hogy

$$h(x) = \eta[\psi(x)] \cdot {}^{©}\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x},$$

akkor:

$$\mathrm{I}\{\eta(\xi), \psi(x_0), \psi(x)\} = \mathrm{I}\{h(\xi), x_0, x\}. \tag{21}$$

Az alábbiakban egy rövid áttekintést adunk az *analízis általános elmélete* 5.1. pontban összefoglalt axiómáinak néhány fontosabb következményéről.

E következmények többnyire egyszerű, (mondhatni triviális) bizonyításától itt most eltekintünk, ezek igazolását az olvasóra bízzuk.

5.1. Következmény. *Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható függvények, α és β pedig tetszőleges valós számok, úgy az alábbi összefüggések (mint 5.1. axiómák közvetlen* *következményei) fennállnak:*

$$\frac{\overset{©}{\Delta}\left(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\right)}{\Delta x}=\alpha\cdot\frac{\overset{©}{\Delta} f(x)}{\Delta x}+\beta\cdot\frac{\overset{©}{\Delta} g(x)}{\Delta x}, \tag{22}$$

$$\frac{\Delta x^m}{\Delta x}=m\cdot(x+\gamma)^{m-1}, \tag{23}$$

$$\frac{\overset{©}{\Delta}\dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x}=-\frac{\dfrac{\overset{©}{\Delta} g(x)}{\Delta x}}{g^2(x+\gamma)}, \tag{24}$$

$$\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=\frac{dg(x+\gamma)}{dx}. \tag{25}$$

Ha pedig $f(x)$ egy polinom, úgy fennáll:

$$\overset{©}{\int_{x_0}^{x}} f(\xi)\Delta\xi=\int_{x_0}^{x} f(\xi-\gamma)\mathrm{d}\xi. \tag{26}$$

Megjegyzés.

- Ha a $g(x)$ *valós függvénynek* létezik a (20) szerinti $f(x)$ *derivált-függvénye*, akkor $g(x)$ függvényt *deriválható függvénynek* tekintjük (illetve nevezzük).
- (25) és (26) ugyanazon függvények *klasszikus* és az *új általános elmélet* szerint képzett *deriváltjai* és *integráljai* közötti szoros összefüggést tárják fel.
- A (22)–(26) összefüggésekben szereplő γ (mint látni fogjuk) kellően kis *valós szám*, ami az *analízis új általános elméletének* alapvető *állandóját* képezi, és amelyről azt gondoljuk, hogy (a Bolyai geometria δ állandójához hasonlóan) tapasztalati úton határozható meg.

E fejezet további részében megmutatjuk, hogy ha $0<\gamma<1/k$ (ahol k a **Q9** axiómában szereplő *természetes szám*), úgy a *valós analízis* 4.1. és 5.1. axiómacsoporttal meghatározott *új általános elmélete reálisan ellentmondásmentes.*

5.1. Tétel. *Ha $k\geq k$ (κ), és $0<\gamma<1/k$, akkor a valós analízis 4.1. és 5.1. axiómacsoporttal meghatározott új általános elmélete reálisan ellentmondásmentes.*

Bizonyítás. Az 5.1. tétel bizonyításához négy körülményt vizsgálunk meg, és ezen belül két felmerülő ellentmondás-gyanúról mutatjuk meg, hogy azok teljességgel alaptalanok.

a) Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy a 4.1. axiómacsoport A., B., C. és D. axiómái a *valós számok* klasszikus axiómarendszerének olyan részét képezik, melyek k-tól és γ-tól teljes mértékben függetlenek, így – a klasszikus elméletből következően – önmagukban egy ellentmondásmentes rendszert képeznek. Itt kell ugyanakkor megemlítenünk, hogy ha elfogadnánk a halmazelmélet Zermelo-Fraenkel-féle (ZFC) elsőrendű axiómarendszerét mint kiinduló alapot (mint ahogy azt a 4.1. D. axiómákkal kapcsolatos első megjegyzés értelmében nem tesszük), úgy mindezen axiómák a ZFC következményeként volnának származtathatók.

b) Az 5.1. E. axiómákkal kapcsolatban pusztán egyetlen tennivalónk van, nevezetesen annak igazolása, hogy ha a Q(k) aritmetika *reálisan ellentmondásmentes* (mint ahogy azt a 2.2. tételként már bizonyítottuk), továbbá $0 < \gamma < 1/k$ $(= 1/k(\kappa))$ fennáll, úgy az 5.1. E. ii) axióma nem mond ellent a 4.1. definíciók e) pontban megfogalmazott integrál-kritériumoknak, és ezen belül különösen a (iv) kritériumnak. Figyelembe véve, hogy (az 5.1. E. ii) axióma értelmében) x_0 és x $(> x_0)$ $\mathbb{R}_0$-számok, valamint az 5.1. tétel feltevése értelmében $0 < \gamma < 1/k$, az alábbi összefüggés fennáll:

$$x > x_0 + 2 \cdot \gamma \quad \text{és} \quad \frac{(x_0 + \gamma)^{m+1} - (x_0 - \gamma)^{m+1}}{m+1} > x_0^m \cdot 2 \cdot \gamma.$$

Ebből rögtön következik, hogy:

$$x^{m+1} \cdot (x - x_0) > \frac{(x - \gamma)^{m+1} - (x_0 - \gamma)^{m+1}}{m+1} > x_0^{m+1} \cdot (x - x_0),$$

azaz a Q(k) aritmetikában az 5.1. D. ii) axióma kielégíti a „4.1. e) (iv)" integrál-kritériumot.

c) Az 5.1. F. axiómacsoport első két axiómája biztosan nem vezet ellentmondásra:

- Az i) axiómával nem lehet gondunk, hiszen az semmi mást nem mond ki, mint azt, hogy (a klasszikus elmélettel megegyezően) a *derivált* az *integrál* inverze.
- Hasonlóan problémamentes a ii) axióma is, mely (a klasszikus elmélettel egyezően) azt mondja ki, hogy a *derivált-operátor* $\mathbb{R}_0$-*reprezentációja* a *valós függvények* összeadásával és szorzásával szemben zárt.

d) Az 5.1. F. iii) axiómával kapcsolatban már bonyolultabb a helyzetünk, állításunk igazolásához egy látszólagos ellentmondást kell feloldanunk.

- Legyenek $\eta_m(x)$ és $\psi_n(x)$ m-ed, illetve n-ed rangú *polinomok* és legyen továbbá $\phi_{m+1}(x)$ az $\eta_m(x)$ függvény *integrálfüggvénye.* Ekkor $\eta[\psi(x)]$

$m \cdot n$-ed fokú *polinomot* képez, melyre – (16) és (17) alkalmazásával – a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\overset{\copyright}{\int\limits_{\xi=x_0}^{x}} \left\{ \eta_m[\psi_n(\xi)] \cdot \frac{\Delta\psi_n(\xi)}{\Delta\xi} \right\} \Delta\xi = \\
&= \overset{\copyright}{\int\limits_{\xi=x_0}^{x}} \left\{ \frac{\mathrm{d}\phi_{m+1}\,[\psi_n\,(\xi) + \gamma}{\mathrm{d}\psi_n(\xi)} \cdot \frac{\mathrm{d}\psi_n(\psi+\gamma)}{\mathrm{d}\xi} \right\} \Delta\psi = \\
&= \int\limits_{\xi=x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\phi_{m+1}[\psi_n(\xi-\gamma)+\gamma]}{\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}\xi = \\
&= [\phi_{m+1}(\psi_n(\xi-\gamma)+\gamma)]_{\xi=x_0}^{x}\,.
\end{aligned} \tag{27}$$

Ugyanakkor (27) baloldalát az 5.1. F. iii) axióma segítségével (mindenféle levezetés nélkül) közvetlenül is megkaphatjuk, ami viszont az alábbi összefüggést eredményezi:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\xi=x_0}^{x} \left\{ \eta_m[\psi_n(\xi)] \cdot \frac{\Delta\psi_n(\xi)}{\Delta\xi} \right\} \Delta\xi = \\
&= \int\limits_{\tau=\psi(x_0)}^{\psi(x)} \eta_m(\tau)\Delta\tau = [\phi_{m+1}(\psi_n(\xi))]_{\xi=x_0}^{x}\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

– (27) és (28) összevetése egy látszólagos ellentmondásra utal, mely az alábbi gondolatmenet alapján azonban könnyen feloldható.

– Emlékezzünk vissza, hogy az 5.1. E. ii) axióma pusztán csak az $\mathbb{R}_0$-számok körében rendel konkrét értéket valamely *polinom integrálfüggvényéhez*, következésképpen $\phi m(x)$ polinom is csak az $\mathbb{R}_0$-számok körében tölti be az *integrálfüggvény* szerepét. Mindebből az következik, hogy (27) és (28) akkor, és csakis akkor mond ellent egymásnak, ha van olyan ξ $\mathbb{R}_0$-szám, hogy a $\psi_n(\xi)$ és $\psi_n(\xi-\gamma)+\gamma$ egyaránt $\mathbb{R}_0$-számot ad függvényértékül. Márpedig könnyen belátható, hogy ha $\psi_n(\xi)$ egy polinom (ahogy azt feltételeztük), úgy $\psi_n(\xi)$ és $\psi_n(\xi-\gamma)+\gamma$ nem eredményezhet egyaránt $\mathbb{R}_0$-számot, és így az említett ellentmondás valóban csak látszólagos.

e) Mindezzel 5.1. tételünket igazoltuk, azaz a *valós analízis* felvázolt *általános elmélete reálisan ellentmondásmentes*, és így nem lehet okunk kételkedni annak helyességében. □

6. Az általános elmélet néhány várható következménye

E fejezetben az *analízis általános elméletének* néhány várható következményét ismertetjük.

I. Egy lehetőség γ értékének numerikus számításokkal való meghatározására

Vizsgálataink előfutárát képező [5] dolgozatban azt állítottuk, hogy az alábbi összeg:

$$\mathrm{B}(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{16^i} \cdot \left(\frac{8}{8i+1} - \frac{8}{8i+2} - \frac{4}{8i+3} - \frac{8}{8i+4} - \right. \\ \left. - \frac{2}{8i+5} - \frac{2}{8i+6} + \frac{1}{8i+6} \right) \tag{29}$$

nagypontosságú kiszámolásával (és a klasszikus elmélet szerinti $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{B}(n) = 0$ határérték képzésével) eldönthető, hogy matematikai rendszerünk PA-konform-e, vagy sem.

Hivatkozott állításunk megerősítésére az alábbiakban megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty_{N_0}} \mathrm{B}(n) \approx 54,5 \cdot \gamma, \tag{30}$$

azaz (29) értékének nagypontosságú kiszámításával egyúttal megkaphatjuk γ értékét is.

Megjegyzés. A (30)-ban alkalmazott ∞_{N_0} jellel azt kívántuk érzékeltetni, hogy itt a határérték-képzésnél mindvégig az $\mathbb{N}_0$-számok körében maradunk.

6.1. Következmény. *Ha „B(n)"-t (29)-cel definiáljuk és δ-val jelöljük az alábbi határérték-kifejezést:*

$$\delta = \lim_{n\to\infty_{N_0}} \mathrm{B}(n),$$

úgy δ értékére az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\delta \approx 54,5 \cdot \gamma. \tag{31}$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő függvényeket:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{1}{1-x}; \\ \psi_1(x) &= \sqrt{2} \cdot x - x^2; \\ \psi_2(x) &= x^2; \\ h_1(x) &= \eta[\psi_1(x)] \cdot \frac{^{\copyright}\Delta\psi_1(x)}{\Delta x}; \\ h_2(x) &= \eta[\psi_2(x)] \cdot \frac{^{\copyright}\Delta\psi_2(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Mivel $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ és $\psi_1(1/\sqrt{2}) = \psi_2(1/\sqrt{2})$, ezért az 5.1. F. iii) axióma alapján kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}\left\{h_1(x), 0, 1/\sqrt{2}\right\} &= \mathrm{I}\left\{\eta(x), \psi_1(0), \psi_1\left(1/\sqrt{2}\right)\right\} = \\ &= \mathrm{I}\left\{\eta(x), \psi_2(0), \psi_2\left(1/\sqrt{2}\right)\right\} = \mathrm{I}\left\{h_2(x), 0, 1/\sqrt{2}\right\}.\end{aligned}$$

Ugyanakkor viszont (22)-ből, majd (21)-ből következően kapjuk:

$$\begin{gathered} h_1(x) = \frac{\sqrt{2} - 2x - 2\gamma}{1 - \sqrt{2} \cdot x + x^2}, \\ h_2(x) = \frac{2x + 2\gamma}{1 - x^2}, \\ \overset{\copyright}{\int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2} - 2x - 2\gamma}{1 - \sqrt{2} \cdot x + x^2} \Delta x - \overset{\copyright}{\int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}}} \frac{2x + 2\gamma}{1 - x^2} \Delta x = 0. \end{gathered}$$

Hosszabb számítással könnyen ellenőrizhető, hogy ebből az alábbi összefüggésre juthatunk:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2} - 2x - \sqrt{2}x^2 - 4x^3 - \sqrt{2}x^4 - 2x^5 + \sqrt{2}x^6}{1 - x^8} \Delta x - \\ &- 2\gamma \cdot \int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1 - \sqrt{2} \cdot x + x^2} \mathrm{d}x - 2\gamma \cdot \int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1 - x^2} \mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Ha kiindulunk az 5.1. E. ii) axiómából és figyelembe vesszük, hogy $\gamma \gg 1$, úgy a (32)-ben szereplő $\int_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8} \Delta x$ tagokra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\Delta x = \int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i}\Delta x \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1/16^i}{2^{k/2}\cdot(8i+k)} - \gamma\cdot\frac{16/15}{2^{(k-1)/2}}.$$

Mindezen részeredmények felhasználásával és egy hosszadalmas (de mindvégig egyszerű, elemi lépésekből álló) levezetés eredményeként végül az alábbi eredményt kapjuk:

$$\delta = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\cdot\left(\frac{8}{8i+1} - \frac{8}{8i+2} - \frac{4}{8i+3} - \frac{8}{8i+4} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{8i+5} - \frac{2}{8i+6} + \frac{1}{8i+6}\right) \approx 54,5\cdot\gamma,$$

ami egyúttal bizonyítja a 6.1. következményben állított (31) összefüggést. □

Várakozásunk szerint $\gamma < 10^{-20}$, következésképpen δ meghatározásához legalább 10^{20} tizedes-jegy (vagy inkább hexadecimális jegy) pontosságú számításokra van szükség.

Mai tapasztalataink szerint ilyen pontosságú számítások elvégzésére csak a BBP-féle számjegy-kinyeréses módszer [11] ad esélyt, mely a számításokat nem a teljes számsorra, hanem csak a kérdéses számjegyekre (a mi esetünkben pl. a 10^{20}. pozíciótól kezdődő számjegy-sorra) vonatkozóan végzi el.

II. Gondolatok eredményeink fizikában történő alkalmazhatóságáról

Az előbb láttuk, hogy (legalábbis elvben) reális esélyünk van γ értékének (számítógéppel támogatott) nagypontosságú numerikus számításokon alapuló meghatározására.

Az alábbiakban néhány gondolatot vetünk fel, illetve lehetőséget vázolunk fel arról, hogy (a) miként lehet dolgozatunk eredményeinek fizikában történő alkalmazásával is eljutni γ értékének reménybeli meghatározásához; továbbá hogy (b) az *általános analízis* miként kínálhat esélyt a kvantumelektrodinamika renormalizációval és regularizációval kapcsolatos anomáliáinak a feloldására.

a) Ha a modern fizikának a *klasszikus analízisre* épülő mai elméletét az *általános analízisre* adaptáljuk, úgy (ez utóbbiban szereplő újabb γ állandó révén) a természetleírásnak egy, a valósághoz a jelenleginél jobban alkalmazkodni képes új változatához juthatunk el. Ennek a lehetőségnek a puszta illusztrálására az alábbiakban röviden felvázoljuk, hogy az *analízis általános elméletében* miként is fog „kinézni" a *kvantummechanika* jól ismert Schrödinger-egyenlete pl. egy szabad részecske stacionáris állapotára.

A *klasszikus analízis* szerint ez a *sajátérték-függvény* az alábbi formát veszi fel:

$$\frac{-h^2}{2M}\cdot\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\cdot\Psi(x), \tag{33}$$

míg ugyanezen sajátérték-függvény az *analízis általános elméletében* az alábbi lesz:

$$\frac{-h^2}{2M} \cdot \left[\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + 2\gamma \cdot \frac{d^3\Psi(x)}{dx^3} \right] = E \cdot \Psi(x). \tag{34}$$

Itt mindenekelőtt azt kell megemlítenünk, hogy (34) származtatásánál egyfelől felhasználtuk a (25) összefüggést, valamint azt, hogy (34) értelemszerűen csak az $\mathbb{R}_0$-számok körére áll fenn. (Ez a megkötés a fizikában nem jelenthet érdemi korlátozást, hiszen a „mérhető" fizikai mennyiségek köre sem lépheti túl az $\mathbb{R}_0$-számok tartományát). A *klasszikus* és az *általános analízishez* tartozó (33) és (34) összehasonlításából jól látszik azok markáns eltérése; ebből következően a (33) és (34) képlethez tartozó sajátenergiaértékek is eltérőek. Ezek a (feltehetően mérhető) eltérések kifejezhetők a (rendkívül kicsi) γ állandó függvényeként, és így ezáltal is lehetőség adódik γ meghatározására.

b) A *kvantumelektrodinamikában* komoly gondot jelentenek a (perturbációs) számítások során óhatatlanul fellépő divergenciák, melyek ugyan a *regularizáció* és a *renormalizálás* módszereivel (a gyakorlatban) elég jól kezelhetőek, melyeknek azonban mindmáig nem létezik kellő matematikai egzaktsággal alátámasztott elméleti alapja.

Álláspontunk szerint az analízis általános elmélete esélyt ad arra, hogy keretein belül e divergenciák kezelhetőek és feloldhatóak legyenek.

A *regularizáció* módszere azon alapszik, hogy a kvantumelektrodinamika divergens integráljait egy bizonyos energiaszintnél „levágják", így téve „végessé" az egyébként divergens integrált.

Úgy tűnik, hogy az *analízis általános elméletében* ennek a módszernek az alkalmazhatósága – az alábbi okfejtés alapján – elméletileg is megalapozható:

- Mint ahogy azt már korábban láttuk, az új elmélet keretein belül az integrálok viselkedését csak az $\mathbb{R}_0$-számok körében tudjuk aritmetikailag is nyomon követni.
- Az előző pontban mondottak alapján hasonlóan tudjuk, hogy a fizikai mennyiségek mérhető értékei sem léphetik sohasem túl az $\mathbb{R}_0$-számok körét.
- Következésképpen logikusnak látszik, hogy az integrálokból az $\mathbb{R}_0$-számok körét meghaladó részt egyszerűen elhagyjuk, és így a „levágást" kellő matematikai szigorúsággal megalapozva elméletileg is igazoljuk.

Ezen érdekes téma további kifejtésére itt most terjedelmi okokból nem vállalkozhattunk.

III. Végezetül dolgozatunk főbb állításainak és következtetéseinek az összegzése

Dolgozatunk legfőbb következtetései és megállapításai az alábbiak szerint összegezhetők:

a) Létezik olyan (kellően nagy) k természetes szám, hogy a Q-aritmetika Q(k) kiterjesztése végül is *reálisan ellentmondásmentes* elméletet eredményez.

b) Nincs érzékelhető különbség az *ellentmondásmentes* és a *reálisan ellentmondásmentes* elméletek között, ezeket ismeretelméleti szempontból egyenrangúnak kell tekintenünk.

c) Az *analízis javasolt új, általános elméletében*:

   – az integrál- és derivált-operátorokhoz csak a valós számok $\mathbb{R}_0$-tartományában van módunk *valós számot* képviselő (egyértelmű) függvényértéket rendelni;

   – az integrál és derivált ezen függvény-értékei egyúttal függvényei γ-nak is, azaz az *analízis általános elmélete* alapvető állandójának;

   – ez a γ-állandó összefüggésben van a Q(k)-aritmetika k konstansával: $0 < \gamma 1/k$.

d) Az *analízis javasolt általános elmélete* jó esélyt ad arra, hogy γ állandójának az értékét (számítógéppel támogatott nagypontosságú numerikus számítások eredményeként) magából a rendszerből határozhassuk meg.

e) Dolgozatunkban arra a következtetésre jutottunk, hogy az Euklideszi geometriához hasonlóan (amelyikről kiderült, hogy számos általánosítása lehetséges, pl. a Bolyai-geometria) az *analízis klasszikus elméletének* is kell, hogy legyen *általánosítása*, ami a fizikusok számára hatékony eszközt nyújthat ahhoz, hogy elméleteiket a mainál talán még jobban közelíthessék a fizikai valósághoz.

f) A dolgozatunkban *bemutatott új elmélet* pusztán csak egy lehetséges módját adja az *analízis általánosításának*, és nem kívánja kizárni, hogy más módszerekkel talán még hatékonyabb *általános matematikai elméletekhez* juthassunk el.

Hivatkozások

[1] Van Dantzig: *Is* $10^{10^{10}}$ *a Finite Number?* Dialectica, Vol. **9**. 3/4, 1955.

[2] Rohit J. Parikh: *Existence and Feasibility in Arithmetic.* Journal of Symbolic Logic, **36** (1971), 494–508.

[3] Mirco A. Mannucci and Rose M. Cherubin: *Model Theory of Ultrafinitism I.*: Fuzzy Initial Segments of Arithmetic (Preliminary Draft), http://aps.arxiv.org/PS_cache/cs/pdf/0611/0611100v1.pdf

[4] Buss, S. R.: *First-Order Proof Theory of Arithmetic Handbook of Proof Theory.* Edited by S. R. Buss, Elsevier Science B. V. 1998

[5] Rázga, T.: *A természetes számok Peano aritmetikáját is vitató új, általános elmélete.* Alkalmazott Matematikai Lapok (Appl. Math. J.), 1994–1998, pp. 139–154.

[6] Petr Hájek, Pavel Pudlak: *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998 (second edition)

[7] Nelson, E.: *Predicative Arithmetic.* Princeton University, 1986.

[8] Harvey M. Friedman: *PHILOSOPHY 536. PHILOSOPHY OF MATHEMATICS.* http://www.math.ohio-state.edu/~friedman/pdf/Princeton536.pdf

[9] Jan Krajicek: *On the Number of Steps in Proofs.* Annals of Pure and Applied Logic, **41** (1989), 163–178.

[10] Rohit J. Parikh: *Some Results on the Length of Proofs.* Transactions of the American Mathematical Society, **177** (1973), 29–36.

[11] David Bailey, Peter Borwein and Simon Plouffe: *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants.* http://www.ams.org/mcom/1997-66-218/S0025-5718-97-00856-9/S0025-5718-97-00856-9.pdf

(Beérkezett: 2008. október 6.)

A POTENTIAL GENERALIZATION OF THE CLASSICAL MATHEMATICS

Tamás Rázga

The notion of *realisticly contradiction-free mathematical theory* is introduced. It is shown that it is equivalent to the classical notion of contradiction-free theory in the sense of epistemology. Potential new theories for the natural numbers and real analysis are suggested. They are realisticly contradiction-free. These theories are more adjustable to the physical reality than the existing ones.