

HIPERBOLIKUS WAVELETEK

ARATÓ MÁTYÁS PROFESSZOR EMLÉKÉRE

SCHIPP FERENC

Az utóbbi két évtizedben a wavelet-transzformációk számos típusát vezették be és alkalmazták a matematika, a természet- és műszaki tudományok különböző területein. Ezek a transzformációk egységes elvek szerint származtathatók, felhasználva az absztrakt harmonikus analízis eszköztárát. Ezen az úton, kiindulva az affin csoportból, eljuthatunk az (affin) *wavelet-transzformációhoz*, a Heisenberg-féle csoportból a *Gábor-transzformációhoz*. Véve a hiperbolikus geometria egybevágósági transzformációit, ezekhez hasonló elvek alkalmazásával, bevezettük a *hiperbolikus wavelet transzformációt* (HWT-t). A szóban forgó egybevágósági transzformációk a *Blaschke-függvényekkel* írhatók le. Ezek nemcsak a komplex függvénytanban, hanem az irányításelméletben is kitüntetett szerepet játszanak. Ennek alapján azt reméljük, hogy a HWT a jelfeldolgozásnak és a rendszerelméleti alkalmazásoknak adekvát eszközévé válhat. Ebben a dolgozatban áttekintést nyújtunk néhány HWT-vel összefüggő eredményről és alkalmazásról.

Külön is felhívjuk a figyelmet a magyar matematikusok eredményeire, amelyek jelentősége az irányításelmélet és a jelfeldolgozás területén új megvilágításba kerültek. A trigonometrikus Fourier-sorokra vonatkozó *Fejér-féle szummáció* a háromszög ablaknak megfelelő jelsűrési eljárásaként interpretálható. Számos, *Riesz Frigyes* által bevezetett fogalom és nevéhez fűződő eredmény alapvető szerepet játszik ezekben az alkalmazásokban. Ezek közül a matematikusok körében jól ismert klasszikus eredményein túlmenően itt most csak a Hardy-terek faktORIZÁCIÓJÁRA, a róla elnevezett bázis fogalmára, valamint a nemnegatív trigonometrikus polinomok előállítására vonatkozó eredményeire utalunk, amelyek a wavelet konstrukciók alapvető eszközeivé váltak. A *Haar Alfréd*ről elnevezett mérték, amely az absztrakt harmonikus analízis egyik legfontosabb fogalma, a jelfeldolgozás transzformációinak leírásában is nélkülözhetetlen eszköznél bizonyult. A *róla elnevezett rendszer*, amelyet 1909-ben egy elméleti probléma tisztázására vezetett be, napjainkban, mint a legegyszerűbb wavelet, vált igazán jelentőssé. Míg az 1960-as években, egyfajta magyar specialitásként, kizárólag csak a hazai egyetemi tankönyvek tesznek említést a Haar-rendszeréről, addig manapság szinte minden jelfeldolgozással kapcsolatos tankönyv több fejezetet szentel a rendszernek.

A Haar-rendszerből kiinduló wavelet-transzformáció mellett a *Gábor Dénes* által 1945-ben vizsgált (ablakos) Fourier-transzformáció (azóta Gábor-transzformációnak nevezett eljárás) bizonyult a jelfeldolgozás egyik leghatékony eszközének.

Napjainban az MTA SZTAKI-ban *Bokor József* vezetésével eredményesen alkalmazzák a racionális függvényrendszereket és a hiperbolikus waveleteket az irányítás-elmélet és a jelfeldolgozás problémáinak a megoldásában. Ezeknek a módszereknek a felhasználásával bízató eredmények születtek az ELTE Numerikus Analízis Tanszéken EKG-jelek matematikai modellezésében.

1. Történeti áttekintés

A Fourier-sorok elméletének kialakulása szorosan összefügg fontos gyakorlati problémákkal. Már maga *Fourier* is egy fizikából származó feladat, a hővezetés matematikai leírására dolgozta ki módszerét. A matematika számos fejezetének létrejötte és fejlődése szorosan összefügg azokkal a kérdésekkel, amelyek a Fourier-sorok alkalmazásával kapcsolatban felvetődtek. Ezek tisztázása, *Dirichlet* munkássága nyomán a ma is használt függvényfogalom kialakulásához vezetett, *Cantort* a Fourier-sorok konvergencia halmazaival kapcsolatos vizsgálatai inspirálták a halmazelmélet megalapozására. *Riemann* a Fourier-együtthatók értelmezéséhez kiterjesztette az integrál fogalmát, *Lebesgue* a róla elnevezett integrál bevezetésével a Fourier-sorok elméletét gazdagította egy ma is nélkülözhetetlen eszközzel, amely azután a valószínűségelmélet matematikai megalapozásában is fontos szerepet játszott [3], [54], [66], [78].

Az első, mai szemmel nézve is korrekt konvergencia tétel *Dirichlet*-től származik, aki 1829-ben bebizonyította, hogy a szakaszonként monoton függvények Fourier-sora konvergens. Már 1876-ban *Du Bois Reymond* munkássága révén ismert volt, hogy a Fourier-sor 2π szerint periodikus, *folytonos függvény esetén is lehet divergens*. A Fourier-sorok konvergenciájával kapcsolatos problémák tisztázása kapcsán új fogalmakat és módszereket vezettek be, több új fejezettel gazdagítva a matematikát. Többek között a hagyományos, pontonkénti konvergencia helyett az integrálközépbén való konvergenciát, a részletösszegek helyett azok számtani közepeinek konvergenciáját véve alapul számos problémára sikerült választ adni. Ezekben *Riesz Frigyes* és *Fejér Lipót* munkássága úttörő jellegű volt [66], [78], [86].

1.1. A Haar-rendszer

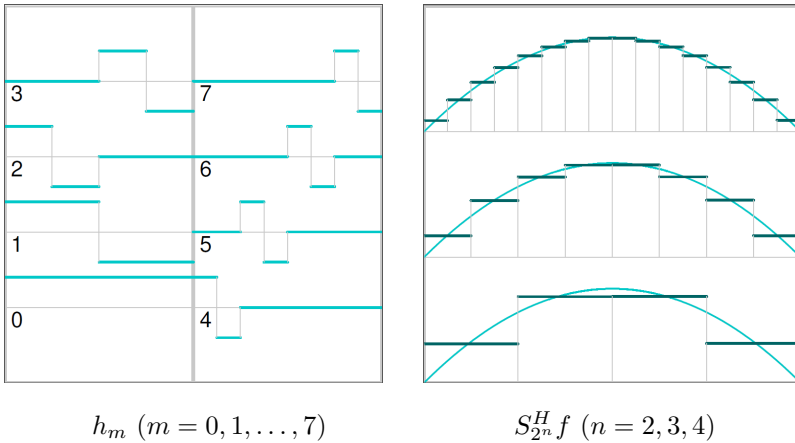
Már a múlt század elején a trigonometrikus rendszer mellett több, akkor kissé egzotikusnak tűnő függvényrendszert vezettek be, amelyek elméleti és gyakorlati jelentősége jóval később derült ki. Ezek között is a *Haar Alfréd* által definiált ortonormált rendszer játszik kitüntetett szerepet. Haar a róla elnevezett rendszert doktori értekezésében vezette be 1909-ben, választ adva *Hilbert* egy Fourier-sorok divergenciájával kapcsolatos problémájára [37]. A Du Bois Reymond-féle ellenpél-

dával összefüggésben Hilbert felvetette, hogy létezik-e olyan ortonormált rendszer, amely szerint vett Fourier-sorfejtés minden folytonos függvényre mindenütt konvergens? A kérdésre Haar pozitív választ adott, bebizonyítva, hogy az azóta róla elnevezett $(h_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer szerinti Fourier-sor minden folytonos függvény esetén egyenletesen konvergens. Az első pillanatra mesterkéltnek tűnő rendszer lépcsős függvényekből áll, amelyek a

$$h(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0, 1/2)) \\ -1 & (x \in [1/2, 1)) \\ 0 & (x \in [1, \infty)) \end{cases}$$

alapfüggvényből egyszerű transzformációkkal (transzlációval és dilatációval) származtathatók:

$$\begin{aligned} h_0(x) &:= 1, & h_m(x) &:= 2^{m/2} h(2^m x - k) \\ (x \in [0, 1), m &:= 2^n + k, & 0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (1)$$



A Haar-rendszer ortonormált az $L^2 := L^2[0, 1)$ Hilbert-tér szokásos skaláris szorzatára nézve és az $f \in L^1 := L^1[0, 1)$ függvény Haar-Fourier-sorának

$$S_m^H f := \sum_{k=0}^{m-1} \langle f, h_k \rangle h_k \quad (m \in \mathbb{N}), \quad \langle f, h_k \rangle := \int_0^1 f(t) h_k(t) dt \quad (k \in \mathbb{N})$$

részletösszegei előállíthatók az f függvény diadikus intervallumokra vett *integrálközepeivel*:

$$\begin{aligned} (S_{2^n} f)(x) &= (E_n f)(x) := \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \\ (x \in I &= [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \in \mathcal{I}_n), \end{aligned} \quad (2)$$

ahol \mathcal{I}_n jelöli a $[0, 1)$ intervallum 2^{-n} hosszúságú diadikus részintarvallumainak a halmazát. Innen következik, hogy bármely $f \in L^1$ függvény Haar–Fourier-sora L^1 -normában és m.m. konvergál az f -hez és folytonos függvény esetén a konvergencia egyenletes [74],[78]. A Haar-rendszer ezekben a tulajdonságaiban alapvetően különbözik a trigonometrikus rendszertől.

Valószínűségelméleti terminológiát használva E_n a \mathcal{I}_n által generált σ -algebrára vonatkozó feltételes várható érték, továbbá a (2) egyenlőség szerint az $(S_{2^n} f, n \in \mathbb{N})$ részsorozatösszegek (reguláris, diadikus) *martingált alkotnak*.

A Haar-rendszernek ezek a tulajdonságai szolgálták a *bázisokkal összefüggő funkcionálanalízisbeli, a martingáleméleti és a waveletekkel kapcsolatos* vizsgálatok kiindulópontjával [14], [17], [54], [74], [82].

A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - E_n f\|_{L^p} = 0 \quad (f \in L^p := L^p[0, 1), 1 \leq p < \infty)$$

egyszerűen igazolható állításból következik, hogy a Haar-rendszer nemcsak az L^2 Hilbert-térben, hanem az L^p ($1 \leq p < \infty$) Banach-terekben is bázist alkot.

A Haar-sorok feltétlen (bármely átrendezés melletti) konvergenciájának vizsgálatában fontos szerepet játszik az f függvény *Paley* által bevezetett

$$Qf := \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle f, h_k \rangle h_k|^2 \right)^{1/2} \quad (f \in L^1)$$

kvadratikus variációja. Paley bebizonyította, hogy $1 < p < \infty$ esetén az f és a Qf L^p -normái ekvivalensek:

$$\|Qf\|_{L^p} \sim \|f\|_{L^p} \quad (1 < p < \infty).$$

Ennek alapján *Marcinkiewicz* megmutatta, hogy a Haar-rendszer $1 < p < \infty$ esetén *feltétlen* (azaz bármely átrendezés mellett is) *bázis* az L^p térben [74]. A Haar-rendszernek ezek a tulajdonságai a 60-as években, hosszú szünet után, ismét ráirányították a figyelmet a rendszerre. Lengyel és szovjet matematikusok munkássága révén kiderült, hogy a Haar-rendszer eredményesen alkalmazható a funkcionálanalízis fontos problémáinak megoldásában és kitüntetett szerepet játszik a bázisok között. Például többek között kiderült, hogy Banach-terek egy tág osztályára igaz a következő állítás: *ha a szóban forgó Banach-térben a Haar-rendszer nem feltétlen bázis, akkor ebben a térben feltétlen bázis nem létezik*. Speciálisan az L^1 térben nincs feltétlen bázis. Ezekről az eredményrekről nyújt részletes áttekintést *Ciesielski* [17] és *Uljanov* [82] 1985-ben a Haar emlékkonferencián tartott előadása [75].

1.2. A Faber–Schauder-rendszer

Mivel a Haar függvények nem folytonosak, azért ezek nem tartoznak a $C[0, 1]$ függvénytérhez. *Faber* 1910-ben a Haar-függvények integrálját véve bevezetett

egy folytonos függvényekből álló rendszert, amely normáló faktortól eltekintve az (1)-hez hasonló alakban adható meg:

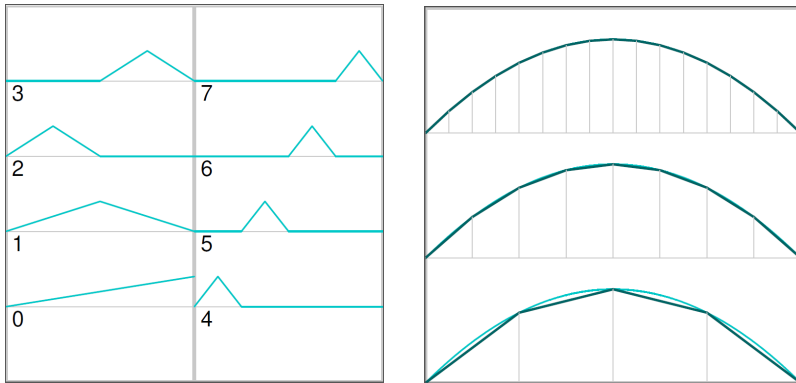
$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \int_0^x h(t) dt, & \varphi_m(x) &:= \varphi(2^n x - k) \\ (m = 2^n + k, 0 \leq k < 2^n, n, k \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty)). \end{aligned} \quad (3)$$

Faber megmutatta, hogy ez a rendszer bázis a $[0, 1]$ végpontjaiban eltűnő folytonos függvények $C_0[0, 1]$ terén. Ezekhez hozzávéve a konstans függvényt és a 0-ban eltűnő lineáris függvényt a $C[0, 1]$ tér egy bázisát kapjuk. Megjegyezzük, hogy ezt a bázist később (1927-ben) *Schauder* újra felfedezte, és azóta ezt a rendszert az irodalomban Faber–Schauder-féle (FS) rendszernek nevezzük. Ez a rendszer nyilván nem ortogonális az L^2 -tér skaláris szorzatára nézve. A

$$[\varphi_n, h_m] := \int_0^1 \varphi_n dh_m = 0 \quad (m \neq n, m, n \in \mathbb{N})$$

reláció úgy interpretálható, hogy a folytonos függvényekből álló FS-rendszer és a korlátos változású függvényekből álló Haar-rendszer biortogonális. Megjegyezzük, hogy az $f \in C_0[0, 1]$ függvény FS-rendszer szerinti biortogonális sorfejtésének részletösszegei interpolálnak a diadikusan racionális pontokban [74]:

$$(S_{2^n}^{FS} f)(x) := \sum_{k=0}^{2^n-1} [f, h_k] \varphi_k(x) = f(x) \quad (x = j2^{-n}, 0 \leq j \leq 2^n, n \in \mathbb{N}).$$



φ_m ($m = 0, 1, \dots, 7$)

$S_{2^n}^{FS} f$ ($n = 2, 3, 4$)

1.3. A Franklin-rendszer

Franklin 1928-ban az FS-rendszerből kiindulva a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással bevezetett egy (szakaszonként lineáris, más szóval elsőfokú spline

függvényekből álló) ortonormált rendszert, amelyről megmutatta, hogy nemcsak az L^2 térben, hanem a $C[0, 1]$ -ben is bázis [15], [54], [74]. Az FS-függvények helyett m -edfokú spline függvényekből kiindulva *Ciesielski* [16], [17] sima ortogonális bázisoknak egy széles osztályát vezette be. Ezekkel több, Banach [2] 1932-ben megjelent könyvében említett fontos térben sikerült bázist szerkeszteni. Ezekről *Ciesielski* a [17] összefoglaló dolgozatában ad részletes áttekintést. *Bockarjev* [5] bebizonyította a Paley-féle egyenlőtlenség megfelelőjét a Franklin-rendszerre, következésképpen kiderült, hogy $1 < p < \infty$ esetén a Franklin-rendszer is feltétlenül bázist alkot az L^p -terekben. *Ciesielski*, *Simon Péter* és *Sjölin* megmutatták, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k$ Haar-sor és a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k$ Franklin-sor L^p -normában ekvikonvergens, ha $1 < p < \infty$, más szóval a szóban forgó rendszerek *ekvivalens bázisok* az L^p ($1 < p < \infty$) terekben [18]. Ez volt az első nem triviális példa ekvivalens bázisokra. Ezekről további információt nyújt a [74] könyv 5. fejezete.

1.4. A Rademacher- és a Walsh-rendszer

A múlt század elején a Haar-rendszer mellett két további egzotikus rendszert vezettek be, amelyek szoros kapcsolatban állnak a Haar-rendszerrel. *Rademacher* 1922-ben az

$$r(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0, 1/2)) \\ -1 & (x \in [1/2, 1)) \end{cases}, \quad r(x+1) = r(x) \quad (x \geq 0)$$

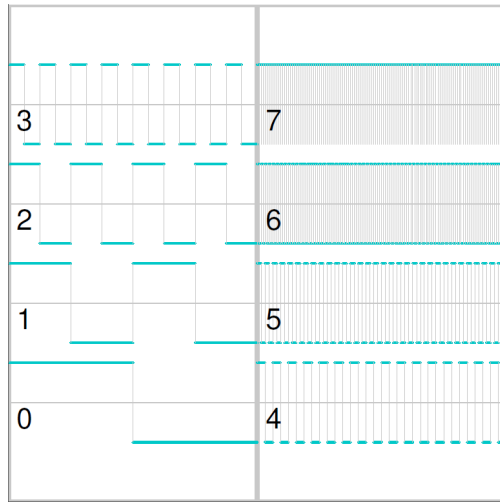
1 szerint periodikus függvényből kiindulva definiálta az azóta róla elnevezett

$$r_n(x) := r(2^n x) \quad (x \in [0, 1), n \in \mathbb{N})$$

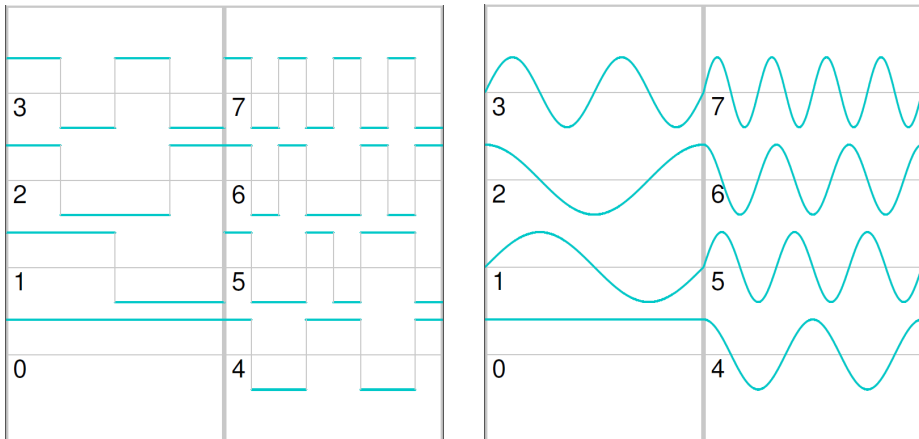
rendszert, amely a függvénysorok konvergencia problémáinak tisztázásában játszott fontos szerepet [1], [74], [78]. *Rademacher* és *Kolmogorov* megmutatták, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_n$ Rademacher-sor akkor és csak akkor konvergál majdnem mindenütt, ha teljesül a $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ együttható feltétel. A Rademacher-rendszer hasznos modellnek bizonyult sztochasztikusan független függvényrendszerek vizsgálatában. A független valószínűségi változókból alkotott sorok konvergenciájával kapcsolatos három-sor tételnek az említett Rademacher–Kolmogorov-féle tétel volt a kiinduló pontja.

1923-ban *Walsh* olyan $1, -1$ értékű függvényekből álló rendszert vezetett be a $[0, 1)$ intervallumon, amelyre a $t_{2n}(x) := \cos(2\pi n x)$, $t_{2n+1}(x) := \sin(2\pi n x)$ trigonometrikus rendszerhez hasonlóan, az n -edik függvény előjelváltásainak száma n . A rekúzióval definiált rendszer kezelése nehézkesnek bizonyult.

Paley 1932-ben észrevette, hogy a Walsh-rendszer (az eredetitől eltérő sorrendben) a Rademacher-rendszerből származtatható, vége a Rademacher-függvények összes lehetséges véges szorzatát. Ezek felírásához, kiindulva az $n \in \mathbb{N}$ szám 2-es



A Rademacher-rendszer: r_n ($n = 0, 1, \dots, 7$)



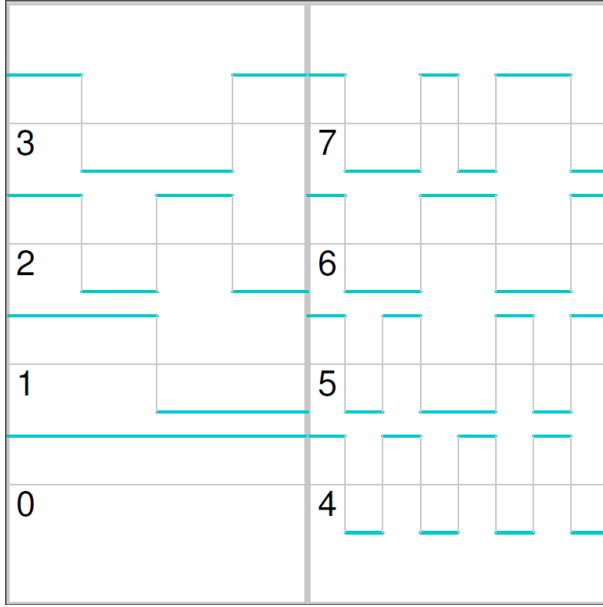
Az eredeti Walsh-rendszer a trigonometrikus rendszer előjelváltásait utánozza

számrendszerbeli előállításából, képezzük a

$$w_n := \prod_{n_j=1} r_j = \prod_{j=0}^{\infty} r_j^{n_j}, \quad n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j 2^j \in \mathbb{N} \quad (n_j = 0, 1) \quad (4)$$

függvényrendszert, amely sorrendtől eltekintve megegyezik a Walsh által bevezetett rendszerrel, és $w_{2^k} = r_k$ ($k \in \mathbb{N}$). A $(w_n, n \in \mathbb{N})$ rendszert *Walsh–Paley-*

rendszernek nevezzük és egyszerű indextranszformációval származtatható az eredeti Walsh-rendszerből [74]. A fenti előállításból kiidulva és az *Alexits György* [1] által bevezetett szóhasználattal élve azt mondjuk, hogy a Walsh–Paley-rendszer a Rademacher-rendszer *szorzatrendszere*. További, matematikatörténeti vonatkozásokkal kapcsolatban utalunk a [69] dolgozatra.



A Walsh–Paley-féle rendszer

Az $r_k(x)$ és a $w_n(x)$ függvényértékek közvetlenül kifejezhetők az

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1} \in [0, 1), \quad x_k = 0, 1$$

szám bináris jegyeivel:

$$r_k(x) = (-1)^{x_k}, \quad w_n(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} n_k x_k},$$

következésképpen ezek a rendszerek hatékonyabban alkalmazhatók a digitális technikában, mint a hagyományos trigonometrikus rendszer. Ez a lehetőség az 1960-as évektől kezdődően felkeltette az átviteltechnikában dolgozó mérnökök figyelmét, hozzájárulva a szóban forgó rendszer elterjedéséhez. Ezzel kapcsolatban utalunk Harmuth [38], [39] könyveire, valamint a [80] interjú kötetre.

A Haar- és a Walsh-rendszer az

$$\left[a_{k\ell}^n \right]_{k,\ell=0}^{2^n-1} \in \mathbb{R}^{2^n \times 2^n}, \quad a_{k\ell}^n := 2^{-n/2} w_\ell(k2^{-n})$$

ortogonális mátrix-transzformációval átvihető egymásba:

$$\begin{aligned} h_{2^n+k}(x) &= 2^{-n/2} r_n(x) \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + r_j(k2^{-n}) r_j(x) \right) = \\ &= \sum_{\ell=0}^{2^n-1} a_{k\ell}^n w_{2^n+\ell}(x) \quad (0 \leq k, \ell < 2^n, x \in [0, 1)). \end{aligned}$$

A szóban forgó három rendszer kapcsolata mintául szolgál jól használható ortogonális rendszerek szerkesztésére. Nevezetesen a Rademacher-rendszer helyett egy standartizált martingál-differencia sorozatot, a Walsh-rendszer helyett a maringál-differencia sorozatrendszerét véve ortogonális rendszereknek egy tág osztályát képezhetjük. A Haar- és a Walsh-rendszer említett kapcsolata mintául szolgálhat Haar-típusú rendszerek konstrukciójához, továbbá hatékony algoritmusok szerkeszthetők a Fourier-együtthatók kiszámítására. A [9] dolgozatban racionális martingál differenciákból szerkesztettünk szorzatrendszereket és hatékony algoritmusokat a Fourier-analízisre és szintézisre. Ezekkel a konstrukciókkal az 5. fejezetben foglalkozunk részletesebben.

1.5. Waveletek

A Haar- és a Faber–Schauder-rendszer egyetlen függvényből kiindulva dilatációval és translációval származtatható. A Haar-függvények azonban nem folytonosak (nincsenek a $C[0, 1]$ -ben), azért sima függvények jó közelítésére nem alkalmasak. Ciesielski a Haar-függvények többszöri integrálásával és ortogonalizációs eljárással állított elő sima, jó approximációs tulajdonságú ortogonális rendszereket [16]. Az 1980-as évektől kezdődően *Y. Meyer*, *I. Daubechies* [20], [53], [54] stb. munkássága nyomán egyre többen foglalkoztak

$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \psi(2^n x - k) \quad (x \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}, \psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\psi\|_2 = 1)$$

alakú ortonormált rendszerek, ún. *waveletek* konstrukciójával. Ilyen rendszerek szerkesztése a Haar-rendszert kivéve nehéz feladat, és a konstrukcióban a ψ alapfüggvény (anyawavelet) helyett annak $\widehat{\psi}$ Fourier-transzformációjából szokás kiindulni. Annak ellenére, hogy a ψ általában nem adható meg explicit alakban, a wavelet Fourier-sorok jó konvergencia és approximációs tulajdonságokkal rendelkeznek, a sorfejtés részletösszegeinek magfüggvényei jól becsülhetők, és a wavelet Fourier-együtthatók hatékony algoritmussal számíthatók.

Az alkalmazásokban különösen a *sima, kompakt tartójú waveletek* bizonyultak hasznosnak. A két feltétel egymás ellen hat: minél rövidebb a wavelet tartója,

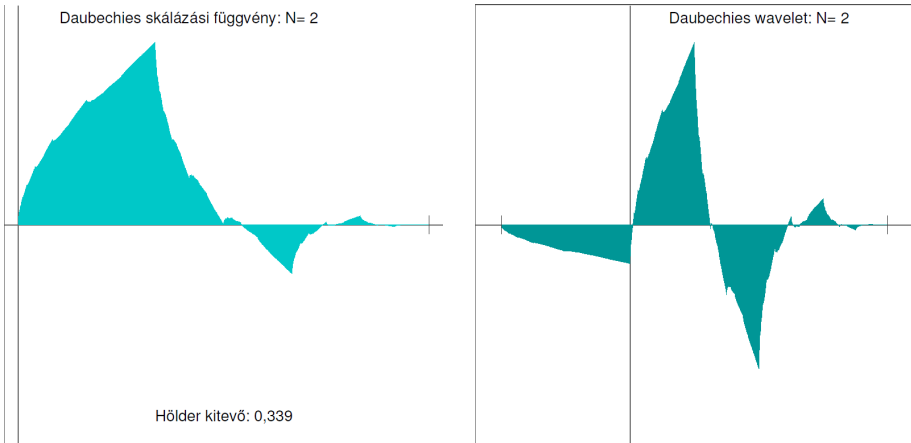
annál kisebb a simaságát jellemző Hölder-kitevő. Elterjedten használják a Daubechies által bevezetett, az $N = 2, 3, \dots$ paramétertől függő ${}_N\psi$ waveleteket [20]. A ${}_N\psi$ tartójának hossza $2N - 1$, Hölder-kitevője nagy N esetén aszimptotikusan egyenlő $0,2075 N$ -nel. A $\psi = {}_N\psi$ ún. anyawavelet a $\varphi = {}_N\varphi$ skálázási függvényből származtatható:

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^{j+1} c_j \varphi(2x + 2N - j),$$

ahol a c_j együtthatók a waveletet meghatározó számok. A φ függvény kielégíti a

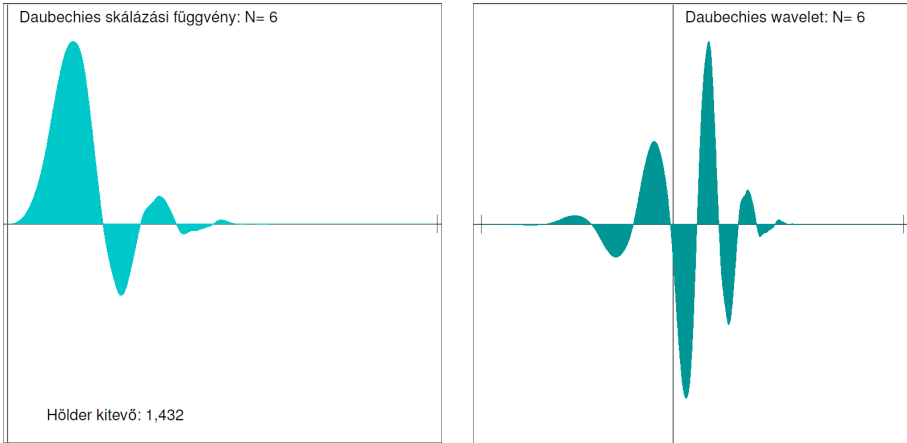
$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{2N-1} c_j \varphi(2x - j)$$

ún. skálázási egyenletet, amely alapján a φ meghatározható. Az alábbi ábrákon $N = 2$ és 6 esetén szemléltetjük a Daubechies-féle skálázási függvényt és waveletet.



A Daubechies-féle φ skálázási függvény és ψ wavelet: $N = 2$

Az ortogonális wavelet-rendszerek mellett ilyen típusú biortogonális rendszereket és Riesz-bázisokat is használnak. Ezek különösen alkalmasak jelek hatékony reprezentációjára, rekonstrukciójára és tömörítésére. Megmutatták, hogy a Franklin-rendszerhez hasonlóan az ortogonális waveletek egy tág osztálya feltétlen bázist alkot az L^p -terekben [53].

A Daubechies-féle skálázási függvény és wavelet: $N = 6$

1.6. Hardy-terek

Az alkalmazásokban az L^p -terek mellett a $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ diszken értelmezett analitikus függvények \mathfrak{A} halmaza és az ezekkel összefüggő Banach-terek játszanak kitüntetett szerepet. *Riesz Frigyes* egy 1923-ban írt dolgozatában [67] az $f \in \mathfrak{A}$ függvény $0 < r < 1$ sugarú körre vonatkozó leszűkítésének vége az

$$\|f_r\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty)$$

integrálközepeit, bevezette azoknak az \mathfrak{A} -beli függvényeknek az osztályát, amelyekre $\sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_p < \infty$. Hivatkozva Hardynak egy 1915-ben megjelent dolgozatára [40], amelyben Hardy megmutatta, hogy $\|f_r\|_p$ az r monoton növvő függvénye, Riesz a szóban forgó függvényosztályt Hardyról nevezte el és a \mathcal{H}^p szimbólummal jelölte. A $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}) := \mathcal{H}^p$ függvényosztályon az

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p} := \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_p$$

leképezés norma, ha $1 \leq p \leq \infty$ és kvázinorma, ha $0 < p < 1$, továbbá a \mathcal{H}^p tér ezekre nézve teljes. Ismeretes, hogy $f \in \mathcal{H}^p$ ($p > 0$) esetén m.m. $t \in \mathbb{R}$ pontban léteznek az $f(e^{it}) := \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it})$ peremfüggvény, továbbá f a $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ peremen az $L^p(\mathbb{T})$ függvénytérhez tartozik, és $\|f\|_{\mathcal{H}^p} = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ [21], [35], [55], [86]. A \mathbb{D} diszken analitikus és ennek lezárásán folytonos függvények osztályát *diszk algebrának nevezzük* és az $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ szimbólummal jelöljük. A Haar-rendszert a $[0, 1)$ intervallum helyett a \mathbb{T} -n véve, és onnan analitikusan kiterjesztve a \mathbb{D} -re a

$\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ ($1 \leq p < \infty$) tereknek egy bázisát kapjuk. Banach a [2] monográfiában a diszk algebrát is felsorolta azok között a (szeparábilis) terek között, amelyekről nem tudták, hogy van-e bázisuk. Erre a hosszú ideig nyitott kérdésre *Bockarev* [5] adott pozitív választ, a Franklin-rendszerből kiindulva bázist szerkesztve az $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ téren. Ez a konstrukció waveletekre is átvihető [53].

1.7. Diszkrét időinvariáns rendszerek

A Hardy-tereket nemcsak a komplex függvénytanban és a Fourier-sorok elméletében használják széleskörűen, hanem az 1960 -as évek óta kiderült, hogy a Banach-tereknek ez az osztálya (elsősorban a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ és a $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ tér) az irányítás-elméleti feladatok matematikai modellezésének és az operátorelméletnek is adekvát eszközei [43], [68], [79].

Az irányításelméletben a legegyszerűbb diszkrét rendszerek $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ típusú korlátos, lineáris operátorokkal írhatók le:

$$y = T(u) \quad (u = (u_n, n \in \mathbb{N}), y = (y_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell^2).$$

Az $u, y \in \ell^2$ sorozatokat (input, output) jeleknek, az $\|u\|_2 := (\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2)^{1/2}$ normát az u jel energiájának nevezzük. Az $(u_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat n indexét diszkrét időként szokás interpretálni. Az ún. *diszkrét, kauzális, időinvariáns* (angolul: discrete linear causal and time invariant (LTI) systems) rendszerek konvolúciós operátorokkal írhatók le:

$$y = T_a u := a * u, \quad y_n = (a * u)_n := u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az

$$u \rightarrow U, \quad U(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$$

leképezés izometrikus izomorfia az ℓ^2 és a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ Hardy-tér között. A rendszert generáló a sorozatnak megfelelő

$$A(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$$

függvényt a T_a rendszer *átviteli függvényének* nevezzük. Az ℓ^2 és a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ szóban forgó izometriájában az $u \rightarrow T_a u$ operátornak az átviteli függvénnyel való szorzás $U \rightarrow AU$ operátora felel meg. Ez utóbbi $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ operátor akkor és csak akkor korlátos, ha $A \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ és normája $\|A\|_{H^\infty}$, azaz

$$\|T_a\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \|A\|_{H^\infty},$$

továbbá a $T_a \rightarrow A$ leképezés izomorfizmus az LTI-rendszerek osztálya és a $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ tér között [43]. Ezek alapján nyilvánvaló a Hardy-terek jelentősége a rendszerelmélet matematikai modellezésében. Innen következik, hogy ha a rendszereket generáló átviteli függvények H^∞ -normában közel vannak egymáshoz, akkor ugyanazon

bemenet esetén a kimenetek is kicsit térnek el egymástól. Más szóval a szóban forgó rendszerek közelítésének problémája az átviteli függvények H^∞ -normában való approximációjának kérdésére vezethető vissza. Kézenfekvő e célból a diszkalgebra valamely ortogonális bázisát és az e szerinti Fourier-sorfejtés részletösszegeit választani. A probléma nehézségét jól mutatja, hogy csak 1974-ben *Bockarjev* [5] munkásságának köszönhetően derült ki, hogy az $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ diszkalgebrában létezik ilyen bázis. A [6] dolgozatban ezt a bázist használtuk rendszerek közelítésére. Azóta többek között waveletekkel kapcsolatban is születtek approximációs eljárások a diszkalgebrán [53], [73].

A $T_a : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ operátor unitér, más szóval a rendszerre érvényes az energiamegmaradás, ha $\|T_a u\|_{\ell^2} = \|u\|_{\ell^2}$ ($u \in \ell^2$). Ez azzal ekvivalens, hogy az A átviteli függvényre minden $U \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ esetén $\|U\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|AU\|_{L^2(\mathbb{T})}$ teljesül. Innen következik, hogy a T_a operátor akkor és csak akkor unitér, ha az A átviteli függvényére fennáll a következő:

$$A \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}), \quad |A(e^{it})| = 1 \quad (m. m. t \in [0, 2\pi]). \quad (5)$$

Az (5) feltételnek eleget tevő függvényeket *belső függvényeknek* nevezzük. Ennek alapján azok az LTI-rendszerek, amelyekre érvényes az energiamegmaradás törvénye a $\mathcal{H}^\infty(D)$ belső függvényeivel írhatók le.

Könnyen verifikálható, hogy a $b \in \mathbb{D}$ és $\epsilon \in \mathbb{T}$ paramétereket tartalmazó

$$B_{\mathbf{b}}(z) := \epsilon \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} \quad (z \in \mathbb{C}, \mathbf{b} = (b, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T})$$

függvények $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ és $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ bijekciók, következésképpen belső függvények. Ezek véges szorzatai is nyilvánvalóan belső függvények.

Az LTI-rendszereket az x_n ($n \in \mathbb{N}$) visszacsatolt jel beiktatásával gyakran az

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= px_n + qu_n \\ y_n &= rx_n + su_n \quad (x_0 = 0, n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (6)$$

rekurzióval írják le, ahol p, q, r, s a rendszer paraméterei. Egyszerű számolással adódik, hogy a (6) rendszer átviteli függvénye $p = \bar{b}$, $q = \epsilon(1 - |b|^2)$, $r = 1$, $s = -\epsilon b$ esetén a $B_{\mathbf{b}}$ Blaschke-függvény.

Blaschke a [4] dolgozatában megmutatta, hogy ha a $b_n \in \mathbb{D}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatra teljesül az azóta róla elnevezett

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - |b_n|) < \infty$$

feltétel, akkor az $\epsilon_n := -\bar{b}_n/|b_n|$ ($b_n \neq 0$), $\epsilon_n = 1$ ($b_n = 0$) választás esetén a

$$B(z) := \prod_{n=0}^{\infty} B_{\mathbf{b}_n}(z) \quad (z \in \mathbb{D})$$

végtelen szorzat a \mathbb{D} minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens és $B \in \mathcal{H}^\infty$ belső függvény. A B_b -t *Blaschke-függvénynek*, a B -t *Blaschke-szorzatnak* nevezzük.

A $b \in \mathbb{D}$ szám a B_b függvény zérushelye, a $b^* := 1/\bar{b}$ szám, a b egyétkörre vonatkozó inverzképe (tükkörképe), a B_b függvény pólusa. Innen következik, hogy a B Blaschke-szorzatnak pontosan a b_n számok a gyökei, méghozzá azzal a multiplicítással, ahányszor a $(b_k, k \in \mathbb{N})$ sorozatban előfordulnak. Megfordítva, ismeretes [76], hogy bármely $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ ($p > 0$) függvény zérushelyei kielégítik a Blaschke-féle feltételt. Az ezekkel szerkesztett B Blaschke-szorzat tartalmazza az f zérushelyeit, és ezzel az f felírható $f = Bg$ alakban, ahol a $g \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ függvény nem tűnik el a \mathbb{D} -n és $\|f\|_{\mathcal{H}^p} = \|g\|_{\mathcal{H}^p}$. Ez a felbontás egy 1 abszolút értékű faktortól eltekintve egyértelmű [67]. A további részleteket illetően Móricz Ferenc [55] kitűnő magyar nyelvű tankönyvére utalunk.

1.8. Malmquist–Takenaka-rendszerek

A Blaschke-függvényeket felhasználva 1925-ben *Malmquist* [52] és *Takenaka* [81] egymástól függetlenül bevezették racionális függvényekből álló ortogonális rendszereknek egy igen tág osztályát a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ téren. Ezeket azóta *Malmquist–Takenaka* (MT)-rendszereknek nevezzük. Ezek a rendszerek tetszőleges $b_n \in \mathbb{D}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozattal generálhatók és felírhatók a következő explicit alakban:

$$\Phi_n(z) := \frac{\sqrt{1 - |b_n|^2}}{1 - \bar{b}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} B_{b_k}(z) \quad (z \in \bar{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \cup \mathbb{T}, B_{b_k} := B_{(b_k, 1)}, k \in \mathbb{N}).$$

Ismeretes, hogy a Blaschke-féle feltétel ellentettje (amit az irodalomban *Szász-féle feltételnek* is neveznek [68]) szükséges és elégséges ahhoz, hogy az MT-rendszer teljes legyen a $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ ($1 \leq p < \infty$) Hardy-terekben és a diszkalgebrán. Megjegyezzük, hogy a hatványfüggvények (a trigonometrikus függvények a \mathbb{T} -n) az MT-rendszerből az $b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) választással kaphatók. Míg a fizikai alkalmazásokban használt klasszikus ortogonális rendszerek [77] (a Jacobi-, Csebisev-, Laguerre- stb. rendszerek) legfeljebb egy-két paramétert tartalmaznak, addig az MT-rendszerekben végtelen sok paramétert választhatunk meg szabadon. Ez lehetővé teszi, hogy az adott feladathoz (rendszerhez) bizonyos szempontok szerint optimális paramétereket válasszunk. A rendszerelmélettel foglalkozók az 1960-as évektől kezdődően felismerték annak az előnyét, hogy a trigonometrikus rendszer helyett az egy vagy két paramétert tartalmazó speciális MT-rendszereket használják. A $b_n := b, n \in \mathbb{N}$ konstans sorozatnak megfelelő

$$I_n^b(z) := \frac{\sqrt{1 - |b|^2}}{1 - \bar{b}z} B_b^n(z) \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, n \in \mathbb{N})$$

MT-rendszert *diszkrét Laguerre-rendszernek* nevezik. Az elnevezést az indokolja, hogy a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett, az elméleti fizikában fontos szerepet

játszó Laguerre-függvények a diszkrét Laguerre-rendszerből Fourier-transzformációval származtathatók. A $b_{2n} = b$, $b_{2n+1} = \bar{b}$ ($n \in \mathbb{N}$) speciális MT-rendszert Kautz vezette be LTI-rendszerek reprezentációjára. Az MT-rendszerek irányítás-elméleti alkalmazásairól a [43] könyvben kaphatunk részletes áttekintést. Az MT-sorfejtések diszkrétizációjával és ezek alkalmazásaival (többek között az EKG-görbék egyszerű reprezentációjával) az 5. fejezetben foglalkozunk.

1.9. Martingál Hardy-terek

A Hardy-tér fogalmának martingálokra való kiterjesztése mind a valószínűség-elméletben, mind a Fourier-analízisben igen hasznos eszköznek bizonyult. Ezekről Weisz Ferenc [84], [85] monográfiáiból kaphatunk jó áttekintést. A $H^p[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$) *diadikus Hardy-tér* normáját az $f^* := \sup_n |E_n f|$ diadikus maximál-függvény L^p -normájával definiáljuk: $\|f\|_{H^p[0,1]} := \|f^*\|_{L^p[0,1]}$ ($1 \leq p < \infty$). Ismeretes, hogy a klasszikus Hardy-terekhez hasonlóan $H^p[0, 1] = L^p[0, 1]$, ha $1 < p < \infty$ és $H^1[0, 1] \subset L^1[0, 1]$ valódi altér. A Haar-rendszer bázis a $H^1[0, 1]$ diadikus Hardy-térben, a Franklin-rendszer bázis a $\mathcal{H}^1(\mathbb{T})$ Hardy-térben és a két bázis egymással ekvivalens. Ezeket a bázisokat felhasználva egy lineáris homeomorfizmust értelmezhetünk a két tér között. A két Hardy-tér további kapcsolatát illetően lásd még a [74] könyvet.

2. A Blaschke-csoport és a hiperbolikus geometria

A Blaschke-függvények nemcsak Hardy-térbeli függvények faktorizációjában játszanak fontos szerepet, hanem jól használhatók a hiperbolikus geometria modellezésére is.

2.1. Möbius- és Blaschke-transzformációk

Jelölje \mathfrak{M} a Möbius-transzformációk (a lineáris törtfüggvények) csoportját, $SL(2) := \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \det A = 1\}$ a komplex kétdimenziós speciális lineáris csoportot. Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow r_A(z) := \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}} \quad (z \in \bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\})$$

$SL(2) \rightarrow \mathfrak{M}$ leképezés csoport homomorfizmus: $r_{A_1 A_2} = r_{A_1} \circ r_{A_2}$, ahol \circ a függvénykompozíció műveletét jelöli. Az unitér mátrixok $SU(2)$ osztálya az $SL(2)$ -nek egy részcsoportját alkotják. Minden $A \in SU(2)$ mátrix

$$A = \begin{pmatrix} p & -q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix}, \quad \det A = |p|^2 + |q|^2 = 1 \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

alakú, továbbá a $Q_E(x) := |x_1|^2 + |x_2|^2$ ($x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$) (pozitív definit) kvadratikus alak invariáns az $SU(2)$ -beli transzformációkkal szemben:

$$Q_E(Ax) = Q_E(x) \quad (x \in \mathbb{C}^2, A \in SU(2)).$$

A továbbiakban az $SL(2)$ csoport

$$B = \begin{pmatrix} p & -q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix}, \quad \det B = |p|^2 - |q|^2 = 1 \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

alakú mátrixaiból alkotott részcsoportja játszik fontos szerepet. A

$$Q_H(x) := |x_1|^2 - |x_2|^2 \quad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2)$$

hiperbolikus kvadratikus alak ezekkel a transzformációkkal szemben invariáns: $Q_H(Bx) = Q_H(x)$. Ezzel összhangban a szóban forgó részcsoportot $SH(2)$ -vel (másutt a szakirodalomban $SU(1, 1)$ -gyel) szokás jelölni [83]. A $B \rightarrow r_B$ homomorfizmus az $SH(2)$ elemeit a Blaschke-függvényekbe viszi át:

$$r_B(z) := \frac{pz - q}{\bar{q}z + \bar{p}} = \frac{p}{\bar{p}} \frac{z - q/p}{1 - z\bar{q}/\bar{p}} = \epsilon \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} =: B_{\mathbf{b}}(z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$\left(b := q/p \in \mathbb{D}, \epsilon := \frac{p}{\bar{p}} \in \mathbb{T} \right),$$

következésképpen a Blaschke-függvények \mathfrak{B} osztálya az \mathfrak{M} Möbiusz-transzformációk egy részcsoportját alkotják. A (\mathfrak{B}, \circ) csoportot *Blaschke-féle csoportnak* nevezzük. Az

$$1 - |B_{\mathbf{b}}(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |b|^2)}{|1 - \bar{b}z|^2} \quad (z \in \mathbb{D}, \mathbf{b} = (b, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T})$$

azonosságból (lásd [41]) következik, hogy $\mathbf{b} \in \mathbb{B}$ esetén $B_{\mathbf{b}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, ill. $B_{\mathbf{b}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ bijekciók, továbbá $B_{\mathbf{e}}$ ($\mathbf{e} := (0, 1)$) a \mathfrak{B} egységeleme (az identikus leképezés) és $B_{\mathbf{b}^{-1}}$ ($\mathbf{b}^{-1} := (-b\epsilon, \bar{\epsilon})$) a $B_{\mathbf{b}}$ leképezés inverze (inverz függvénye). A

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{I}} := \{B_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} = (s, 1), s \in (-1, 1)\}, \quad \mathfrak{B}_{\mathbb{T}} := \{B_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} = (0, \epsilon), \epsilon \in \mathbb{T}\}$$

halmazok a Blaschke-csoport egyparaméteres részcsoportjai, amelyek

$$B_{\mathbf{b}} = B_{(0, e^{i(\varphi+\theta)})} \circ B_{(r, 1)} \circ B_{(0, e^{-i\varphi})} \quad (\mathbf{b} := (re^{i\varphi}, e^{i\theta}) \in \mathbb{B})$$

alapján generálják a Blaschke csoportot: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\mathbb{T}} \circ \mathfrak{B}_{\mathbb{I}} \circ \mathfrak{B}_{\mathbb{T}}$. A $\mathfrak{B}_{\mathbb{I}}$ -hez tartozó függvények az $\mathbb{I} := \{z \in \mathbb{D} : -1 < \Re z < 1, \Im z = 0\}$ halmazt önmagára képezik és az 1 és -1 pontokat helyben hagyják.



A Blaschke-leképezés

A \mathbb{D} diszk a

$$\rho(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2|} = |B_{z_2}(z_1)| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D})$$

ún. *pszeudohiperbolikus metrikával* teljes metrikus teret alkot, és ez a metrika invariáns a Blaschke-leképezésekkel szemben:

$$\rho(B_{\mathbf{b}}(z_1), B_{\mathbf{b}}(z_2)) = \rho(z_1, z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}, \mathbf{b} \in \mathbb{B}). \quad (7)$$

Ez a

$$\frac{B_{\mathbf{b}}(z_1) - B_{\mathbf{b}}(z_2)}{1 - B_{\mathbf{b}}(z_1)\overline{B_{\mathbf{b}}(z_2)}} = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \bar{z}_2} \frac{1 - b\bar{z}_2}{1 - \bar{b}z_2} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}, \mathbf{b} = (b, \epsilon) \in \mathbb{B})$$

azonosság következménye [22], [41]. A (7) tulajdonság jellemzi a Blaschke-függvényeket. Nevezetesen, a Schwarz–Pick-lemma szerint minden $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, $\|f\|_\infty \leq 1$ függvényre $\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2)$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{D}$), és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha f Blaschke-függvény [22].

A $\mathbf{b} \rightarrow B_{\mathbf{b}}$ leképezés egy csoportstruktúrát indukál a \mathbb{B} paraméter tartományban, továbbá

$$\mathfrak{z} \circ \mathbf{b} = (B_{\mathbf{b}^{-1}}(z), \zeta \eta_{\mathbf{b}^{-1}}(z)) \quad (\eta_{\mathbf{b}}(z) := \bar{\epsilon} \frac{1 - z\bar{b}}{1 - \bar{z}b}, \quad \mathbf{b} = (b, \epsilon), \mathfrak{z} = (z, \zeta) \in \mathbb{B}).$$

Innen nyilvánvaló, hogy a $(\mathfrak{z}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathfrak{z} \circ \mathbf{b}^{-1}$ csoportművelet folytonos a \mathbb{B} tér $\varrho_2(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) := |b_1 - b_2| + |1 - \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2|$ ($\mathbf{b}_j = (b_j, \epsilon_j) \in \mathbb{B}$) (euklideszi) metrikájában, következésképpen (\mathbb{B}, \circ) lokálisan kompakt, folytonos csoport.

A $B_{\mathbf{b}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ($\mathbf{b} = (re^{i\theta}, e^{i\varphi}) \in \mathbb{B}$) bijekció a \mathbb{T} peremen felírható

$$B_{\mathbf{b}}(e^{it}) = e^{i\beta_{\mathbf{b}}(t)}, \beta_{\mathbf{b}}(t) := \varphi + \theta + \gamma_r(t - \theta) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (8)$$

alakban, ahol a γ_r függvény a Poisson-féle magfüggvény integrálfüggvénye [63]:

$$\begin{aligned} \gamma_r(t) &= \int_0^t P_r(\tau) d\tau = 2 \arctan(c(r) \tan t/2) \\ (c(r) &:= (1+r)/(1-r), r \in [0, 1), t \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (9)$$

2.2. Hiperbolikus geometria

A Blaschke-csoport azonosítható a *Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria Poincaré-féle (PK) körmodelljében* az egybevágósági transzformációk csoportjával. A modell egyenesei a \mathbb{I} intervallum Blaschke-függvények által létesített képei: $l_b := \{B_b(\mathbb{I}) : b \in \mathbb{B}\}$. Ezek egybeesnek a \mathbb{T} -t merőlegesen metsző körök és egyenesek \mathbb{D} -be eső íveivel, ill. szakaszaival. A $B_b(1)$, $B_b(-1) \in \mathbb{T}$ pontokat az l_b egyenes végtelen távoli pontjainak, az $I := [s_1, s_2] \subset \mathbb{I}$ intervallumok $B_b(I)$ képeit (hiperbolikus) szakaszoknak nevezzük. Könnyen igazolható, hogy $l_{b_1} = l_{b_2}$ akkor és csak akkor, ha valamely $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{I}}$ függvényre $B_{b_1} = B_{b_2} \circ B$ teljesül, következésképpen a PK egyenesek osztálya azonosítható a $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}_{\mathbb{I}}$ jobb oldali mellékosztályokkal. A ρ mellett a

$$\rho^*(z_1, z_2) := \operatorname{arth} \rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho(z_1, z_2)}{1 - \rho(z_1, z_2)} \right) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D})$$

hiperbolikus metrika játszik kitüntetett szerepet. Bebizonyítható, hogy a ρ^* -ra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségben a $\rho^*(z_1, z_2) = \rho^*(z_1, z_3) + \rho^*(z_3, z_2)$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha z_3 a z_1, z_2 hiperbolikus szakaszon van.

A Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriának több egymással ekvivalens modellje ismert [19]. A *Poincaré-féle félsík (PS) modell* a körmodellből a

$$\Upsilon(z) := \frac{i - z}{i + z} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}})$$

Caley-féle transzformációval származtatható. A szóban forgó bijekció a $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ félsíkot a \mathbb{D} -re, az \mathbb{R} -et a $\mathbb{T} \setminus \{-i\}$ halmazra képezi és $\Upsilon(t) = e^{2i \arctan t} \in \mathbb{T}$ ($t \in \mathbb{R}$). A Blaschke-függvényeknek a

$$B_b^\diamond(z) := B_b(\Upsilon(z)) = \epsilon^\diamond \frac{z - b^\diamond}{z - \overline{b^\diamond}} \quad \left(z \in \overline{\mathbb{C}}, b^\diamond := \Upsilon^{-1}(b), \epsilon^\diamond = -\epsilon \frac{1+b}{1+\overline{b}} \right)$$

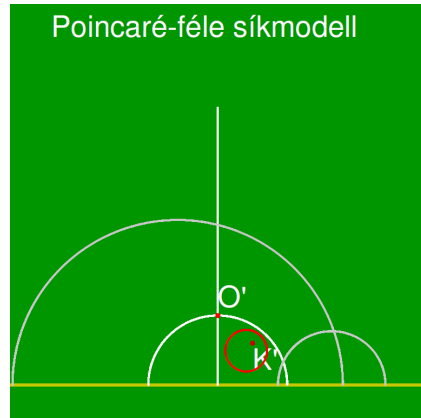
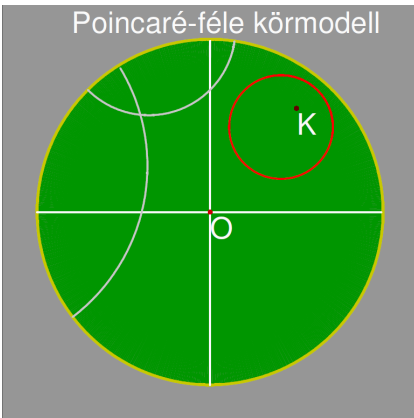
függvények felelnek meg a félsíkon. A félsík modell egyenesei a $\{\Upsilon^{-1}(l_b) : b \in \mathbb{B}\}$ alakzatok, a valós tengelyt merőlegesen metsző \mathbb{C}_+ -ba eső körívek, ill. félegyenesek, az egybevágósági transzformációk a $\Upsilon^{-1} \circ B_b \circ \Upsilon$ ($b \in \mathbb{B}$) leképezésekkel írhatók le.

A Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria *Cayley-Klein-féle (CK) modelljében* az egyenesek az euklideszi egyenesek \mathbb{D} -be eső szakaszaival egyenlők. Ezek a Poincaré-modell egyeneséből egyszerűen származtathatók az l_b hiperbolikus egyenesnek

megfeleltetve a végtelen távoli pontjait összekötő \bar{l}_b euklideszi szakaszt. Ez a megfeleltetés leírható a

$$\iota(z) := \frac{2z}{1 + |z|^2} \quad (z \in \bar{\mathbb{D}})$$

függvénnyel. Nevezetesen egyszerűen igazolható, hogy $\iota : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ bijekció, amelynek inverze $\iota^{-1}(z) = z/(1 + \sqrt{1 - |z|^2})$ ($z \in \mathbb{D}$), $\iota(z) = z$ ($z \in \mathbb{T}$), továbbá ι a PK-modell egyeneseit a CK-modell egyenseibe viszi át, ui. $\iota : l_b \rightarrow \bar{l}_b$ bijekció. Az Υ és az ι leképezések egy-egy pszeudohiperbolikus, ill. hiperbolikus metrikát indukálnak a PS-, ill. CK-modellen. Az alábbi ábrákon a Poincaré-féle kör- és síkmodellben négy-négy egymásnak megfelelő hiperbolikus egyenest szemléltettünk. Piros színnel egy-egy K , ill. K' középpontú hiperbolikus kört rajzoltunk fel.



A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria modelljei

3. Wavelet-, Gábor- és voice-transzformáció

A wavelet-transzformáció folytonos változatának értelmezéséhez, kiindulva egy $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ alapfüggvényből, az ún. *anyawaveletből*, dilatációt és translációt alkalmazva vezessük be a

$$\psi_{pq}(x) = \frac{\psi((x - q)/p)}{\sqrt{p}} \quad (x \in \mathbb{R}, (p, q) \in \mathbb{L} := (0, \infty) \times \mathbb{R})$$

függvénycsaládot. Ezzel a magfüggvénnyel képzett

$$(\mathcal{W}_\psi f)(p, q) := \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi}((x - q)/p) dx = \langle f, \psi_{pq} \rangle \quad ((p, q) \in \mathbb{L}, f \in L^2(\mathbb{R}))$$

integráloperátort *wavelet-transzformációnak* nevezzük. Ismeretes, hogy a ψ -re vonatkozó elég általános feltételek mellett az f függvény rekonstruálható a wavelet-transzformáltjából és érvényes rá az energiamegmaradást jelentő Plancherel-formula megfelelője.

A \mathcal{W}_ψ transzformációra, a trigonometrikus Fourier-transzformációhoz hasonlóan, csoportelméleti interpretáció adható, kiindulva az \mathbb{R} számegegyenes

$$\ell_{\mathbf{a}}(x) := px + q \quad (x \in \mathbb{R}, \mathbf{a} = (p, q) \in \mathbb{L})$$

affin leképezéseinek \mathfrak{L} osztályából [70]. Az \mathfrak{L} függvénycsalád zárt a \circ függvénykompozíció műveletére nézve, tartalmazza az $\mathbf{e} := (1, 0)$ -nak megfelelő $\ell_{\mathbf{e}}$ identikus leképezést, továbbá az $\mathbf{a}^{-1} := (p^{-1}, -qp^{-1}) \in \mathbb{L}$ elemnek megfelelő \mathfrak{L} -beli függvény az $\ell_{\mathbf{a}}$ inverz függvénye: $\ell_{\mathbf{a}^{-1}} = \ell_{\mathbf{a}}^{-1}$. Az (\mathfrak{L}, \circ) csoportot *affin csoportnak* nevezzük. Az \mathbb{L} halmazon bevezetve az

$$\mathbf{a} := \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2 := (p_1 p_2, q_1 + p_1 q_2) \quad (\mathbf{a}_j := (p_j, q_j) \in \mathbb{L}, j = 1, 2)$$

csoportműveletet egy, az affin csoporttal izomorf (\mathbb{L}, \circ) csoportot kapunk, továbbá $\ell_{\mathbf{a}} = \ell_{\mathbf{a}_1} \circ \ell_{\mathbf{a}_2}$. Az \mathbb{L} tér szokásos topológiájában a csoportműveletek folytonosak, következésképpen (\mathbb{L}, \circ) egy (nemkommutatív, lokálisan kompakt) topologikus csoport.

A wavelet-transzformáció leírható a

$$W_{\mathbf{a}}\psi := \frac{1}{\sqrt{p}}\psi \circ \ell_{\mathbf{a}}^{-1} \quad (\mathbf{a} = (p, q) \in \mathbb{L}, \psi \in L^2(\mathbb{R}))$$

operátorseregrel:

$$(\mathcal{W}_\psi f)(\mathbf{a}) = \langle f, W_{\mathbf{a}}\psi \rangle \quad (\mathbf{a} = (p, q) \in \mathbb{L}, f, \psi \in L^2(\mathbb{R})). \quad (10)$$

Egyszerűen verifikálható, hogy a $W_{\mathbf{a}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{L}$) operátorsereg az (\mathbb{L}, \circ) csoport egy *unitér reprezentációja* az $L^2(\mathbb{R})$ téren, azaz

$$i) \quad \|W_{\mathbf{a}}\psi\| = \|\psi\|, \quad ii) \quad W_{\mathbf{a}_1}(W_{\mathbf{a}_2}\psi) = W_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2}\psi \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{L}, \psi \in L^2(\mathbb{R})),$$

továbbá a reprezentáció folytonos a következő értelemben: minden $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre

$$iii) \quad \|W_{\mathbf{a}_n}\psi - W_{\mathbf{a}}\psi\| \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad \mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Az (\mathbb{L}, \circ) helyett ennek az (\mathbb{L}_0, \circ) , $\mathbb{L}_0 := \{(2^{-n}, k2^{-n}) : k, n \in \mathbb{Z}\}$ diszkrét rész-csoportját véve a Haar–Fourier-együttható általánosításaként a wavelet-transzformáció

$$(\mathcal{W}_\psi f)(2^{-n}, k2^{-n}) = \sqrt{2^n} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi}(2^n x - k) dx \quad (k, n \in \mathbb{Z})$$

diszkrét változatát kapjuk. Utalva az affin csoporttal való kapcsolatra a \mathcal{W}_ψ leképezést *affin wavelet-transzformációnak* is szokás nevezni.

Ez a modell mintául szolgálhat hasznos függvénytranszformációk szerkesztéséhez. Az affin csoport helyett egy (\mathbb{G}, \cdot) lokálisan kompakt topológikus csoportot és annak egy $V_g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ($g \in \mathbb{G}$) unitér reprezentációját véve a (10)-hez hasonlóan értelmezett

$$(\mathcal{V}_\psi f)(g) := \langle f, V_g \psi \rangle \quad (g \in \mathbb{G}, f, \psi \in \mathcal{H}) \quad (11)$$

leképezés korlátos lineáris operátor a \mathcal{H} Hilbert-térről a \mathbb{G} -n értelmezett folytonos, korlátos függvények $C(\mathbb{G})$ terére. A \mathcal{V}_ψ leképezést *Feichtinger* és *Gröchenig* nyomán a $(V_g, g \in \mathbb{G})$ reprezentáció által generált *voice-transzformációnak* nevezük [27], [28]. Akkor mondjuk, hogy a szóban forgó reprezentáció *irreducibilis*, ha nincs valódi zárt invariáns altere, azaz bármely $\psi \in \mathcal{H}, \psi \neq \theta$ elemre $V_g \psi$ ($g \in \mathbb{G}$) zárt rendszer a \mathcal{H} térben. Bebizonyítható, hogy *irreducibilis reprezentáció esetén a voice-transzformáció injektív* [42]. Jelölje m a \mathbb{G} csoport egy balinvariáns Haar-mértékét és $L_m^2(\mathbb{G})$ az m mérték által generált Hilbert-teret a \mathbb{G} csoporton. Azokat a $\psi \in \mathcal{H}$ elemeket, amelyekre $\mathcal{V}_\psi(\mathcal{H}) \subset L_m^2(\mathbb{G})$ teljesül, *megengedett elemeknek* nevezük. A megengedett elemek \mathcal{H}_0 halmaza sűrű a \mathcal{H} térben, továbbá $\psi \in \mathcal{H}_0, \psi \neq \theta$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{V}_\psi \psi \in L_m^2(\mathbb{G})$. Bebizonyítható, hogy van olyan $C : \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ pozitív definit kvadratikus alak, amelyre

$$\langle \mathcal{V}_{\psi_1} f_1, \mathcal{V}_{\psi_2} f_2 \rangle_{L_m^2(\mathbb{G})} = C(\psi_1, \psi_2) \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}} \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_0)$$

teljesül [36]. Ez a Plancherel-tétel voice-transzformáltra vonatkozó analogonjának tekinthető. Speciálisan, ha a \mathbb{G} csoport unimoduláris, azaz minden balinvariáns mérték egyben jobbinvariáns is, akkor egy C_1 abszolút konstanssal fennáll a

$$\|\mathcal{V}_\psi f\|_{L_m^2(\mathbb{G})} = C_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}} \quad (f \in \mathcal{H}, \psi \in \mathcal{H}_0)$$

egyenlőség, következésképpen $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1/C_1$ választás esetén a voice-transzformáció unitér [42]. Ez nemcsak azt jelenti, hogy igen általános feltételek mellett érvényes a Plancherel-tétel megfelelője, hanem ezzel minden konkrét esetben a formula speciális alakjára is magyarázatot kapunk, megvilágítva a \mathbb{G} csoport szerepét.

A *Gábor Dénes* által 1946-ban bevezetett transzformáció is speciális voice-transzformációként származtatható, kiindulva a *Heisenberg-féle csoport* egy speciális reprezentációjából. Erre utalva a szóban forgó leképezésre a *Gábor-transzformáció* mellett a *Weyl-Heisenberg wavelet-transzformáció* elnevezés is használatos. Az affin- és a Heisenberg-csoport esetén felírva a Haar-mértéket, jellemezhetőek a megengedett függvények és explicit alakban megadhatók a Plancherel-formula megfelelői [42].

4. Hiperbolikus waveletek

A hiperbolikus geometria Poincaré-féle modelljében az egybevágósági transzformációk a (\mathfrak{B}, \circ) Blaschke-féle csoporttal írhatók le. Az (affin) wavelet-transz-

formáció mintájára a Blaschke-csoport unitér reprezentációival értelmezett voice-transzformációkat *hiperbolikus wavelet-transzformációknak* nevezzük. A Blaschke-leképezések bijekciók mind a diszken, mind a tóruszon. A $\mathfrak{B}_0 := \{B_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \mathbb{B}_0\}$, $\mathbb{B}_0 := \{(r, 1) \in \mathbb{B} : r \in \mathbb{I} := (-1, 1)\}$ részcsoport elemei bijekciók az \mathbb{I} intervallumon. Jelöljük I -vel a \mathbb{D} , \mathbb{I} , \mathbb{T} halmazok bármelyikét és λ_I -vel a Lebesgue-mértéket az I halmazon. Legyen továbbá $\mathbb{B}_I = \mathbb{B}$, ha $I \in \{\mathbb{D}, \mathbb{T}\}$ és $\mathbb{B}_I = \mathbb{B}_0$, ha $I = \mathbb{I}$. Ekkor a $B_{\mathbf{b}}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{B}_I$) leképezések bijekciók az I halmazon.

Az unitér reprezentáció értelmezéséhez felhasználjuk az $L_{\lambda_I}^2(I)$ Hilbert-teret és bevezetjük a

$$V_{\mathbf{b}}^{[s]} f := [B'_{\mathbf{b}^{-1}}]^{s/2} f \circ B_{\mathbf{b}^{-1}} \quad (f \in L_{\lambda_I}^2(I), \mathbf{b} \in \mathbb{B}_I, s \in \mathbb{R}) \quad (12)$$

leképezéseket, ahol B' a B függvény deriváltját jelöli [62], [63], [64], [70]. Megmutatjuk, hogy a $V_{\mathbf{b}}^{[s]}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{B}_I$) leképezések homomorfizmusok. Valóban, a fenti definíció és a közvetett függvény differenciálási szabálya alapján

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2}^{[s]} f &= \left[(B_{\mathbf{b}_2^{-1}} \circ B_{\mathbf{b}_1^{-1}})' \right]^{s/2} f \circ (B_{\mathbf{b}_2^{-1}} \circ B_{\mathbf{b}_1^{-1}}) = \\ &= \left[(B'_{\mathbf{b}_2^{-1}} \circ B_{\mathbf{b}_1^{-1}}) \right]^{s/2} [B'_{\mathbf{b}_1^{-1}}]^{s/2} (f \circ B_{\mathbf{b}_2^{-1}}) \circ B_{\mathbf{b}_1^{-1}} = \\ &= [B'_{\mathbf{b}_1^{-1}}]^{s/2} \left(\left[(B'_{\mathbf{b}_2^{-1}})^{s/2} f \circ B_{\mathbf{b}_2^{-1}} \right] \right) \circ B_{\mathbf{b}_1^{-1}} = V_{\mathbf{b}_1}^{[s]} (V_{\mathbf{b}_2}^{[s]} f). \end{aligned}$$

Legyen $s(I)$ az I halmaz dimenziója, azaz $s(I) = 1$, ha $I \in \{\mathbb{I}, \mathbb{T}\}$ és $s(I) = 2$, ha $I = \mathbb{D}$. Megmutatjuk, hogy $V_{\mathbf{b}}^{[s(I)]}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{B}_I$) unitér operátor a $H = L_{\lambda_I}^2(I)$ Hilbert-téren. Valóban az I halmazon a $w = B_{\mathbf{b}}(z)$ helyettesítést alkalmazva és a $d\lambda_I(w) = |B'_{\mathbf{b}}(z)|^{s(I)} d\lambda_I(z)$ transzformációs formula, valamint a $B'_{\mathbf{b}^{-1}}(B_{\mathbf{b}}(z))B'_{\mathbf{b}}(z) = 1$ ($z \in I$) azonosság alapján

$$\begin{aligned} \left\| V_{\mathbf{b}}^{[s(I)]} f \right\|_H^2 &= \int_I |B'_{\mathbf{b}^{-1}}(w)|^{s(I)} |f(B_{\mathbf{b}^{-1}}(w))|^2 d\lambda_I(w) = \\ &= \int_I |B'_{\mathbf{b}^{-1}}(B_{\mathbf{b}}(z))|^{s(I)} |f(B_{\mathbf{b}^{-1}}(B_{\mathbf{b}}(z)))|^2 |B'_{\mathbf{b}}(z)|^{s(I)} d\lambda_I(z) = \\ &= \int_I |f(z)|^2 d\lambda_I(z) = \|f\|_H^2. \end{aligned}$$

Az I halmaz analitikus függvényeiből álló $\mathcal{H}^2(I) := L_{\lambda_I}^2(I) \cap \mathfrak{A}$ tér a $L_{\lambda_I}^2(I)$ Hilbert-tér zárt altere, amely $I = \mathbb{T}$ esetén a $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ Hardy-térrel, $I = \mathbb{D}$ esetén a $\mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ Bergman-térrel egyenlő. Innen következik, hogy a szóban forgó reprezentációk a $\mathcal{H}^2(I)$ tér bármely ortogonális bázisát ortogonális bázisba viszik át. Speciálisan $I \in \{\mathbb{D}, \mathbb{T}\}$ esetén az $e_n(z) = z^n$ ($z \in I, n \in \mathbb{N}$) ortogonális bázisból az

$$L_n^{\mathbf{b}}(z) := \left(V_{\mathbf{b}}^{[s(I)]} e_n \right) (z) = \left(\frac{\sqrt{1 - |\mathbf{b}|^2}}{1 - \bar{\mathbf{b}}z} \right)^{s(I)} B_{\mathbf{b}}^n(z) \quad (\mathbf{b} = (b, 1) \in \mathbb{B}_I, z \in I, n \in \mathbb{N})$$

diszkrét Laguerre-rendszert kapjuk a Hardy-, ill. a Bergman-téren. Az $L^2(\mathbb{I})$ tér Legendre-bázisára alkalmazva a szóban forgó transzformációkat a $b \in \mathbb{I}$ paramétertől függő, racionális függvényekből álló ortonormált rendszereknek egy egyparaméteres osztálya származtatható.

A (12) unitér reprezentáció által generált

$$(\mathcal{V}_\psi f)(\mathbf{b}) := \left\langle f, V_{\mathbf{b}}^{[s(I)]} \psi \right\rangle_I \quad (f, \psi \in L^2_{\lambda_I}(I)) \quad (13)$$

voice-transzformációt *hiperbolikus wavelet-transzformációnak*, a $V_{\mathbf{b}}^{[s(I)]} \psi$ függvényeket hiperbolikus waveleteknek nevezzük.

Bebizonyítható, hogy $I \in \{\mathbb{D}, \mathbb{T}\}$ esetben a $V^{[s(I)]}$ reprezentáció irreducibilis a $\mathcal{H}^2(I)$ téren, következésképpen az általa generált \mathcal{V}_ψ hiperbolikus wavelet transzformáció injektív. A [63], [64], [65] dolgozatokban a szóban forgó esetekben vizsgáltuk a $\mathcal{H}^2(I)$ megengedett elemeit és megadtuk a Plancherel-formula megfelelőit a hiperbolikus wavelet transzformáltra. Például $I = \mathbb{D}$, azaz a $\mathcal{H}^2(\mathbb{I}) = \mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ Bergman-tér esetén megmutattuk, hogy minden $\psi \in \mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ megengedett, továbbá

$$\|\mathcal{V}_\psi f\|_{L^2_m(\mathbb{B})} = c \|\psi\|_{\mathcal{B}^2(\mathbb{D})} \|f\|_{\mathcal{B}^2(\mathbb{D})},$$

ahol c abszolút konstans és m a (\mathbb{B}, \circ) csoport Haar-mértéke, amely explicit alakban adható meg.

A [64], [65] dolgozatokban előállítottuk a $V_{\mathbf{b}}^{[2]}$ reprezentáció

$$t_{mn}(\mathbf{b}) := \left\langle V_{\mathbf{b}}^{[2]} e_n, e_m \right\rangle \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

mátrixát az e_n ($n \in \mathbb{N}$) bázisban. Ezen az úton eljuthatunk az optikában és a cornea topográfiában alapvető szerepet játszó $Y_n^\ell(r, \varphi)$ Zernike-függvényekhez. Nevezetesen

$$t_{mn}(re^{i\varphi}) = \frac{(-1)^m \sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n+m+1}} Y_{\min\{m,n\}}^{|m-n|}(r, \varphi) \quad (\mathbf{b} = (re^{i\varphi}, 1) \in \mathbb{B}).$$

Ennek alapján levezethetők a Zernike-függvények ismert tulajdonságai, többek között az addíciós képletek. A hiperbolikus wavelet-transzformációra vonatkozó eredmények kiterjeszthetők olyan reprezentációkra, amelyekben az $L^2_{\lambda_I}(I)$ terek helyett a $d\mu_I(z) = (1-|z|^2)^s d\lambda_I(z)$ ($I = \mathbb{D}, \mathbb{I}$) mérték által generált súlyozott Hilbert-térből indulunk ki [56],[57],[58],[59]. Diszkrét hiperbolikus waveletek konstrukciójáról, ezekkel kapcsolatos multirezolúcióról a [29], [30] dolgozatok nyújtanak betekintést. A Zernike-függvények diszkretizációjával a [62] dolgozatban foglalkoztunk. Ezt alkalmaztuk cornea felületek matematikai leírásában [24], [25], [26].

5. Alkalmazások

Ebben a pontban a hiperbolikus wavelet-transzformáció néhány alkalmazását mutatjuk be.

5.1. Pólusok, sajátértékek, identifikáció

A hiperbolikus wavelet-transzformáció felhasználható racionális függvények pólusainak, mátrixok sajátértékeinek meghatározására és rendszerek identifikációjára. Ehhez a $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ Hardy-tér $e_n(z) := z^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$) bázisfüggvényeivel képzett $\mathcal{L}_n := \mathcal{V}_{e_n}^{[1]}$ hiperbolikus wavelet-transzformáltakból (a diszkrét Laguerre–Fourier-együtthatókból) indulunk ki:

$$(\mathcal{L}_n f)(b) := \langle f, V_b^{[1]} e_n \rangle = \langle f, L_n^b \rangle \quad (n \in \mathbb{N}, \mathbf{b} = (b, 1) \in \mathbb{B}).$$

A $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ elemeihez a \mathbb{D} -n analitikus függvényekből álló $\mathcal{L}f := (\mathcal{L}_n f, n \in \mathbb{N})$ sorozatokat rendelve egy több vonatkozásban is jól használható leképezést definiálunk. Például a szóban forgó sorozat ℓ^2 normája konstans függvény a diszken: $\|(\mathcal{L}f)(b)\|_{\ell^2} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ ($b \in \mathbb{D}$). A

$$(Q_n f)(b) := \frac{(\mathcal{L}_{n+1} f)(b)}{(\mathcal{L}_n f)(b)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (14)$$

nemlineáris funkcionálsorozat felhasználható racionális függvények pólusainak kiszámításához. Az elemi racionális függvényeket célszerű $f(z) = 1/(1 - \bar{a}z)^n$ ($z \in \mathbb{T}$, $a \in \mathbb{D}$) alakban felvenni, ahol az $a \in \mathbb{D}$ paraméter az f függvény $a^* = 1/\bar{a}$ pólusának az egységkörre vonatkozó tükörképe. Ennek alapján az a paramétert az f elemi racionális függvény n -edrendű *inverzpólusának* nevezzük. Ismeretes, hogy minden valódi racionális függvény előállítható elemi racionális függvények lineáris kombinációjaként. *Soumelidis* észrevette, hogy $n = 1$ esetén a (14) sorozat állandó, amelynek abszolút értéke az $a, b \in \mathbb{D}$ pontok $r = \rho(a, b)$ pseudohiperbolikus távolságával egyenlő, következésképpen az $a \in \mathbb{D}$ pont a b középpontú, r sugarú hiperbolikus körön van. Ha f olyan valódi racionális függvény, amelynek a_i ($i = 1, 2, \dots, N$) inverzpólusai \mathbb{D} -be esnek, akkor kivételes $b \in \mathbb{D}$ pontoktól eltekintve létezik a (14) sorozat határértéke. Ez a tulajdonság felhasználható az a_i inverzpólusok kiszámítására. Ezt szemléltettük az alábbi ábrán három egyszeres inverzpólus esetén. Az egységkörrel koncentrikus kör feltüntetett b pontjaiban meghatároztuk az $r_b := \lim_{n \rightarrow \infty} |(Q_n f)(b)|$ sugarakat, és felrajzoltuk a b középpontú, r_b sugarú hiperbolikus köröket.

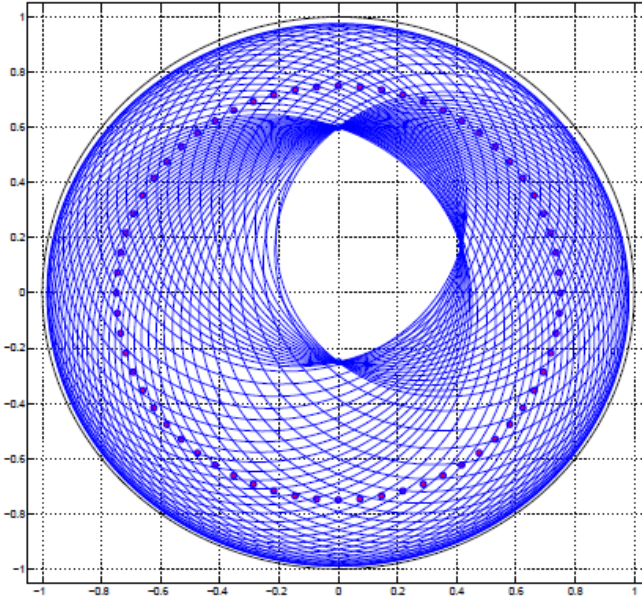
Bebizonyítható, hogy az a_i, a_j hiperbolikus szakaszok

$$D_{ij} := \{b \in \mathbb{D} : \rho(b, a_i) = \rho(b, a_j)\}$$

hiperbolikus felezőmerőlegeseinek pontjaitól eltekintve a $(Q_n f)(b)$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat

minden $b \in \mathbb{D}$ pontban konvergens és a határérték \mathbb{D} egy legfeljebb N -elemű részhalma. Legyen ui.

$$D_0 := \cup_{1 \leq i < j \leq N} D_{ij}, \quad D_i := \left\{ b \in \mathbb{D} : \rho(b, a_i) > \max_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \rho(b, a_j) \right\}.$$



Az inverzpólusok meghatározása *Soumelidis* módszerével

Ekkor a D_i ($1 \leq i \leq N$) halmazok páronként diszjunktak és $\mathbb{D} = \cup_{0 \leq i \leq N} D_i$. Bebizonyítható, hogy minden $b \in D_i$ pontban a $(Q_n f)(b)$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat ugyanahhoz a $b_i \in \mathbb{D}$ számhoz konvergál és ebből a_i egyszerűen rekonstruálható:

$$b_i = (Qf)(b) := \lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n f)(b), \quad B_b^{-1}(\bar{b}_i) = a_i \quad (b \in D_i, 1 \leq i \leq N).$$

Egyszeres pólusok esetén a

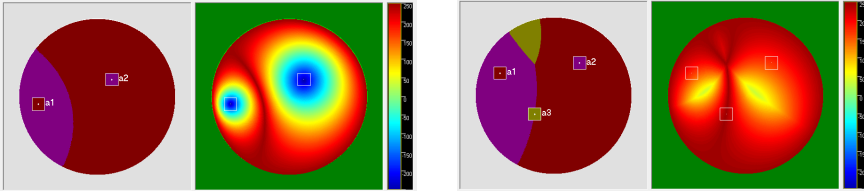
$$q_i(b) := \max_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \rho(b, a_j) / \rho(b, a_i) \quad (b \in D_i, 1 \leq i \leq N)$$

számok a konvergencia sebesség mérésére is felhasználhatók [71]:

$$|b_i - (Q_n f)(b)| = O(q_i^n(b)) \quad (b \in D_i, n \rightarrow \infty).$$

Többszörös gyök esetén a konvergencia sebessége: $|b_i - (Q_n f)(b)| = O(1/n)$. Az alábbi ábrákon két, ill. három inverzpólus esetén szemléltetjük a hiperbolikus

felezőmerőleges által létesített, különböző színű D_i tartományokat. A tartományok bármely $b \in D_i$ pontjából kiindulva a $(Q_n(b), n \in \mathbb{N})$ sorozat ugyanahhoz a $b_i = \overline{B_b}(a_i)$ számhoz konvergál. A konvergencia sebességét színskálát használva a jobb oldali ábrákon szemléltetjük.



Megjegyezzük, hogy az inverzpólusok elhelyezkedésétől függően előfordulhat, hogy valamely i -re a D_i halmaz üres. Ilyenkor az a_i^* pólust *rejtőzködőnek* nevezzük. Az ismertetett eljárással az

$$(Sf)(b) := B_b^{-1}(\overline{Q}f)(b) \quad (b \in \mathbb{B} \setminus D_0)$$

nemlineáris operátort felhasználva az f racionális függvény rejtőzködő pólusait kivéve, valamennyi pólusa megkapható. Az így kapott pólusokat leválasztva és az eljárást megismételve megkaphatjuk az f valamennyi pólusát [10], [11], [12].

A most ismertetett eljáráshoz hasonló algoritmus szerkeszthető mátrixok sajátértékeinek kiszámítására. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ mátrix $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sajátértékei a \mathbb{D} -be esnek. Tetszőleges $x_0 \in \mathbb{C}^N$ vektorból kiindulva az ún. Mises-féle iterációt alkalmazva képezzük az

$$x_{n+1} = Ax_n \in \mathbb{C}^N \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ez a rekurzió speciális diszkrét időinvariáns rendszerként is felfogható. Az algoritmust ebben a speciális esetben mutatjuk be, megjegyezve, hogy a módszer tetszőleges időinvariáns diszkrét rendszerre kiterjeszhető. Jelölje

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$$

a rendszer átviteli függvényét. Az $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^N$ függvény analitikus és

$$F(z) - x_0 = z \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n = zA \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \right) = zAF(z).$$

Innen következik, hogy az átviteli függvény felírható

$$F(z) = (I - zA)^{-1}x_0 \quad (z \in \mathbb{D})$$

alakban. Az F a $\overline{\mathbb{D}}$ zárt diszken analitikus racionális függvény, amely az A mátrix

$$p_A(z) := \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j)^{\nu_j} \quad (z \in \mathbb{C}, m \leq N, \nu_1 + \dots + \nu_m \leq N)$$

minimálpolinomjával kifejezhető

$$F(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\nu_j-1} \frac{z^k}{(1 - \lambda_j z)^{k+1}} h_{ij}(A) x_0$$

alakban, ahol a h_{ij} -k a p_A minimálpolinom gyökei által generált Hermite-féle interpolációs alappolinomok. Az F függvény F_j koordinátáira alkalmazva az előbb ismertetett eljárást megkapjuk a nem rejtőzködő $a_i = \lambda_i$ inverzpolusokat, ill. sajátértékeket [72].

5.2. Diszkrét ortogonális rendszerek

Ortogonalis sorfejtések gyakorlati alkalmazásaiban mindig a rendszer valamely diszkrétizált változatát használjuk. Ez azt jelenti, hogy az eredeti $\varphi_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) folytonos rendszer helyett első N tagjának az I intervallum egy N elemű I_N részhalmazára vonatkozó leszűkítéseit tekintjük. A diszkrétizációs eljárás akkor lesz jól használható, ha a diszkrét rendszer az I_N valamely

$$[f, g]_N := \sum_{t \in I_N} f(t) \bar{g}(t) \nu_N(t) \quad (\nu_N(t) > 0)$$

diszkrét skaláris szorzatára nézve ortonormált marad, azaz

$$[\varphi_n, \varphi_m]_N = \delta_{mn} \quad (0 \leq m, n < N). \quad (15)$$

Az ilyen eljárásokat *ortogonalis diszkrétizációnak* nevezzük. Ebben az esetben a diszkrét Fourier-sorfejtés N -edik részletösszege előállítja a kifejtett függvényt az I_N pontjaiban, következésképpen ezzel egyúttal egy interpolációs eljárást is kapunk. A trigonometrikus rendszerből az $I = [0, 2\pi)$ alapintervallum ekvidisztans felosztásával származtathatjuk a diszkrét trigonometrikus rendszert.

A Malmquist–Takenaka-rendszerek ortogonalis diszkrétizációjához abból indulunk ki, hogy a Blaschke-függvények a trigonometrikus rendszerből argumentumtranszformációval származtathatók:

$$B_b(e^{it}) = e^{i\beta_b(t)}, \quad \beta_b(t) = \varphi + \gamma_r(t - \varphi) \quad (t \in \mathbb{R}, b = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}),$$

ahol γ_r a Poisson-féle magfüggvény integrálfüggvényével egyenlő (lásd (8),(9)). Innen következik, hogy az MT-rendszerek tagjaiban szereplő Blaschke szorzatok előállíthatók

$$\prod_{k=0}^{N-1} B_{b_k}(e^{it}) = e^{iN\theta_N(t)}, \quad \theta_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{b_k}(t)$$

alakban, ahol $\theta_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növény függvény, amelyre $\theta_N(t + 2\pi) = \theta_N(t) + 2\pi$ ($t \in \mathbb{R}$). Az MT-rendszer Dirichlet-féle magfüggvényei, a trigonometrikus rendszerhez és az ortogonális polinomokhoz hasonlóan, zárt alakban írhatók fel [43], [60]:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Phi_j(z) \overline{\Phi}_j(\zeta) = \frac{\prod_{k=0}^{N-1} B_{b_k}(z) \overline{B}_{b_k}(\zeta) - 1}{z\zeta - 1} \quad (z, \zeta \in \mathbb{D}).$$

Innen következik, hogy a

$$\mathbb{T}_N := \{z_k := e^{i\tau_k} : \tau_k := \theta_N^{-1}(t_0 + 2k\pi/N), 0 \leq k < N\}$$

halmaz pontjaiban:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Phi_j(z_k) \overline{\Phi}_j(z_\ell) = \delta_{k\ell} \Lambda_N(z_k), \quad \Lambda_N(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - |b_j|^2}{|1 - \overline{b_j}z|^2} \quad (0 \leq k, \ell < N).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy az $\alpha_{jk} := \Phi_j(z_k) / \sqrt{\Lambda_N(z_k)}$ ($0 \leq j, k < N$) mátrix ortogonális, következésképpen

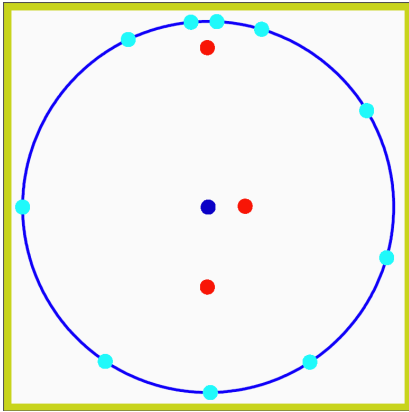
$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{rk} \overline{\alpha}_{sk} = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_r(z_k) \overline{\Phi}_s(z_k) / \Lambda_N(z_k) = \delta_{rs}.$$

Ezzel a $I_N := \mathbb{T}_N$ halmazon a $\nu_N = 1/\Lambda_N$ súlyfüggvénnyel az MT-rendszereknek egy (15) alakú ortogonális diszkretizációját kaptuk. Ezeket az eredményeket az [23] dolgozatban átvitték a félsíkra.

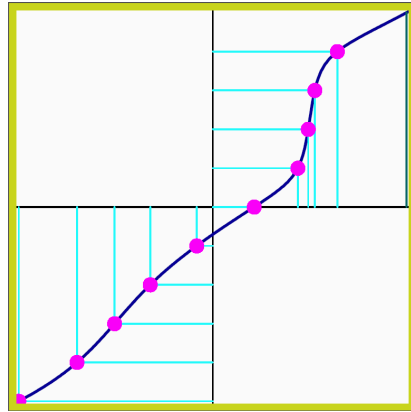
A diszkrét MT-rendszerek alkalmazásával a jelek alakjából kiinduló, adaptív interpolációs eljárásokat szerkeszthetünk. Az alábbi ábrákon a \mathbb{T}_N halmazt és a θ_N függvényt szemléltetjük. A pólusok választásától függ a \mathbb{T}_N pontjainak eloszlása.

Ez az eljárás jól használható EKG-görbék interpolációjára, amit az alábbi ábrán szemléltetünk [31]. Jól látható, hogy ott, ahol a függvény gyorsabban változik, ott sűrűbb felosztást alkalmazunk. A t_0 paramétert úgy választható, hogy a görbe maximumhelye a csomópontok között legyen. Az optimális approximációt eredményező pólusok meghatározására szolgáló algoritmusokat a későbbiekben vázoljuk.

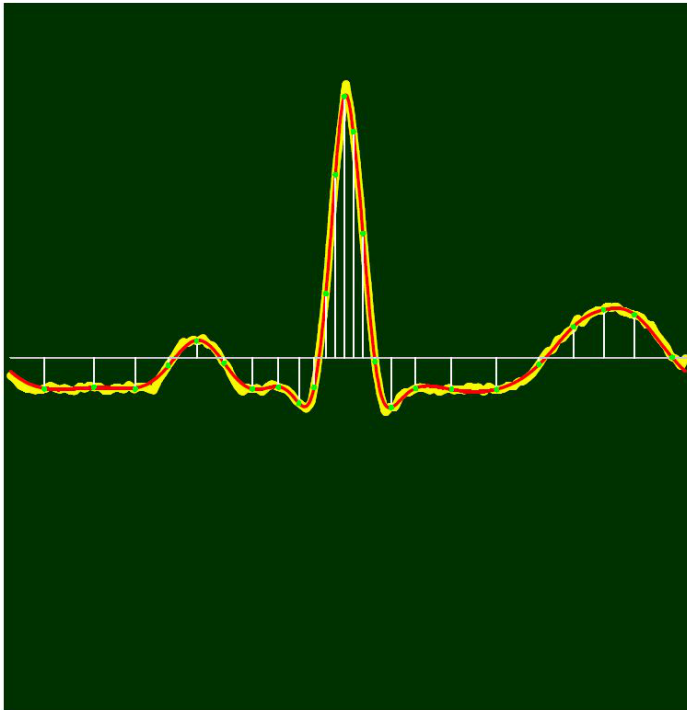
Megjegyezzük, hogy a Christoffel–Darboux-formulából hasonló módon adódik a $\nu : I \rightarrow (0, \infty)$ súlyfüggvényre ortogonolális P_n^ν ($n \in \mathbb{N}$) polinomrendszer egy ortogonális diszkretizációja [77]. Nevezetesen az I_N halmaznak a P_N^ν gyökeit választva a $\varphi_n = P_n^\nu$ ($0 \leq n < N$) függvényekre fennáll a (15) diszkrét ortogonalitási reláció, ahol ebben az esetben $\nu_N(t)$ ($t \in I_N$) a Christoffel–Darboux-féle számokat jelentik. Ezeket az elveket alkalmaztuk Zernike-függvények ortogonális diszkretizációjában, továbbá egyéb diszkrét ortogonális rendszerek, approximációs és interpolációs eljárások szerkesztésében. Az így kapott eredmények jól használhatók a



A T_N halmaz



A θ_N függvény



EKG-görbe közelítése diszkrét MT-sorfejtéssel

szem szaruhártyája, a cornea felületének matematikai leírására és a gömbfelületen értelmezett függvények közelítésére [25], [26], [61], [62].

5.3. Diszkrétizáció és elektrosztatikai egyensúly

Az MT-rendszerek és az ortogonális polinomok számos hasonló tulajdonsággal rendelkeznek. A klasszikus ortogonális polinom gyökei egy elektrosztatikai egyensúllyal hozhatók kapcsolatba [77]. Hasonló interpretáció adható a \mathbb{T}_N diszkrétizációs pontrendszerre [60]. Nevezetesen legyen

$$\begin{aligned}\omega_1(z) &:= \prod_{j=0}^{N-1} (z - b_j), \\ \omega_2(z) &:= \prod_{j=0}^{N-1} (1 - \bar{b}_j z), \\ \omega(z) &:= \omega'_1(z)\omega_2(z) - \omega'_2(z)\omega_1(z) \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}\tag{16}$$

Ekkor a $2(N-1)$ -edfokú ω polinomnak bármely $\lambda \in \mathbb{C}$ gyökével együtt a $\lambda^* := 1/\bar{\lambda}$ szám, a λ \mathbb{T} -re vonatkozó tükröképe is gyöke, ugyanazzal a multiplicitással. Jelölje $\lambda_k \in \mathbb{D}$ ($k = 1, \dots, s$) az ω függvény \mathbb{D} -be eső, páronként különböző gyökeit és legyen m_k a λ_k multiplicitása. Ekkor fennáll a következő egyensúlyi feltétel:

$$\sum_{k=1, k \neq n}^N \frac{1}{z_n - z_k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{m_j}{z_n - \lambda_j} + \frac{m_j}{z_n - \lambda_j^*} \right) \quad (n = 1, 2, \dots, N).\tag{17}$$

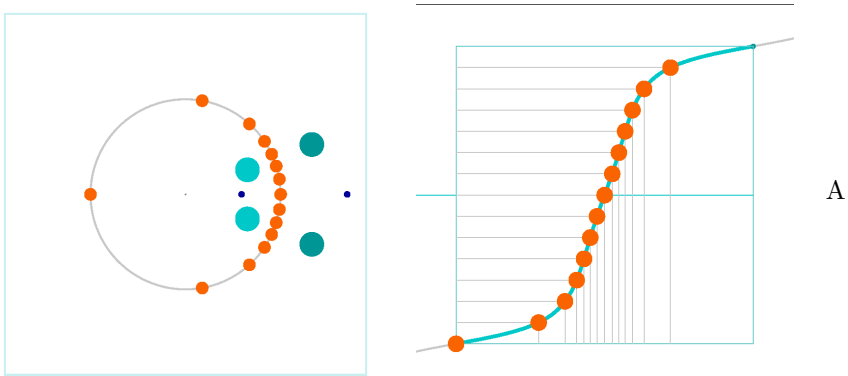
Az alábbi ábrán a diszkrét Kautz-rendszernek megfelelő $b_0 = b$, $b_1 = \bar{b} \in \mathbb{D}$ esetben szemléltetjük az egyensúlyi helyzetet, ahol $m_0 = m_1 = 7$, $N = 14$. Ebben az esetben a $2N - 2 = 26$ -odfokú ω polinomnak a b_0 , b_1 , b_0^* , b_1^* számok 6-szoros gyökei, amelyeket az ábrán a multiplicitással arányos sugarú (világos- és sötétkék színű) körökkel, a maradék λ és λ^* egyszeres multiplicitású gyökpárt a multiplicitással arányos fekete színű körökkel szemléltetjük. A \mathbb{T}_N pontjait sárga színnel tüntettük fel.

Speciálisan $b_0 = \dots = b_{N-1} = b$ esetén az ω polinomnak a b és b^* számok $(N-1)$ multiplicitású gyökei és ebben az esetben az egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_{k=1, k \neq n}^N \frac{1}{z_n - z_k} = \frac{N-1}{2} \left(\frac{1}{z_n - b} + \frac{1}{z_n - b^*} \right) \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

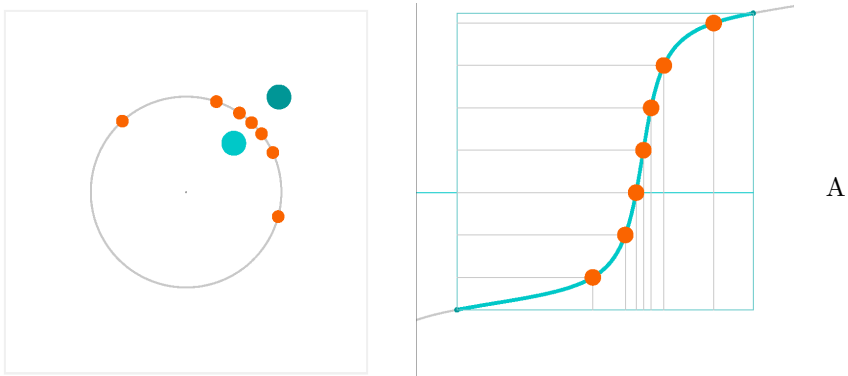
Ez utóbbi két egyenlet elektrosztatikus egyensúlyi feltételként interpretálható. Az

$$F_{nk} = \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_k} = \frac{1}{|z_n - z_k|} \frac{z_n - z_k}{|z_n - z_k|}$$



\mathbb{T}_N pontjai Kautz-rendszer esetén

kétdimenziós vektor olyan két azonos előjelű, egységnyi töltés között fellépő taszító erővel egyenlő, ahol a Coulomb-erő a töltések távolságának reciprokával arányos. A második egyenletet interpretálva helyezzünk el N egységnyi töltéssel rendelkező, az egységkörön szabadon mozgó részecskét és rögzítsünk a b és b^* pontokban egy-egy $(N - 1)/2$ töltéssel rendelkező részecskét. Az ezek által kifejtett erőket külső, a mozgó töltések által kifejtett erőket belső erőknek nevezzük. A (17) egyenlet azt fejezi ki, hogy minden z_n részecskére ható külső erők eredője a rá ható belső erők eredőjével egyenlő.



\mathbb{T}_N pontjainak elektrosztatikus interpretációja

5.4. MT-sorfejtések szummációja

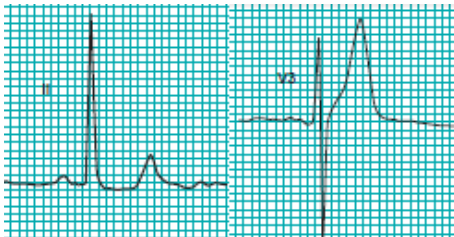
Az MT-rendszerek diszkrét változatát rendszerek identifikációjában, EKG-görbék approximációjában és tömörítésében használtuk. Az első problémakörrel összefüggésben megemlítünk két eredményt, amelyek periodikus MT-rendszerek szerinti sorfejtések (speciálisan diszkrét Laguerre- és Kautz-sorok) szummációjával kapcsolatosak. Előfordulhat, hogy a szóban forgó sorfejtések, a trigonometrikus Fourier-sorokhoz hasonlóan, még folytonos függvény esetén sem konvergálnak. Ennek a hátránynak a kiküszöbölésére szummációs eljárásoknak egy széles osztályát (az ún. θ -szummációkat) alkalmazva megmutattuk, hogy folytonos függvények periodikus MT-rendszer szerinti θ -közepi egyenletesen konvergálnak. Hasonló eredményeket igazoltunk diszkrét sorfejtésekre periodikus MT-rendszerek esetén [7],[8], [13].

5.5. EKG-görbék approximációja

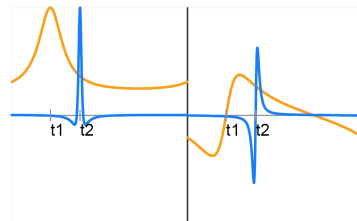
A trigonometrikus rendszerhez hasonlóan $b_0 = 0$ esetén a $\Phi_{-n}(z) = \bar{\Phi}_n(z)$ ($z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N}$) függvények hozzávételével az MT-rendszer kiegészíthető az $L^2(\mathbb{T})$ téren ortonormált rendszerré. Ekkor az $\Re\Phi_n, \Im\Phi_n$ ($n \in \mathbb{N}$) valós rendszerek is ortogonálisak az $L^2(\mathbb{T})$ téren. Az EKG-görbéket 2π szerint periodikus függvényekkel modellezzük. Tipikus szakaszai (pl. az ún. QRS-komplexusok) hasonlíthatnak az MT-rendszereket generáló

$$r_{b,j}(z) := \frac{1}{(1 - \bar{b}z)^j} \quad (b \in \mathbb{D}, j = 1, 2, \dots, z \in \mathbb{T})$$

ún. elemi racionális függvények valós és képzetes részeinek lineáris kombinációjához. Ez az észrevétel volt a háttere annak, hogy a trigonometrikus-, ill. wavelet-sorfejtések helyett az EKG-görbéket a valós MT-bázisokban reprezentáljuk. Az alábbi ábra bal oldali részén egy valódi EKG-jel két elvezetésének a grafikonja látható. Az ábra jobb oldali részén elemi racionális függvények valós és képzetes részeinek grafikonja látható. A sárga színű görbék az egyszeres, a kék színűek a kétszeres multiplicitású pólusoknak felelnek meg.



Valódi EKG-jel két elvezetése



Elemi racionális függvények

A valós MT-rendszerek ortogonális diszkretizációját alkalmazva optimális $(b_j, j \in \mathbb{N})$ paraméterek meghatározására különböző algoritmusokat dolgoztunk ki. Az EKG-görbék elemzése során szerzett tapasztalatok alapján három paramétert, a $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{D}$ inverzpólust használtunk, és ezeket ismételtük periodikusan. Az f EKG-jel optimális reprezentációjához két lépésben jutunk el: először meghatározzuk az f -nek az

$$\mathcal{L}_s := \text{span}\{\Re r_{b_j, k}, \Im r_{b_j, k} : 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq s\}$$

altértől vett

$$\text{dist}(b_1, b_2, b_3) := \min_{g \in \mathcal{L}_s} \|f - g\|$$

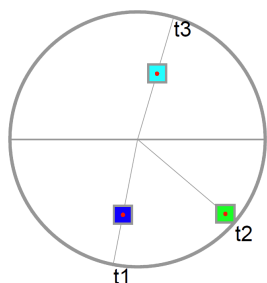
távolságát, majd ezt minimalizáljuk a b_1, b_2, b_3 paraméterekre.

Az első lépésben felhasználjuk az f -nek a diszkrét valós MT-rendszer szerinti sorfejtését, amely egyúttal interpolál a diszkretizáció pontjaiban. A dist függvény minimalizálására többek között a Nelder–Mead-algoritmusnak egy hiperbolikus térre adaptált változatát használtuk [31], [32], [48]. A diszkrét MT-rendszerek alkalmazását segítő MatLab Toolbox készült [44]. A diszkretizáció csomópontjainak kiszámítására a [47] és az [51] dolgozatokban hatékony algoritmusok születtek. A dist függvény más elven történő minimalizálását és más típusú alkalmazásokat illetően a [45], [46] dolgozatokra utalunk.

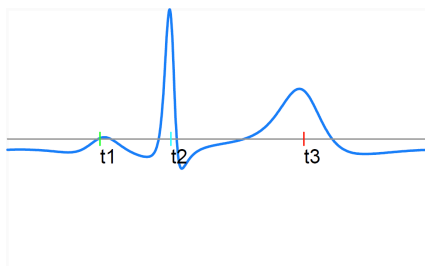
Az FFT-hez hasonló gyors algoritmusok szerkeszthetők bizonyos speciális MT-rendszerekre. Ezek 2^n -tényezős Blaschke-szorzatok szorzatrendszereiként állíthatók elő. A generáló tényezők, amelyek a Rademacher-függvények megfelelői, kéttényezős Blaschke-szorzatokból függvénykompozícióval származtathatók. Ilyen rendszerek szerkesztésének elvi és gyakorlati problémáival a [9] és a [49] és [50] dolgozatok foglalkoznak. Racionális ortogonális sorfejtések mellett gyakran célszerű ilyen típusú biortogonális sorfejtéseket használni. A [33] és a [34] dolgozatokban racionális ortogonális és biortogonális rendszereket konstruáltunk a tóruszon és a diszken.

Az EKG-görbét az optimális paraméterekhez tartozó diszkrét MT–Fourier-együtthatókkal reprezentálva jó tömörítést és alakhű approximációt kapunk. Az alábbi ábrán egy valódi EKG-görbe approximációját szemléltetjük, ahol 3 (egy kétszeres és két egyszeres multiplicitású) pólust használtunk és az optimális inverzpólusokat a Nelder–Mead-algoritmus hiperbolikus változatával határoztuk meg.

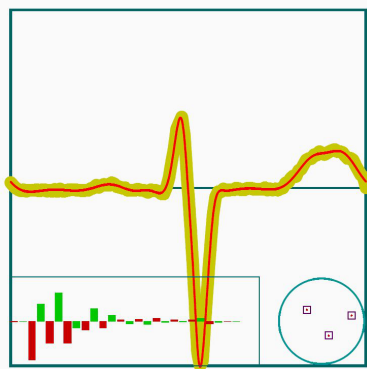
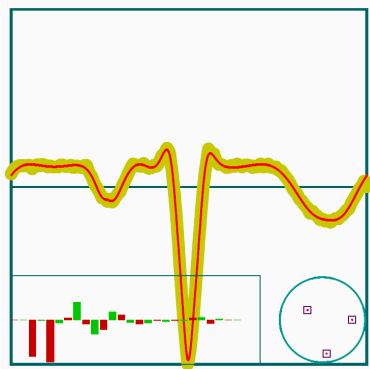
A gyakorlatban az EKG-jelről általában több (6, ill. 12) elvezetést készítenek. A szív működését az ún. szívgörbével, az egyes elvezetéseken regisztrált jeleket a szívgörbének egy-egy irányba eső vetületével modellezhetjük. Ezzel a modellel nemcsak az egyes elvezetések kvalitatív leírásához, hanem jó közelítéseihez is eljuthatunk [31]. Az alábbi ábrán ugyanannak az EKG-jelnek két különböző elvezetésének approximációját szemléltetjük három inverzpólus által generált diszkrét MT rendszert használva. Az ábrán feltüntettük a három inverzpólust és a diszkrét MT–Fourier-együtthatókat.



Az MT-rendszer pólusai



Az EKG-jel approximációja



EKG-jel két elvezetésének közelítése

Hivatkozások

- [1] ALEXITS, G.: *Convergence problems of orthogonal functions*. Pergamon Press, New York, (1961)
- [2] BANACH, S.: *Théorie des opérations linéaires*. Monog. Mat., Warszawa, (1932)
- [3] BENEDETTO, J.J.: *Harmonic Analysis and Applications*. CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo (1997)
- [4] BLASCHKE, W.: *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen*. Math. Phys. Kl. Sächs. Gessel. der Wiss. Leipzig, **67**, 194–200 (1915)
- [5] BOCKAREV, S.V.: *Existence of bases in the space of analytic functions and some properties of the Franklin system*. Mat. Sbornik, **95 (137)**, 3–18 (1974)

- [6] BOKOR J., GIANONE L., SCHIPP F.: *Approximate H^∞ identification using partial sum operators in the disc algebra basis*. Proc. Amer. Control Conf. Seattle, WA, (1995), IEEE Press, 1981–1985
- [7] BOKOR J., SCHIPP F.: *L^∞ system approximation algorithms generated by φ summation*. IFAC AUTOMATICA J. **33** (11), 2019–2024 (1997)
- [8] BOKOR J., SCHIPP F.: *Approximate linear H^∞ identification in Laguerre and Kautz basis*. IFAC AUTOMATICA J. **34**, 463–468 (1998)
- [9] BOKOR J., SCHIPP F.: *Rational bases generated by Blaschke product systems*. 13th IFAC Symposium on System Identification, SYSID-2003, 1351–1356 (CD)
- [10] BOKOR J., SCHIPP F., SOUMELIDIS A.: *Pole structure estimation from Laguerre representation using hyperbolic metric on the unite disc*. 50th IEEE Conf. on Decision and Control an European Control Conf., Orlando, Florida, December 12–15, 2136–2141 (2011)
- [11] BOKOR J., SCHIPP F., SOUMELIDIS A.: *Applying Hyperbolic Wavelets in Frequency Domain Identification*. Int. Conference in Control Automation and Robotics, ICINCO 2012, July 28–30 Rome, Italy, 532–535 (2012)
- [12] BOKOR J., SCHIPP F., SOUMELIDIS A.: *Realizing system poles identification on the unit disc based on Laguerre representations and hyperbolic metric*, 21st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Platinias-Chania, Crete, Greece, June 25–28, 1208–1213 (2013)
- [13] BOKOR J., SCHIPP F., SZABÓ Z.: *Identification of rational approximate models in H^∞ using generalized orthonormal basis*. IEEE Trans. Autom. Control, **44** (1), 153–158 (1999)
- [14] BURKHOLDER D. L.: *Distribution function inequalities for martingales*. Ann. Prob., **1**, 19–42 (1973)
- [15] CIESIELSKI, Z.: *Properties of the orthonormal Franklin system I, II*. Studia Math. **23**, 141–157 (1963), **27**, 289–323 (1966)
- [16] CIESIELSKI, Z., DOMSTA, J.: *Construction of orthonormal basis in $C^n(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$* . Studia Math. **41**, 211–224 (1972)
- [17] CIESIELSKI, Z.: *Haar orthogonal function in analysis and probability*. Coll. Math. Soc. J. Bolyai **49**, 25–56 (1985)
- [18] CIESIELSKI, Z., SIMON, P., SJÖLIN P.: *Equivalence of Haar and Franklin bases in L^p spaces*. Studia Math. **60**, 195–210 (1977)
- [19] COXETER, H.S.M.: *Non-euklidian geometry*. University of Toronto Press, Toronto (1942)
- [20] DAUBECHIES, I.: *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1992)
- [21] DUREN, P. L.: *Theory of H^p spaces*. Academic Press, New York-London (1970)
- [22] DUREN, P., SCHUSTER, A.: *Bergman Spaces*. AMS, Mathematical Surveys and Monographs, **100** (2003)
- [23] EISNER T., PAP M.: *Discrete Orthogonality of the Malmquist-Takenaka System of the Upper Half Plane and Rational Interpolation*. J. Fourier Anal. Appl. **20** (1) (2014), 1–16.

- [24] FAZEKAS Z., SOUMELIDIS A., BÓDIS-SZOMORÚ A., SCHIPP F.: *Specular surface reconstruction for multi-camera corneal topographer arrangements*. 30th Annual International IEEE EMBS Conference, Vancouver, Canada, Aug. 20–24, 2254–2257 (2008)
- [25] FAZEKAS Z., PAP M., SOUMELIDIS A., SCHIPP F.: *Discrete orthogonality of Zernike functions and its application to corneal measurements*. Electronic engineering and computing technology. Lecture notes in electrical engineering 60, Springer, Dordrecht, 455–469 (2010)
- [26] FAZEKAS Z., PAP M., SOUMELIDIS A., SCHIPP F.: *Generic Zernike-based Surface Representation of Measured Corneal Surface Data*. Proc. IEEE International Symposium on Medical Measurements and Applications, MeMeA, Bari, Italy, 148–153 (2011)
- [27] FEICHTINGER, H., GRÖCHENIG, A.: *A unified approach to atomic decomposition through integrable group representation*. Lecture Notes in Math., Springer **1302**, 52–73 (1988)
- [28] FEICHTINGER, H., GRÖCHENIG, A.: *Banach spaces related to integrable group representation and their atomic decomposition I*. J. Funct. Anal. **86**(2), 307–340 (1989)
- [29] FEICHTINGER H.G., PAP M.: *Hyperbolic wavelets and multiresolution in the Hardy space of the upper half plane*. Blaschke Products and Their Applications, Fields Institute, Communications **65**, 193–208 (2013)
- [30] FEICHTINGER H.G., PAP M.: *Coorbit theory and Bergman spaces*. HCCA, Springer, (2014), 231–259.
- [31] FRIDLI S., LÓCSI L., SCHIPP F.: *Rational Function Systems in ECG Processing*. Computer Aided System Theory-EUROCAST 2011, 13th International Conference Las Palmas de Gran Canaria, Spain, February 2011, Revised Selected Papers, Part I, Springer LNCS 6927, 88–95.
- [32] FRIDLI S., KOVÁCS P., LÓCSI L., SCHIPP F.: *Rational modeling of multi-lead QRS complexes in ECG signals*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **37**, 145–155 (2012)
- [33] FRIDLI S., SCHIPP F.: *Biorthogonal systems to rational functions*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **35**, 95–105 (2011)
- [34] FRIDLI S., GILIÁN Z., SCHIPP F.: *Rational orthogonal system on the plane*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **39**, 63–77 (2013)
- [35] GARNETT, J. B.: *Bounded analytic functions*. Springer, New York (2007)
- [36] GROSSMAN, A., MORLET, A., PAUL, T.: *Transforms associated to square group representations I. General results*. J. Math. Phys. **26**, 2473–2479 (1985)
- [37] HAAR, A.: *Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme*. Inaugural-Dissertation (Göttingen, 1909), 1–49, Math. Annal. **69**, 331–271 (1910)
- [38] HARMUTH H.F.: *Transmission of information by orthogonal functions*. Springer-Verlag, Berlin (1972)
- [39] HARMUTH H.F.: *Sequence theory*. Academic Press, New York, N.Y. (1977)
- [40] HARDY, G.H.: *On the mean value of the modulus of an analytic function*. Proc. London. Math. Soc. **14**, 269–277 (1915)
- [41] HEDENMALM, H., KORENBLUM, B., KEHE ZHU: *Theory of Bergman Spaces*. Springer, Graduate Text in Math. **199** (2000)

- [42] HEIL, C. E., WALNUT, D. L.: *Continuous and discrete wavelet transforms*. SIAM Review **31**(4), 628–666 (1989)
- [43] HEUBERGER, S.C., VAN DEN HOF, P.M.J., WAHLBERG, B.: *Modelling and Identification Rational Orthogonal Basis Functions*. Springer, London Limited (2005)
- [44] KOVÁCS, P., LÓCSI, L.: *RAIT: the Rational Approximation and Interpolation Toolbox for Matlab, with Experiments on ECG Signals*. The International Journal of Advances in Telecommunications, Electrotechnics, Signals and Systems, 1/2-3, 67–75 (2012)
- [45] KOVÁCS, P., KIRANYAZ, S., GABBOUJ, M.: *Hyperbolic Particle Swarm Optimization with Application in Rational Identification*. Proceedings of the 21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO), (2013) 1–5.
- [46] KOVÁCS, P., SAMMIEE, K., GABBOUJ, M.: *On Application of Rational Discrete Short Time Fourier Transform in Epileptic Seizure Classification*. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal processing, (2014) 5839–5843.
- [47] KOVÁCS, P., VAD, V.: *Fast Computing of Non-Uniform Sampling Positions of Real Signals*. Proceedings of the 15th International Symposium on Symbolic and Numerical Algorithms for Scientific Computing (SYNACS) 146–150, 2013.
- [48] LÓCSI, L.: *Constructing Orthogonal Systems Using Blaschke Products*. MACS 2010, Proc. 8th Joint Conf. on Math. and Comp. Sci., Math., 43–50 (2011)
- [49] LÓCSI, L.: *An Inverse Problem with Compositions of Blaschke Products*. Mathematica Pannonica, 24/1 (2013), 141–156.
- [50] LÓCSI, L.: *Rational FFT Implementation in Matlab*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **36** (2012), 241–254.
- [51] LÓCSI, L.: *Calculating non-equidistant discretizations generated by Blaschke products*. Acta Cybernetica **20** (2011), 111–123.
- [52] MALMQUIST, F.: *Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points*. Comptes Rendus du Sixieme Congres des mathématiciens scandinaves, Copenhagen, Denmark, 253–259 (1925)
- [53] MEYER, Y.: *Ondelettes et opérations I and II*. Hermann, Paris (1990)
- [54] MEYER, Y.: *Wavelets, algorithms and applications*. SIAM (1993)
- [55] MÓRICZ, F.: *Harmonikus analízis a komplex egységkörlapon*. POLYGON, Szeged (2013)
- [56] PAP, M.: *The voice transform generated by a representation of the Blaschke group on the weighted Bergman spaces*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **33**, 321–342 (2010)
- [57] PAP, M.: *Properties of the voice transform of the Blaschke group and connection with atomic decomposition results in the weighted Bergman spaces*. J. Math. Anal. Appl. **389**, 340–350 (2012)
- [58] PAP M.: *Hyperbolic wavelets and Multiresolution in $H^2(\mathbb{T})$* . J. Fourier Anal. Appl. **17**, 755–776 (2011)
- [59] PAP M.: *Multiresolution in Bergman space*. Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. **30**, 333–353 (2013)

- [60] PAP M., SCHIPP F.: *Malmquist-Takenaka systems and equilibrium conditions*. *Mathematica Pannonica* **12**, 185–194 (2001)
- [61] PAP M., SCHIPP F.: *Malmquist-Takenaka systems over the set of quaternions*. *Pure Mathematics and Applications* **15**, 261–272 (2004)
- [62] PAP M., SCHIPP F.: *Discrete orthogonality of Zernike functions*. *Mathematica Pannonica* **16**, 137–144 (2005)
- [63] PAP M., SCHIPP F.: *The voice transform on the Blaschke group I*. *Pure Mathematics and Applications* **17** (3–4), 387–395 (2006)
- [64] PAP M., SCHIPP F.: *The voice transform on the Blaschke group II*. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.* **29**, 157–173.
- [65] PAP M., SCHIPP F.: *The voice transform on the Blaschke group III*. *Publ. Math. Debrecen* **75** (1–2), 263–283 (2009)
- [66] PRESTINI E.: *The Evolution of Applied Harmonic Analysis*. *Applied and Numerical Harmonic Analysis*, Birkhäuser (2003)
- [67] RIESZ, F.: *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*. *Math. Z.* **18**, 87–95 (1923)
- [68] SARASON, D.: *Holomorphic Spaces: A Brief and Selective Survey*. *MSRI Publications* **33**, 1–34 (1998)
- [69] SCHIPP, F.: *Walsh functions, commentary*. *Joseph L. Walsh selected papers*, eds. T.J. Rivlin and E.B. Saff, Springer-Verlag, 129–135 (2000)
- [70] SCHIPP F.: *Wavelets on the disc*. *Proc. Workshop on Systems and control theory. In honor of J. Bokor on his 60th birthday, September 9, 2008, BME AVVC, MTA SZTAKI*, 101–109 (2009)
- [71] SCHIPP F., SOUMELIDIS A.: *On the Fourier coefficients with respect to the discrete Laguerre system*. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* **34**, 223–233 (2011).
- [72] SCHIPP F., SOUMELIDIS A.: *Eigenvalues of matrices and discrete Laguerre-Fourier coefficients*. *Mathematica Pannonica* **23/1**, 147–157 (2012)
- [73] SCHIPP F., SZILI L.: *Approximation in H^∞ -norm*. *AFS95 Bolyai Soc. Math. Studies, Budapest*, **5**, 13–30 (1996)
- [74] SCHIPP, F., WADE, W.R., SIMON, P., PÁL, J.: *Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis*. *Akadémiai Kiadó, Budapest Akadémiai Kiadó, Budapest and Adam Hilger, Bristol and New York* (1990)
- [75] SZABADOS, J., TANDORI, K. (EDS.): *A. Haar Memorial Conference*. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **49**, North-Holland (1987)
- [76] SZEGŐ, G.: *Beiträge zur Theory der Toeplitzschen Formen I, II*. *Math. Z.* **6**, 167–202 (1920), **9**, 167–190 (1921)
- [77] SZEGŐ, G.: *Orthogonal Polynomials*. *AMS Colloquium Publications*, **23** (1975)
- [78] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: *Valós függvénytan és függvénysorok*. *POLYGON, Szeged* (2002)

- [79] SZŐKEFALVI-NAGY, B., FOIAS, C.: *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. North-Holland, Amsterdam, Akadémiai Kiadó, Budapest (1970)
- [80] STANKOVIC R.S., ASTOLA J.R. (EDS.): *Reminiscences of the Early Work in Walsh Functions*. Special issues of TICSP Series, Tampere, Finland (2011)
- [81] TAKENAKA, S.: *On the orthogonal functions and a new formula of interpolation*. Japanese Journal of Mathematics, II, 129–145 (1925)
- [82] ULJANOV, P.L.: *Haar series and related questions*. Coll. Math. Soc. J. Bolyai **49**, 57–96 (1985)
- [83] WAWRZYNCZYK, A.: *Group Representations and Special Functions*. Reidel, PWN (1983)
- [84] WEISZ F.: *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier-analysis*. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin **1568**, (1994)
- [85] WEISZ F.: *Summability of Multi-Dimensional Fourier Series and Hardy Spaces*. Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, **541** (2002)
- [86] ZYGMUND, A.: *Trigonometric series I., II*. Cambridge University Press (1959)

(Beérkezett: 2014. május 7.)

SCHIPP FERENC

Numerikus Analízis Tanszék, ELTE IK

Pázmány P. sétány I/C, Budapest, H-1117 Hungary

HYPERBOLIC WAVELETS

FERENC SCHIPP

In the last two decades a number of different types of wavelets transforms have been introduced in various areas of mathematics, natural sciences and technology. These transforms can be generated in a uniform way based on various group representations. Taking the congruences of the hyperbolic geometry we introduced the concept of hyperbolic wavelet transforms (HWT) by means of this method. In this paper we give an overview on some results and applications concerning HWT. We call the attention to previous results of Hungarian mathematicians in the areas of control theory and signal processing that can now be viewed from a new perspective. Recently, as a result of the collaboration of the Department of Numerical Analysis of Faculty of Informatics of Eötvös L. University (Budapest, Hungary) and the Systems and Control Lab of the Institute of Computer Science and Control of the Hungarian Academy of Sciences, rational function systems and hyperbolic wavelets have been effectively applied in solving problems related to system and control theories, signal processing, and in construction of a mathematical model for ECG signals.