Alkalmazott Matematikai Lapok **32** (2015), 63–77.

MÉRTÉKEK ABSZOLÚT ÉS SZIMMETRIKUS NORMÁKON

LOVAS ATTILA, ANDAI ATTILA

Dolgozatunkban az abszolút és szimmetrikus véletlen normákkal ismertetjük meg az Olvasót. Definiáljuk a normafolyamatot mint speciális sztochasztikus folyamatot, és megmutatjuk, hogy a normafolyamatok szoros kapcsolatban állnak az abszolút és szimmetrikus véletlen normákkal. Egy folytonos idejű egyszerű ugró folyamatot leíró Markov-lánc segítségével konstruálunk egy abszolút és szimmetrikus véletlen normát. Definiáljuk ezen véletlen normák magasabb dimenziós erős és gyenge kiterjesztéseit, továbbá numerikusan kiszámítjuk a konstruált véletlen norma várható értékeként előálló norma egységgömbjét kettő és három dimenzióban.

1. Bevezetés

A normák és az általuk indukált metrikák központi szerepet töltenek be az analízisben. Egy $||.|| : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ normát a $\mathbb{C}^n$ vektortéren *abszolútnak* nevezünk, ha a vektorok normája csupán elemeik abszolút értékétől függ, azaz

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad ||x|| = ||\,|x|\,||,$$

ahol $|.|$ jelöli a vektor elemenként vett abszolút értékét. Egy normát *szimmetrikusnak* mondunk, ha az alábbi feltételt teljesíti

$$\forall \pi \in S_n \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad ||x \circ \pi|| = ||x||,$$

ahol S_n az n-ed rendű szimmetrikus csoportot jelöli. Világos, hogy az analízisben oly gyakran felbukkanó p-normák rendelkeznek a fenti tulajdonságokkal.

Az is nyilvánvaló, hogy egy abszolút és szimmetrikus normát egyértelműen meghatároznak az

$$\mathbb{R}^n_{+,\geq} := \{(x_1,\ldots,x_n)|x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$$

halmazon felvett értékei [2]. Megállapodunk abban, hogy kizárólag olyan normákat fogunk tekinteni, melyek normáltak abban az értelemben, hogy teljesítik a $||(1,0,0,\ldots,0)|| = 1$ *normálási feltételt.*

1.1. Definíció. Legyen $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ valószínűségi mező. Egy $p : \Omega \times \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ leképezést *abszolút és szimmetrikus véletlen normának* nevezünk, ha az a következő feltételeket teljesíti:

(i) A $p(\omega, .) : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ függvény abszolút és szimmetrikus norma $\mathbb{P}$-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén.

(ii) $\forall x \in \mathbb{C}^n \quad p(., x) : \Omega \to [0, \infty)$ egy valószínűségi változó.

A permutáció invarianciából, a normálási feltételből és abból, hogy a norma abszolút, könnyen levezethető, hogy

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \text{esetén} \quad \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,|\, p(\omega, x) \notin [||x||_\infty, ||x||_1]\,\}\right) = 0 \tag{1}$$

teljesül, és az $x \mapsto \mathbb{E}(p(., x))$ hozzárendelés abszolút és szimmetrikus normát határoz meg.

A dolgozat a következőképpen épül fel: A második fejezet három alfejezetre oszlik. A 2.1 és 2.2 alfejezetekben definiáljuk a normafolyamatokat és a normafolyamatok pályaintegrál reprezentációját. A 2.3 alfejezetben bevezetjük a Markov-típusú abszolút és szimmetrikus véletlen normákat.

A harmadik fejezet első felében folytonos idejű Markov-láncok pályaintegráljának kiszámításával foglalkozunk. A harmadik fejezet második felében megkonstruálunk egy konkrét Markov-típusú abszolút és szimmetrikus véletlen normát.

A negyedik fejezetet a magasabb dimenziós általánosításoknak szenteljük. A fejezet egy, a végtelen dimenziós kiterjesztések ekvivalenciájára irányuló nyitott kérdéssel zárul.

Az itt bemutatásra kerülő eredmények angol nyelven is olvashatók [1].

2. Abszolút és szimmetrikus véletlen normák a síkon

2.1. Normafolyamatok

Egy $\mathbb{R}^2_{+,\geq}$-re megszorított szimmetrikus abszolút norma megadható az egységgömbjével, ami pedig paraméterezhető a rajta fekvő pontok y koordinátái segítségével. Ez a megfigyelés motiválja a következő definíciót.

2.1. Definíció. Egy $(X_t)_{t\geq 0}$ valós értékű sztochasztikus folyamatot *normafolyamatnak* nevezünk, ha a realizációi a következő feltételeket teljesítik $\mathbb{P}$-m.b.:

(i) $X_0 = 0$,

(ii) $\forall\, 0 \leq t_1 < t_2 \quad \text{esetén} \quad 0 \leq \dfrac{X_{t_2} - X_{t_1}}{t_2 - t_1} \leq 1,$

(iii) $t \mapsto X_t$ konvex és folytonos.

Az alábbi tétel szerint a normafolyamatokra tekinthetünk úgy is, mint az $\mathbb{R}^2_{+,\geq}$-re megszorított abszolút és szimmetrikus véletlen normák egységgömbjének paraméterezésére.

2.1. Tétel. *Legyen* $(X_t)_{t\geq 0}$ *egy tetszőleges normafolyamat és* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a hozzátartozó valószínűségi mező.*

Ekkor $\mathbb{P}$*-m.m.* $\omega \in \Omega$ *esetén igaz, hogy minden* $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{+,\geq} \setminus \{(0,0)\}$ *vektorhoz egyértelműen létezik* $p \in [||v||_\infty, ||v||_1]$ *úgy, hogy*

$$\frac{v_1}{p} + X_{\frac{v_2}{p}}(\omega) = 1$$

teljesül és a $p : \Omega \times \mathbb{R}^2_{+,\geq} \setminus \{(0,0)\} \to [0,\infty)$ – $\mathbb{P}$*-m.m.* $\omega \in \Omega$*-ra értelmezett – függvény* $p(\{0,0\}) := 0$ *módon definiált kiterjesztése abszolút és szimmetrikus véletlen norma.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\omega \in \Omega$-ra a 2.1. Definícióban szereplő (i)–(iii) feltételek teljesülnek. Legyen $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{+,\geq} \setminus \{(0,0)\}$ egy tetszőleges vektor. A $(0,\infty) \ni p \mapsto \frac{v_1}{p} + X_{\frac{v_2}{p}}(\omega)$ hozzárendelés folytonos és szigorú monoton csökkenő függvényt határoz meg. Továbbá

$$\frac{v_1}{v_1} + X_{\frac{v_2}{v_1}}(\omega) \geq 1$$
$$\frac{v_1}{v_1+v_2} + X_{\frac{v_2}{v_1+v_2}}(\omega) \leq 1$$

is teljesül, mert $0 \leq X_t \leq t$. Ebből következik, hogy egyértelműen létezik olyan $p \in [||v||_\infty, ||v||_1]$, amelyre $\frac{v_1}{p} + X_{\frac{v_2}{p}}(\omega) = 1$ teljesül.

Most vegyük p kiterjesztettjét, és $\omega \in \Omega$ legyen olyan, mint fent volt.

(i) $\forall v \in \mathbb{R}^2_{+,\geq}$ $p(\omega, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, hiszen $p(\omega, v) \in [||v||_\infty, ||v||_1]$.

(ii) $\forall \alpha > 0$ $\dfrac{\alpha v_1}{p(\omega, \alpha v)} + X_{\frac{\alpha v_2}{p(\omega,\alpha v)}} = 1$, ezért $p(\omega, \alpha v) = \alpha p(\omega, v)$.

(iii) Ha $v, w \in \mathbb{R}^2_{+,\geq}$ nem nulla vektorok, akkor a $t \mapsto X_t(\omega)$ függvény konvexitása miatt írhajuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 = \frac{v_1 + w_1}{p(\omega,v) + p(\omega,w)} &+ \frac{p(\omega,v)}{p(\omega,v)+p(\omega,w)} X_{\frac{v_2}{p(\omega,v)}} + \\ &+ \frac{p(\omega,w)}{p(\omega,v)+p(\omega,w)} X_{\frac{w_2}{p(\omega,w)}} \geq \\ &\geq \frac{v_1+w_1}{p(\omega,v)+p(\omega,w)} + X_{\frac{v_2+w_2}{p(\omega,v)+p(\omega,w)}}, \end{aligned}$$

amiből $p(\omega, v+w) \leq p(\omega, v) + p(\omega, w)$ következik.

Azt kaptuk, hogy ha $\omega \in \Omega$ teljesíti a 2.1. Definícióban szereplő $(i) - (iii)$ feltételeket, akkor $p(\omega, .) : \mathbb{R}^2_{+,\geq} \to [0,\infty)$ abszolút és szimmetrikus normát határoz meg.

Legyen $v \in \mathbb{R}^2_{+,\geq}$ egy tetszőleges vektor és $y \in (0, \infty)$. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(p\left(., v\right) < y\right) = \mathbb{P}\left(\frac{v_1}{y} + X_{\frac{v_2}{y}} < 1\right) = \mathbb{P}\left(X_{\frac{v_2}{y}} < 1 - \frac{v_1}{y}\right),$$

amiből következik, hogy $p\left(., v\right) : \Omega \to [||v||_\infty, ||v||_1]$ egy valószínűségi változó. □

Ha $y \in [||v||_\infty, ||v||_1]$, akkor

$$0 \leq \frac{v_2}{y} \leq \frac{v_2}{v_1 + v_2} \leq 1 \quad \text{és} \quad 0 \leq 1 - \frac{v_1}{y} \leq 1 - \frac{v_1}{v_1 + v_2} \leq 1$$

teljesül. Következésképpen elegendő a

$$(t, x) \mapsto \mathbb{P}\left(X_t(.) < x\right)$$

függvény értékeit a $[0, 1]^2$ egységnényzeten meghatározni ahhoz, hogy a véletlen norma eloszlását meghatározzuk.

Az abszolút és szimmetrikus véletlen normák és a normafolyamatok között fennálló fenti megfeleltetés nem kölcsönösen egyértelmű, mert a véletlen norma nem határozza meg egyértelműen az őt származtató normafolyamatot. Mindazonáltal a normafolyamatok ideális jelöltek arra, hogy segítségükkel konkrét abszolút és szimmetrikus véletlen normákat konstruáljunk.

2.2. Normafolyamatok reprezentációi

Láttuk, hogy a normafolyamatok szoros kapcsolatban állnak az abszolút és szimmetrikus véletlen normákkal, ezért érdemes a normafolyamatok reprezentációit vizsgálni. Tudjuk, hogy egy folytonos és monoton növő függvény majdnem mindenütt differenciálható és előáll úgy, mint a majdnem mindenütt létező deriváltjának az integrálfüggvénye [4]. Ha ezt a tételt alkalmazzuk az $(X_t)_{t\geq 0}$ folyamat pályáira, akkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $(Z_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat, amelyre

$$X_t(.) \overset{\mathbb{P}\text{-m.b.}}{=} \int_0^t Z_s(.)\,\mathrm{d}s$$

teljesül, és nyilvánvaló az is, hogy a $(Z_t)_{t\geq 0}$ folyamat relaizációi majdnem biztosan nem negatív, monoton növő, korlátos függvények, 1 felső korláttal.

A $(Z_t)_{t\geq 0}$ folyamat tehát felírható

$$(Z_t)_{t\geq 0} = (\tilde{F} \circ Y_t)_{t\geq 0}$$

alakban is, ahol $(Y_t)_{t\geq 0}$ egy $\mathbb{P}$-m.b. növekvő pályájú sztochasztikus folyamat egy $(S, \leq)$ részben rendezett metrikus téren, $\tilde{F} : S \to [0, 1]$ pedig egy monoton növő függvény. Ezért

$$X_t(.) \overset{\mathbb{P}\text{-m.b.}}{=} \int_0^t \tilde{F} \circ Y_s(.)\,\mathrm{d}s.$$

A fenti pályaintegrál leírásból rövid számolással eljuthatunk egy újabb reprezentációhoz. Ha feltesszük, hogy $\tilde{F}$ egy $(\Lambda, \mathcal{G}, \tilde{\mathbb{P}})$ valószínűségi mezőn értelmezett $\xi \in S$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és tekintjük a $(Y_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatot a ξ-től függetlenül, akkor írható, hogy

$$X_t(.) \overset{\mathbb{P}\text{-m.b.}}{=} \int_0^t \tilde{F} \circ Y_s(.)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \tilde{\mathbb{P}}(\xi < Y_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \int_\Lambda 1_{\xi(\eta)<Y_s(.)}\,\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}(\eta)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_\Lambda \int_0^t 1_{\xi(\eta)<Y_s(.)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}(\eta) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left((t - \tau_\xi(.))_+\right),$$

ahol τ_r az $S \ni r$ szint elérési ideje: $\tau_r = \inf\{s \geq 0 | Y_s \geq r\}$.

2.3. Markov-típusú abszolút és szimmetrikus véletlen normák

2.2. Definíció. Egy abszolút és szimmetrikus véletlen normát *Markov-típusúnak* nevezünk, ha van olyan normafolyamat, amely a szóban forgó véletlen normát származtatja, és ezen normafolyamat pályái Markov-folyamatok pályáinak integrálfüggvényeként állnak elő.

A Markov típusú abszolút és szimmetrikus véletlen normák sem nem túl triviálisak, sem nem túl bonyolultak ahhoz, hogy viselkedésüket legalább véges állapottér esetén meg tudjuk érteni.

Mielőtt továbblépnénk, csupán a teljesség kedvéért néhány elemi tényt ismertetünk a folytonos idejű véges állapoterű Markov-láncokkal kapcsolatban [3].

2.3. Definíció. Egy $(Y_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatot folytonos idejű Markov-láncnak nevezünk, ha egy S megszámlálható állapottéren veszi fel értékeit és memória nélküli, ami azt jelenti, hogy

$$\mathbb{P}\left(Y_t = \beta \,|Y_{t_1} = \alpha_1, \ldots Y_{t_n} = \alpha_n\right) = \mathbb{P}\left(Y_t = \beta \,|Y_{t_1} = \alpha_1\right)$$

teljesül minden $0 < t_1, \ldots, t_n < t$-re és minden $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in S$-re.

Továbbá létezik egy $P : [0, \infty) \to \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S$ leképezés, amelyre fennáll, hogy

$$\forall t \in [0, \infty) \quad \forall \alpha, \beta \in S \quad \mathbb{P}\left(Y_t = \beta \,|Y_0 = \alpha\right) = P(t)_{\alpha\beta}$$

és P az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $P(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^S}$

(ii) $\exists \lim\limits_{t \searrow 0} P(t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^S}$

(iii) $P(t+s) = P(t)P(s)\ \forall t, s \in [0, \infty)$.

A $P(t)$ mátrixot a t időponthoz tartozó átmenet-valószínűség mátrixnak nevezzük.

A 4. Definícióban szereplő (i)–(iii) feltételekből következik, hogy létezik olyan $G \in \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S$ mátrix, melyre $P(t) = e^{tG}$ módon áll elő. Ezt a G mátrixot nevezzük a folytonos idejű Markov-lánc infitezimális generátorának [3].

3. Konkrét példa abszolút és szimmetrikus véletlen normára

3.1. Folytonos idejű Markov-láncok pályaintegrálja

Ebben a pontban folytonos idejű Markov-láncok pályaintegrálját vizsgáljuk. Pollett and Stefanov közölt egy lehetséges eljárást folytonos idejű Markov-lánc pályaintegrál eloszlásfüggvényének kiszámítására [7]. A következő tétel tekinthető a híres Feynman–Kac-formula [6] variánsaként véges állapotterű és folytonos idejű Markov-láncokra. Ez az eszköztár teszi lehetővé, hogy a konstruált Markov-típusú abszolút és szimmetrikus véletlen norma eloszlását kiszámítsuk.

3.1. Tétel. *Legyen $(Y_t)_{t\geq 0}$ egy folytonos idejű Markov-lánc G infinitezimális generátorral a véges S állapottéren, $f : S \to \mathbb{R}$ pedig legyen egy injektív függvény. Ha $(X_t)_{t\geq 0}$ jelöli $f \circ Y$ pályaintegrál folyamatát:*

$$X_t = \int\limits_0^t f \circ Y_s \,\mathrm{d}s,$$

akkor X_t karakterisztikus függvénye a következőképpen fejezhető ki:

$$(\forall y_0 \in S) \quad \mathbb{E}\left(e^{iuX_t} \,|Y_0 = y_0\right) = e^{t(G+iuM_f)}(\mathbf{1})(y_0), \tag{2}$$

ahol $\mathbf{1} : S \to \{1\}$ a konstans 1 függvény, és $M_f : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$ az f függvénnyel való szorzás operátora.

Bizonyítás. A $t \mapsto f(Y_t(\omega))$ hozzárendelés lépcsős függvényt határoz meg minden $\omega \in \Omega$ esetén, ezért $t \mapsto f(Y_t(\omega))$ integrálja Riemann-féle közelítő összegek határértékeként is előáll. Ezt és Lebesgue dominált konvergencia tételét alkalmazva a következőket írhatjuk.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{iuX_t}\,|Y_0=y_0\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(iu\lim_{m\to\infty}\frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m} f\left(Y_{\frac{kt}{m}}\right)\right)\middle| Y_0=y_0\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m} f\left(Y_{\frac{kt}{m}}\right)\right)\middle| Y_0=y_0\right)\end{aligned}$$

Az f függvény injektivitását és az $(Y_t)_{t\geq 0}$ folyamat Markov-tulajdonságát felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m} f\left(Y_{\frac{kt}{m}}\right)\right)\middle| Y_0=y_0\right)=\\ &=\sum_{y_1,\ldots,y_m\in S}\exp\left(iu\frac{t}{m}\sum_{k=1}^{m} f(y_k)\right)\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m}\left\{f\left(Y_{\frac{kt}{m}}\right)=f(y_k)\right\}\middle| Y_0=y_0\right)\\ &=\sum_{y_1,\ldots,y_m\in S}\prod_{k=1}^{m} e^{\frac{iut}{m}f(y_k)}\mathbb{P}\left(Y_{\frac{kt}{m}}=y_k\middle| Y_{\frac{(k-1)t}{m}}=y_{k-1}\right).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a kapott kifejezés felírható úgy is, mint az $e^{\frac{t}{m}G}e^{\frac{iu}{m}M_f}$ operátor m-szeres kompozíciójának hatása az $\mathbf{1}$ függvényre.

$$\sum_{y_1,\ldots,y_m\in S}\prod_{k=1}^{m} e^{\frac{iut}{m}f(y_k)}\mathbb{P}\left(Y_{\frac{kt}{m}}=y_k\middle| Y_{\frac{(k-1)t}{m}}=y_{k-1}\right)=\left(e^{\frac{t}{m}G}e^{\frac{iut}{m}M_f}\right)^m(\mathbf{1})(y_0)$$

Ha $m\to\infty$ határértéket veszünk és alkalmazzuk a Lie–Trotter-formulát, akkor a kívánt kifejezést kapjuk.

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX_t}\,|Y_0=y_0\right)=\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{t}{m}G}e^{\frac{iut}{m}M_f}\right)^m(\mathbf{1})(y_0)=e^{t(G+iuM_f)}(\mathbf{1})(y_0)$$

□

Vezessük be az alábbi jelöléseket a fenti feltételes karakterisztikus függvényre és a neki megfelelő feltételes eloszlásfüggvényre.

$$\begin{aligned}\varphi(t,u)&=\mathbb{E}\left(e^{iuX_t}\,|Y_0\right)\\ F(t,x)&=\mathbb{P}\left(X_t<x\,|Y_0\right)\end{aligned}$$

Ha a (2) kifejezés t-szerinti deriváltját vesszük, akkor azt kapjuk, hogy φ a következő Cauchy-feladat megoldása:

$$\begin{aligned}\partial_1\varphi&=G\varphi+iuM_f\varphi\\ \varphi(0,u)&=\mathbf{1}\in\mathbb{R}^S.\end{aligned}\tag{3}$$

Legyen ξ egy X_t-től független normális eloszlású valószínűségi változó zérus várható értékkel és σ szórással. Az $X_t+\xi$ simított valószínűségi változó φ_σ-val jelölt karakterisztikus függvénye a (3)-hoz hasonló differenciálegyenlet- rendszernek tesz eleget.

$$\begin{aligned} \partial_1\varphi_\sigma &= G\varphi_\sigma + M_f iu\varphi_\sigma \\ \varphi(0,u) &= e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}}\mathbf{1}\in\mathbb{R}^S \end{aligned}$$

Tegyük fel egy pillanatra, hogy $\partial_1 F_\sigma(t,x)$ létezik, és minden $t\in[0,\infty)$ esetén eltűnik, amint $x\to-\infty$. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \partial_1\varphi_\sigma(t,u) &= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\,F_\sigma(t,\mathrm{d}x) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\int\limits_{[0,t]}\partial_1 F_\sigma(s,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[0,t]}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\,\partial_1 F_\sigma(s,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\,\partial_1 F_\sigma(t,\mathrm{d}x), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}} iue^{iux}\,F_\sigma(t,\mathrm{d}x) &= -\partial_2 F_\sigma(t,x)e^{iux}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int\limits_{\mathbb{R}} iue^{iux}\,F_\sigma(t,\mathrm{d}x) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} -e^{iux}\,\partial_2 F_\sigma(t,\mathrm{d}x), \end{aligned} \tag{4}$$

amiből következik, hogy a $\partial_1 F_\sigma - GF_\sigma + M_f\partial_2 F_\sigma$ függvényhez asszociált előjeles Borel-mérték Fourier–Stieltjes-transzformáltja zérus, azaz

$$\forall t\in[0,\infty),\ \forall u\in\mathbb{R}\quad\text{esetén}\quad \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux}\,\left[\partial_1 F_\sigma - GF_\sigma + M_f\partial_2 F_\sigma\right](t,\mathrm{d}x) = 0.$$

Másfelől pedig

$$\forall t\in[0,\infty)\ \text{-re}\quad \lim_{x\to-\infty}\left[\partial_1 F_\sigma - GF_\sigma + M_f\partial_2 F_\sigma\right](t,x) = 0,$$

amiből következik, hogy F_σ a következő Cauchy-feladat megoldása

$$\begin{aligned} \partial_1 F_\sigma &= GF_\sigma - M_f\partial_2 F_\sigma \\ F_\sigma(0,x) &= \Phi_\sigma(x)\mathbf{1}\in\mathbb{R}^S, \end{aligned} \tag{5}$$

ahol Φ_σ jelöli ξ eloszlásfüggvényét.

Megjegyzés. Az X integrál előállításából az alábbi becslést kapjuk

$$X_t+\xi+m\Delta t \le X_{t+\Delta t}+\xi \le X_t+\xi+M\Delta t,$$

ahol $m = \min_{s \in S} f(s)$ és $M = \max_{s \in S} f(s)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$F_\sigma(t, x - M\Delta t) \leq F_\sigma(t + \Delta t, x) \leq F_\sigma(t, x - m\Delta t),$$

ami felhasználható arra, hogy F_σ parciális deriváltjait a differenciahányadosokon keresztül az alábbi módon megbecsüljük:

$$\begin{aligned} -M\frac{F_\sigma(t,x) - F_\sigma(t, x - M\Delta t)}{M\Delta t} \leq & \frac{F_\sigma(t + \Delta t, x) - F_\sigma(t,x)}{\Delta t} \\ \leq & - m\frac{F_\sigma(t,x) - F_\sigma(t, x - m\Delta t)}{m\Delta t} \end{aligned}$$

(a $\leq$ szimbólum elemenkénti relációt jelöl). Az $\partial_1 F_\sigma(t,x)$ parciális deriváltra a következő becslést kapjuk

$$-M\partial_2 F_\sigma(t,x) \leq \partial_1 F_\sigma(t,x) \leq -m\partial_2 F_\sigma(t,x),$$

amiből következik, hogy a $\lim_{x \to \infty} \partial_1 F_\sigma(t,x) = 0$ feltétel elhagyható. Az $X_t + \xi$ valószínűségi változó gyengén tart X_t-hez, amint $\sigma \to 0$, ezért elég megoldani a (5) Cauchy-feladatot, és venni a $\sigma \to 0$ határértéket, hogy meghatározzuk F értékét annak folytonossági pontjaiban. A következő tétel az F eloszlásfüggvény egy integrálegyenlet előállítását adja meg.

3.2. Tétel. *Ha $(X_t)_{t \geq 0}$ a 3.1. Tételben definiált sztochasztikus folyamat, akkor tetszőleges $y_0 \in S$ esetén az $F(t,x)_{y_0} = \mathbb{P}(X_t < x \,|Y_0 = y_0)$ feltételes eloszlásfüggvény a következő integrálegyenlet megoldásaként kapható meg:*

$$\begin{aligned} F(t,x)_{y_0} = & e^{-t\lambda} 1(x \geq tf(y_0)) + \\ & + \int_0^t \sum_{\sigma \in S \setminus \{y_0\}} F(s, x - (t-s)f(y_0))_\sigma \mathbb{P}(Y_{t-s} = \sigma \,|Y_0 = y_0)\, \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, \mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{6}$$

ahol az Y_s folyamat által az egyes állapotokban töltött idő λ parameterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Bizonyítás. Jelöljük az Y Markov-lánc első ugrásának idejét τ-val. Alkalmazva a teljes valószínűség tételét

$$\begin{aligned} F(t,x)_{y_0} = & \mathbb{P}(X_t < x \,|Y_0 = y_0, \tau \geq t)\, \mathbb{P}(\tau \geq t) + \\ & + \int_0^t \mathbb{P}(X_t < x \,|Y_0 = y_0, \tau = t - s)\, \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

írható, hiszen τ a kezdeti állapottól független. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(X_t < x \,|Y_0 = y_0, \tau \geq t) = 1(x - tf(y_0) \geq 0).$$

Hasonlóan kapható meg az is, hogy

$$\mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, \tau = t - s\right) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S \setminus \{y_0\}} \mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, Y_{t-s} = \sigma, \tau = t - s\right) \mathbb{P}\left(Y_{t-s} = \sigma \,|Y_0 = y_0\right),$$

ami minden $s \in [0, t)$ esetén igaz, továbbá az $(Y_t)_{t \geq 0}$ folyamat Markov tulajdonsága miatt

$$\mathbb{P}\left(X_t < x \,|Y_0 = y_0, Y_{t-s} = \sigma, \tau = t - s\right) = F(s, x - (t-s) f(y_0))_\sigma$$

írható. □

3.2. Abszolút szimmetrikus véletlen norma konstrukciója

Vegyük azt az $(Y_t)_{t \geq 0}$ folytonos idejű Markov-láncot az $S = \{0, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ állapottéren, melynek infinitezimális generátora $G = \lambda_n N \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, ahol

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és a $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paraméter szabályozza a lánc „sebességét”. Az előző pontban ismertetett módon kiszámítjuk az

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{n} Y_s \,\mathrm{d}s$$

pályaintegrál folyamat eloszlásfüggvényét. Minden, legfeljebb n szakaszból álló, szakaszonként lineáris pályájú normafolyamat pályája szerepel az X_t pályái között, így X_t egy mértéket ad meg azon abszolút és szimmetrikus véletlen normákon, melyek egységgömbje egy legfeljebb $4n$ oldalú szabályos sokszög.

A simított valószínűségi változóhoz tartozó Cauchy-feladat felírható úgy, mint

$$\begin{aligned} \partial_1 (F_\sigma)_k + \frac{k}{n} \partial_2 (F_\sigma)_k + \lambda_n (F_\sigma)_k &= \lambda_n (F_\sigma)_{k+1} \\ \partial_1 (F_\sigma)_n + \frac{k}{n} \partial_2 (F_\sigma)_n + \lambda_n (F_\sigma)_n &= 0 \\ (F_\sigma)_k (0, x) &= \Phi_\sigma (x), \end{aligned}$$

ahol $(F_\sigma)_k = \mathbb{P}(X_t + \xi < x | Y_0 = k)$ és $k = 0, \ldots, n$. Ha $(F_\sigma(t,x))_k$ helyére $e^{-t\lambda_n}(J_\sigma(t,x))_k$-t írunk, akkor a következő elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenlet rendszert nyerjük:

$$\begin{aligned} \partial_1 (J_\sigma)_k + \frac{k}{n}\partial_2 (J_\sigma)_k &= \lambda_n (J_\sigma)_{k+1} \\ \partial_1 (J_\sigma)_n + \frac{k}{n}\partial_2 (J_\sigma)_n &= 0 \\ (J_\sigma)_k(0,x) &= \Phi_\sigma(x). \end{aligned} \tag{7}$$

A fenti egyenlet közvetlenül megoldható a karakterisztikák módszerével, így egy rekurziót kapunk F_σ-ra:

$$\begin{aligned} &(F_\sigma)_n(t,x) = \Phi_\sigma(x-t) \\ &(F_\sigma)_k(t,x) = e^{-t\lambda_n}\Phi_\sigma\left(x - \frac{k}{n}t\right) + \int_0^t (F_\sigma)_{k+1}\left(t, x - \frac{k}{n}(t-s)\right)\lambda_n e^{-\lambda_n(t-s)}\,\mathrm{d}s \\ &\qquad k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

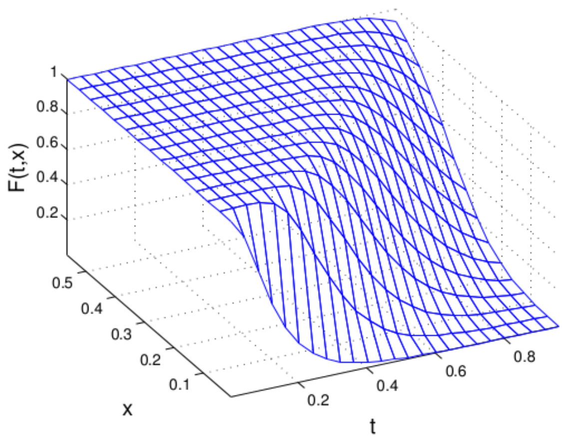
Ha $\sigma \to 0$ az adódik, hogy

$$\begin{aligned} &(F)_n(t,x) = 1(x - t \geq 0) \\ &(F)_k(t,x) = e^{-t\lambda_n} 1\left(x - \frac{k}{n}t \geq 0\right) + \int_0^t (F)_{k+1}\left(t, x - \frac{k}{n}(t-s)\right)\lambda_n e^{-\lambda_n(t-s)}\,\mathrm{d}s \\ &\qquad k = 0, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

ami ugyanaz, mintha az (6) formulát közvetlenül alkalmaztuk volna.

A (7) differenciálegyenlet-rendszert $\sigma = 0$-ra, numerikusan az upwind séma [5] segítségével oldottuk meg. A kapott eloszlásfüggvény segítségével a konstruált abszolút szimmetrikus véletlen norma várható értékét számítottuk ki, ami persze egy abszolút és szimmetrikus norma. Szimulációinkban a $[0,1]$ intervallumot N belső ponttal $N+1$ egyenlő részre osztottuk fel. Az $n = 10$, $\lambda_n = 10$ és $N = 200$ paraméter beállítások mellett kapott $(F)_0(t,x)$ eloszlásfüggvény grafikonja az . ábrán látható.

A várható érték norma $\mathbb{R}^2$-n vett egységköreit a . ábrán ábrázoltuk. Két szélsőséges vislekedés figyelhető meg: Ha leállítjuk a láncot, azaz ha $\lambda_n = 0$, akkor a várható érték norma a közönséges maximum normával esik egybe. Ha a lánc sebessége végtelenhez tart, vagyis $\lambda_n \to \infty$, akkor a várható érték norma az 1-normához tart pontonként.



1. ábra. Az X_t valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ($n = 10$, $\lambda_n = 10$, $N = 200$).

4. Abszolút és szimmetrikus normák magasabb dimenziós terekben

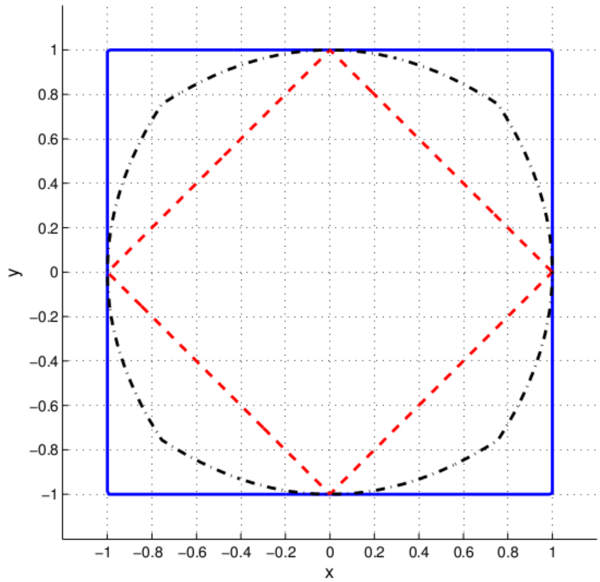
4.1. Erős és gyenge kiterjesztések

A közönséges p-normák teljesítik a $||v||_p = ||\,(v_1, ||(v_2, \dots, v_n)||)\,||_p$ egyenlőséget $\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ estén. Ezt a tulajdonságot felhasználhatjuk arra, hogy a síkon megkonstruált abszolút és szimmetrikus véletlen normáinkat magasabb dimenziós terekre induktívan általánosítsuk.

Tegyük fel, hogy minden n-nél kisebb dimenziójú térre sikerült kiterjeszteni a síkon már megkonstruált abszolút és szimmetrikus véletlen normát. Legyen $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{+,\geq}$ tetszőleges vektor és $\overset{(n-1)}{p}$ a véletlen norma $\mathbb{C}^{n-1}$ térre vett kiterjesztése. Legyen p egy, az előző kiterjesztéstől független norma a $\mathbb{C}^2$ vektortéren és definiáljuk az n dimenziós kiterjesztést úgy, mint

$$\overset{(n)}{p}(., v) = p\left(., \left((v_1, \overset{(n-1)}{p}(., (v_2, \dots, v_n))\right)\right).$$

Világos, hogy a $\overset{(n)}{p}$ véletlen norma $\mathbb{C}^n$-en csak a vektor elemek abszolút értékeitől függ, de nemszükségképpen szimmetrikus. Szimmetrikus véletlen normát kapunk, ha $\overset{(n)}{p}$ $\mathbb{R}^n_{+,\geq}$-re vett leszűkítését szokásos módon $\mathbb{C}^n$-re kiterjesztjük. Ha $\overset{(n)}{p}$ egy



2. ábra. A várható érték norma egységkörei. Folytonos – ($n = 1$, $\lambda_n = 0$, $N = 4000$), szaggatott – ($n = 1$, $\lambda_n = 100$, $N = 500$), pont-vonal – ($n = 100$, $\lambda_n = 100$, $N = 1000$).

olyan abszolút és szimmetrikus véletlen norma a $\mathbb{C}^n$ vektortéren, melyet egy p, $\mathbb{C}^2$-n adott, abszolút és szimmetrikus véletlen norma független példányaiból a fenti eljárással nyertünk, akkor azt p *erős kiterjesztésének* hívjuk.

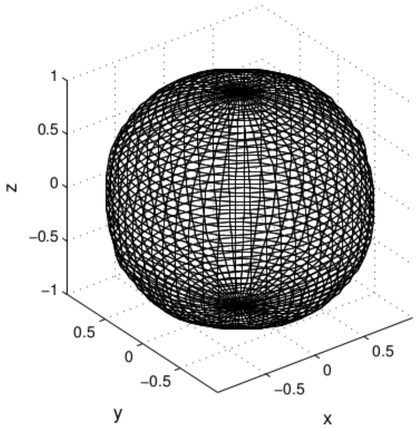
A fenti eljárás fő hátulütője, hogy rögzített $v \in \mathbb{C}^n$-re $\overset{(n)}{p}$ egy olyan valószínűségi változó, ami az eredeti valószínűségi mező n-szeres hatványán van értelmezve. Ez a szimulációk elvégzését nagyban megnehezíti. Ennek okán vezetjük be a *gyenge kiterjesztett* fogalmát, ami az erőstől annyiban különbözik, hogy a konstrukcióban felhasznált indukciós lépést a következővel helyettesítjük:

$$\overset{(n)}{p_w}(., v) = p\left(., \left((v_1, \mathbb{E}\left(\overset{(n-1)}{p_w}(., (v_2, \dots, v_n))\right)\right)\right).$$

A 3. fejezetben bemutatott véletlen norma háromdimenziós gyenge kiterjesztéséből származtatott várható érték norma egységgömbje a . ábrán látható.

4.2. Egy nyitott kérdés

Az abszolút és szimmetrikus véletlen normák kiterjesztése végtelen dimenzióra egyszerű határátmenettel történhet. Legyen $v = (v_1, v_2, \dots)$ komplex számok



3. ábra. A 3. fejezetben bemutatott véletlen norma háromdimenziós gyenge kiterjesztéséből származtatott várható érték norma egységgömbje ($n = 100$, $\lambda_n = 100$, $N = 500$) paraméter beállítások mellett.

egy tetszőleges sorozata, és jelölje $\overset{(n)}{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az eredeti sorozat n-edik csonkítottját. Legyen

$$\overset{(\infty)}{p}(v) := \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{p}(\overset{(n)}{v})$$

megengedve azt az esetet is, hogy a fenti határérték végtelen. Ha $v \in l^1$, akkor a fordított háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$|\overset{(n)}{p}(\overset{(n)}{v}) - \overset{(m)}{p}(\overset{(m)}{v})| \le \overset{(n+m)}{p}(\overset{(n)}{v} - \overset{(m)}{v}) \le ||\overset{(n)}{v} - \overset{(m)}{v}||_1,$$

vagyis $\overset{(n)}{p}(\overset{(n)}{v})$ Cauchy-sorozat $\mathbb{P}$-m.b..

Nyilvánvaló, hogy az (1) tulajdonság végtelen dimenzióra is öröklődik, azaz komplex számok tetszőleges $v = (v_1, v_2, \dots)$ sorozatára $||v||_\infty \le \overset{(\infty)}{p}(v) \le ||v||_1$ és $||v||_\infty \le \overset{(\infty)}{p_w}(v) \le ||v||_1$ teljesül $\mathbb{P}$-m.b., ami azt jelenti, hogy a várható értékben véges normájú sorozatok tere az l^1 és l^∞ terek között helyezkedik el tartalmazás tekintetében. A különböző normafolyamatokhoz asszociált várható érték normák végtelen dimenzióban nem szükségképpen ekvivalensek, az esetleges ekvivalencia fennállása ekvivalenciát indukál a normafolyamatokon is. A kérdés az, hogy hogyan jellemezhetők az egy ekvivalencia osztályba kerülő normafolyamatok?

Hivatkozások

[1] Lovas, A. and Andai, A.: *Measure on gauge invariant symmetric norms*, arXiv:1504.04149 (2015).

[2] Bhatia, R.: *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1997), 84–109.

[3] George, Y. G. and Qing, Z.: *Continuous-Time Markov Chains and Applications*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (2013)

[4] Halmos, P. R.: *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1978)

[5] Hirsch, C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons, New York (1990)

[6] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (2003), 137–140.

[7] Pollett, P. K. and Stefanov, V. T.: Path Integrals for Continuous-Time Markov Chains, *J. Appl. Prob.* **39**, (2002) 901–904.

(Beérkezett: 2015. november 17.)

LOVAS ATTILA
BME, TTK, Analízis Tanszék
Budapest, Egry J. u. 1.
`lovas@math.bme.hu`

ANDAI ATTILA
BME, TTK, Analízis Tanszék
Budapest, Egry J. u. 1.
`andaia@math.bme.hu`

MEASURES ON GAUGE INVARIANT SYMMETRIC NORMS

Attila Lovas, Attila Andai

The concept of a gauge invariant symmetric random norm is elaborated in this paper. We introduce norm processes and show that this kind of stochastic processes are closely related to gauge invariant symmetric random norms. We construct a gauge invariant symmetric random norm on the plane. We define two different extensions of these random norms to higher (even infinite) dimensions. We calculate numerically unit spheres of expected norms in two and three dimensions for the constructed random norm. The English version of this paper can be found in [1].

Keywords: continuous-time Markov chain; path integral; permutation invariant norm; unitary invariant norm

Mathematics Subject Classification (2000): 60J28; 60D05; 60J27; 46B20;