*Alkalmazott Matematikai Lapok* **33** (2016), 57–74

# A REZGŐ HÚR IRÁNYÍTÁSA

HORVÁTH MIKLÓS

Két belső pontban erőhatásnak alávetett, a végpontokban rögzített, kezdetben nyugalmi állapotban lévő húr lehetséges mozgásállapotait vizsgáljuk. Ismert, hogy a véges idő alatt elérhető összes mozgásállapot előáll (elegendően nagy) rögzített idő alatt is. Jelen dolgozatban megkeressük a minimális időt, amely alatt a húr az összes lehetséges mozgásállapotba átvihető. Megmutatjuk, hogy a kérdés egyszerű szerkezetű, soronként legfeljebb 4 nemnulla elemet tartalmazó mátrixok rangjának vizsgálatára vezethető vissza. A dolgozat 3. részében megfogalmazott nyitott kérdés vizsgálatához a középiskolai ismeretanyag is elegendő.

## 1. Bevezetés

Tekintsük a következő egyenletet:

$$y_{tt}(x,t) = y_{xx}(x,t) + \delta(x-a_1)u_1(t) + \delta(x-a_2)u_2(t), \qquad (1)$$
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T.$$

Itt $y(x,t)$ jelöli a $[0,1]$ szakaszon kifeszített húr $x$ pontjának a nyugalmi állapotból (azaz $y=0$-ból) való transzverzális kitérését a $t$ időpontban. A $0 < a_1 < a_2 < 1$ belső pontokban irányítjuk a húrt a négyzetesen integrálható valós $u_1(t)$, $u_2(t) \in L_2(0,T)$ függvényekkel. A húr két végpontja rögzített, tehát

$$y(0,t) = y(1,t) = 0. \qquad (2)$$

A megfigyelés kezdeti $t=0$ pillanatában a húr nyugalomban van, azaz minden pontjának pozíciója és sebessége is nulla:

$$y(x,0) = y_t(x,0) = 0. \qquad (3)$$

A $T>0$ idő alatt elérhető mozgásállapotok halmaza

$$R(T) = \{(y(.,T), y_t(.,T)) | u_1,\, u_2 \in L_2(0,T)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $R(T)$ halmaz $T$ függvényében monoton nő, hiszen ha $t = 0$-tól egy adott értékig az $u_1$, $u_2$ irányí tás nulla, akkor a húr nyugalomban marad, és ezután (időeltolódással) bármely kisebb $T$-hez tartozó mozgásállapot elérhető. Joó István [6] dolgozatában többek között igazolta, hogy ha $a_1$ és $a_2$ racionális, azaz

$$a_1 = \frac{p_1}{q}, \ \ a_2 = \frac{p_2}{q}, \quad (p_1, p_2, q) = 1,$$

tehát $p_1$, $p_2$ és $q$ legnagyobb közös osztója 1, akkor $2(q-1)/q \leq T_1 < T_2$ esetén $R(T_1) = R(T_2)$. Jelen dolgozat célja a legkisebb olyan $T_0$ megadása, amelyre $T_0 \leq T_1 < T_2$ esetén $R(T_1) = R(T_2)$. Ezt a minimális elérési időt jellemezzük lineáris algebrai eszközökkel.

A kérdéssel kapcsolatos korábbi kutatások között először említsük meg a Joó [5] dolgozatot, melynek egyik eredménye szerint ha csak egy belső pontban irányítjuk a húrt, akkor a minimális elérési idő $T_0 = 2$ irracionális pont esetén, és $T_0 = 2(q-1)/q$, ha $p/q$-ban irányítunk, ahol $(p, q) = 1$. Castro [2] egyetlen mozgó pontban vizsgálta a húr irányítását. Több szerző vizsgálta a végpont(ok)ban irányított húr mozgásállapotait. Hansen és Zuazua [3] két darabból összetett húrt vizsgált, ahol az illesztési pont nyugalmi helyzetből való kitérése az irányítás. Il'in és Moiseev [4] az egyik végpontban a kitérési sebességgel irányított húrt vizsgálták, és megkeresték a minimális normájú kontrollt. Végül megemlítjük Avdonin és Edward [1] dolgozatát, ahol véges sok belső pontban a húrhoz tömegpontokat ragasztunk, és az egyik végpont kitérése az irányítás. Többek között megmutatják, hogy elég hosszú idő alatt minden, megfelelő függvénytérbe tartozó mozgásállapot elérhető.

A dolgozat felépítése a következő. A fenti, részben heurisztikus problémafelvetés pontos megfogalmazását és ekvivalens átalakításait adjuk meg a 2. részben. Ez nagyrészt a [6] cikkben is megtalálható anyag, melyet a könnyebb olvashatóság érdekében itt is áttekintünk. A 3. rész tartalmazza az új eredményeket, azaz $T_0$ jellemzését lineáris algebrai eszközökkel, továbbá diszkutáljuk a $T_0$-ra adható explicit képleteket, megfogalmazva nyitott kérdéseket is.

## 2. A feladat pontos megfogalmazása és ekvivalens átalakításai

Az (1) másodrendű differenciálegyenlet Dirac-deltákat is tartalmaz, tehát közönséges értelemben $y$ legfeljebb elsőrendű differenciálhatóságát várjuk. Legyen $z(x,t)$ egy tetszőleges függvény a

$$\begin{aligned} z(x,t) \in C^2([0,1] \times [0,T]), \quad & z(x,T) = z_t(x,T) = 0, \\ & z(0,t) = z(1,t) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

tulajdonságokkal. Szorozzuk be az (1) egyenletet $z$-vel, és integráljunk $0 \leq x \leq 1$-ben és $0 \leq t \leq T$-ben is. Formálisan kétszeres parciális integrálást alkalmazva az egyik, illetve másik változóban a kilépő tagok eltűnnek az $y$-ra és $z$-re kirótt kezdeti- és peremfeltételek miatt, ezért a következő egyenlet adódik:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^T y(x,t)[z_{tt}(x,t) - z_{xx}(x,t)]\,dt\,dx \\ = \int_0^T [z(a_1,t)u_1(t) + z(a_2,t)u_2(t)]\,dt.\end{aligned} \tag{5}$$

Mivel ez az egyenlet nem igényli $y$ simaságát, és implicit módon tartalmazza az $y$-ra kirótt kezdeti- és peremfeltételeket is, kézenfekvő az alábbi értelmezés:

*2.1. Definíció. Az (1), (2), (3) rendszer megoldásán olyan* $y \in L_2([0,1]\times\times[0,T])$ *függvényt értünk, mely tetszőleges, a (4) kikötéseket kielégítő* $z(x,t)$ *függvény esetén eleget tesz az (5) egyenletnek.*

A változók szétválasztásának ismert módszerét alkalmazzuk: a

$$z(x,t) = \sin(n\pi x)\cdot b(t), \quad b \in C^2([0,T]),\ b(T) = b'(T) = 0$$

függvényt helyettesítjük (5)-be. A következő állítás adódik:

2.1. Tétel. *(Joó [6]) Az (1), (2), (3) rendszernek létezik pontosan egy, a 2.1. Definíció szerinti* $y \in L_2([0,1]\times[0,T])$ *megoldása. A megoldás szinuszos sorfejtése az* $x$ *változóban*

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(n\pi x), \tag{6}$$

*ahol az együtthatók*

$$\begin{aligned}c_n(t) &= \int_0^t \frac{\sin(n\pi(t-\tau))}{n\pi} g_n(\tau)\,d\tau, \\ g_n(t) &= 2[\sin(n\pi a_1)u_1(t) + \sin(n\pi a_2)u_2(t)].\end{aligned} \tag{7}$$

*A sor bármelyik változóban egyszer tagonként differenciálható:*

$$\begin{aligned}y_t(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)\sin(n\pi x), \\ y_x(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n(t)\cos(n\pi x).\end{aligned}$$

*Mindhárom sorfejtés konvergens* $L_2([0,1]\times[0,T])$*-ben és bármely rögzített* $t$ *esetén* $L_2([0,1]$*-ben is. Végül az* $y(x,t)$ *megoldás benne van a* $H^1([0,1]\times[0,T])$ *Szoboljev-térben.*

A tétel bizonyítása megtalálható [6]-ban, azt nem ismételjük itt meg, de néhány megjegyzést teszünk. A (7) képletet deriválva kapjuk, hogy

$$c_n'(t) = \int_0^t \cos(n\pi(t-\tau))g_n(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Innen először is látszik, hogy $c_n(0) = c_n'(0) = 0$, ahonnan (3) következik. A (8) képlet azt is mutatja, hogy $c_n'$ is abszolút folytonos, a második derivált $L_2$-ben van, és $c_n'' = n^2\pi^2 c_n + g_n$ teljesül majdnem minden $t \in [0,1]$-re. Ez az egyenlet (formálisan) az (1) képlettel ekvivalens. Ugyancsak a (7) formula szerint

$$|c_n(t)| \le \frac{2}{n\pi}\left[\left|\int_0^t \sin(n\pi\tau)u_1(t-\tau)\,d\tau\right| + \left|\int_0^t \sin(n\pi\tau)u_2(t-\tau)\,d\tau\right|\right],$$

ahonnan a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség alkalmazásával látható, hogy $\sum_n |c_n|$ egyenletesen korlátos $t$-ben, és emiatt a (6) sor abszolút és egyenletesen konvergens $[0,1]\times[0,T]$-n. Ebből pedig következik, hogy $y$ egy folytonos függvény, amely nulla a húr végpontjaiban.

A sorfejtések miatt az $R(T)$ halmazok növekedése helyett vizsgálhatjuk az összes lehetséges $c_n, c_n'$ együttható-sorozatok halmazának növekedését is. Ez az ötlet a következő állításhoz vezet:

2.1. Lemma. *([6]) Legyen*

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix}\sin(n\pi a_1)\\ \sin(n\pi a_2)\end{pmatrix} e^{\pm i n\pi t} : n \ge 1 \right\},$$

*és jelölje $B(T)$ a $\Lambda$ halmaz momentumterét a két komponensű komplex $L_2$ térben, azaz*

$$B(T) = \left\{ \left\langle \begin{pmatrix}\sin(n\pi a_1)\\ \sin(n\pi a_2)\end{pmatrix} e^{\pm i n\pi t}, \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \right\rangle_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \in L_2(0,T;\mathbb{C}^2) \right\}.$$

*A $B(T)$ momentumtér növekszik $T$-ben, és $B(T_1) = B(T_2)$ pontosan akkor, ha $R(T_1) = R(T_2)$.*

*Bizonyítás.* Először is vegyük észre, hogy

$$c_n'(T) \pm i n\pi c_n(T) = \int_0^T e^{\pm i n\pi t} g_n(t)\,dt,$$
$$g_n(t) = 2[\sin(n\pi a_1)u_1(t) + \sin(n\pi a_2)u_2(t)].$$

Két valós sorozat, $c_n$ és $c_n'$ helyett egyetlen komplex sorozatból, $c_n'(T) + i n\pi c_n(T)$-ből is rekonstruálhatók az $y(.,T)$, $y_t(.,T)$ függvények. A fenti képlet szerint ilyenkor csak $n \ge 1$ jelenik meg az exponenciális függvény kitevőjében. Ha erről áttérünk a komplex $L_2$ tér momentumterére, akkor minden nemnulla index megjelenik a kitevőben. A

$$\begin{aligned}
&(c_n'(T) + in\pi c_n(T)) + \overline{(c_n'(T) - in\pi c_n(T))} \\
&\qquad = 4\int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{pmatrix} e^{in\pi t}, \begin{pmatrix} \Re v_1 \\ \Re v_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt, \\
&(c_n'(T) + in\pi c_n(T)) - \overline{(c_n'(T) - in\pi c_n(T))} \\
&\qquad = 4i\int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{pmatrix} e^{in\pi t}, \begin{pmatrix} \Im v_1 \\ \Im v_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt
\end{aligned}$$

képletek azt mutatják, hogy a komplex $L_2$ és a valós $L_2$ fenti momentumterei egymásból rekonstruálhatók, és az egyik pontosan akkor bővül, amikor a másik. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Érdemes itt megjegyezni, hogy mivel a $2^{-1/2}e^{in\pi t}$ függvények ortonormált bázist alkotnak $L_2(0,2;\mathbb{C})$-ben, ezért $T \geq 2$-re a $B(T)$ momentumtér az $n \neq kq$ koordinátákon vett teljes komplex $\ell_2$ tér lesz. Emiatt a minimális elérési idő az a legkisebb $T_0 \leq 2$ érték lesz, amely fölött $B(T)$ az $n \neq kq$ koordinátákon vett teljes komplex $\ell_2$ teret kiadja.

## 3. A minimális elérési idő jellemzése

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi fogalomra.

*3.1. Definíció.* Azt mondjuk, hogy a $H$ Hilbert-térben a $H_1, \dots, H_N$ alterek erősen függetlenek, ha van olyan $0 < c$ konstans, hogy bármely $h_i \in H_i$ vektorokra

$$\|h_1 + \dots + h_N\| \geq c\,(\|h_1\| + \dots + \|h_N\|)\,. \tag{9}$$

Ez valóban erősebb a lineáris függetlenségnél, mert (9) miatt $h_1 + \dots + h_N = 0$-ból $h_1 = \dots = h_N = 0$ következik. Heurisztikusan a fogalom azt jelenti, hogy bármelyik altér pozitív szöget zár be a többi altér összegével, vagyis nincsenek bennük „majdnem párhuzamos" vektorok. Nyilván feltehető (és a nemtriviális esetekben szükségszerű), hogy $c < 1$. Az is világos, hogy ha $H_1, \dots, H_N$ erősen független, akkor $H_1$ és $H_2 + \dots + H_N$ is erősen független, hiszen

$$\|h_1 + (h_2 + \dots + h_N)\| \geq c\,(\|h_1\| + \dots + \|h_N\|) \geq c\,(\|h_1\| + (\|h_2 + \dots + h_N\|))\,.$$

3.1. Lemma. *Ha $H_1$ és $H_2$ erősen független zárt alterek $H$-ban, akkor*

*a)*

$$\|p_2^\perp h_1\| \geq c\|h_1\| \quad \forall h_1 \in H_1, \qquad \|p_1^\perp h_2\| \geq c\|h_2\| \quad \forall h_2 \in H_2$$

*ahol $p_i^\perp$ a $H_i$ ortokomplementer alterére, $H_i^\perp$-re való merőleges vetítés, és $c$ az erős függetlenség definíciójában szereplő konstans.*

*b)* *Van olyan* $0 < \delta < 1$ *szám, mégpedig* $\delta = \sqrt{1-c^2}$, *hogy*

$$\|p_2 h_1\| \le \delta \|h_1\| \quad \forall h_1 \in H_1, \qquad \|p_1 h_2\| \le \delta \|h_2\| \quad \forall h_2 \in H_2,$$

*ahol* $p_i$ *a* $H_i$*-re való merőleges vetítés.*

*c)* *Ha* $H_1$ *és* $H_2$ *erősen független, nem feltétlenül zárt alterek* $H$*-ban, akkor* $H_1^\perp + H_2^\perp = H$.

*Bizonyítás.* a)-t és b)-t elég csak az egyik szereposztásban igazolni. $p_2^\perp h_1 = h_1 - p_2 h_1$ miatt $\|p_2^\perp h_1\| \ge c(\|h_1\| + \|p_2 h_1\|) \ge c\|h_1\|$ bizonyítja a)-t. Mivel $\|h_1\|^2 = \|p_2 h_1\|^2 + \|p_2^\perp h_1\|^2 \ge \|p_2 h_1\|^2 + c^2\|h_1\|^2$, ezért $\|p_2 h_1\|^2 \le (1-c^2)\|h_1\|^2$, ami bizonyítja b)-t. A c)-ben feltehető, hogy a $H_1$, $H_2$ alterek zártak, mert $\overline{H_i}^\perp = H_i^\perp$, és a definícióból láthatóan a $\overline{H_1}$, $\overline{H_2}$ alterek is erősen függetlenek. Legyen $h \in H$ tetszőleges vektor. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$\begin{aligned} h = p_1(p_2p_1)^n h &+ p_1^\perp \left(h + p_2p_1 h + \dots + (p_2p_1)^n h\right) \\ &+ p_2^\perp \left(p_1 h + \dots + p_1(p_2p_1)^{n-1} h\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Valóban, $n=0$-ra $h = p_1 h + p_1^\perp h$, másrészt

$$\begin{aligned} p_1(p_2p_1)^n h &= (p_2p_1)^{n+1} h + p_2^\perp p_1 (p_2p_1)^n h \\ &= p_1(p_2p_1)^{n+1} h + p_1^\perp (p_2p_1)^{n+1} h + p_2^\perp p_1(p_2p_1)^n h. \end{aligned}$$

A b)-beli becslések miatt (10) jobboldalán az első összeadandó normában 0-hoz tart, a másik két összeadandóban pedig a véges összegek normában konvergálnak, ezért limeszben kapjuk a

$$h = p_1^\perp h^* + p_2^\perp h^{**}, \quad h^* = \sum_{n=0}^\infty (p_2p_1)^n h, \ h^{**} = p_1 \sum_{n=0}^\infty (p_2p_1)^n h$$

előállítást, amely bizonyítja c)-t is. □

A momentumterek vizsgálatához szükségünk lesz a következő állításra:

3.2. Lemma. *Legyen* $W_i$, $i = 1, \dots, N$ *véges sok erősen független zárt altér a* $H$ *Hilbert-térben és legyen* $p_i$ *a* $W_i$*-re való merőleges vetítés. Akkor tetszőleges* $h_i \in W_i$ *vektorokhoz megadható olyan* $h \in H$ *vektor, hogy* $p_i h = h_i$, $i = 1, \dots, N$.

*Bizonyítás.* Mivel $W_i$ és $\mathrm{Lin}(W_j,\, j \ne i)$ erősen függetlenek, az előző lemma c) pontja szerint minden $i$-re

$$H = W_i^\perp + (\mathrm{Lin}(W_j,\, j \ne i))^\perp = W_i^\perp + \cap_{j \ne i} W_j^\perp.$$

Ennek megfelelően minden $h_i$-nek létezik egy $h_i = h_i^* + h_i^{**}$, $h_i^* \in W_i^\perp$, $h_i^{**} \in \cap_{j\ne i} W_j^\perp$ felbontása. Nyilván $p_i h_i^* = 0$ és $p_i h_j^{**} = 0$, ha $i \ne j$. Ezért $h_i = p_i h_i = p_i h_i^{**}$, és akkor $h = \sum_j h_j^{**}$ választással $p_i h = p_i h_i^{**} = h_i$. □

Látható, hogy a $\Lambda$ rendszerben a $(\sin(n\pi a_1), \sin(n\pi a_2))^T$ vektorok párhuzamosak, ha $n = \pm(2kq + j)$ vagy $n = \pm(2kq + 2q - j)$ alakú egy rögzített $1 \le j \le q - 1$ mellett. Jelöljük $V_j$-vel a

$$\Lambda_j = \left\{ e^{i(2kq\pm j)\pi t} | k \in \mathbb{Z} \right\}$$

rendszer által kifeszített zárt alteret az $L_2(0, T; \mathbb{C})$ térben. Végül legyen

$$W_j = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} V_j.$$

3.3. LEMMA. *A $\Lambda_j$ rendszer momentumtere az $L_2(0, T; \mathbb{C})$ térben a komplex $\ell_2$ tér, ha $T \ge 2/q$, és $\ell_2$ valódi részhalmaza, ha $T < 2/q$.*

*Bizonyítás.* Bár a hasonló állításokat a Riesz-bázisok elméletének felhasználásával szokás bizonyítani, mi inkább egy elemi indoklást mutatunk. Legyen $f \in L_2(0, 2/q; \mathbb{C})$, és legyen $f_0 = f|_{(0,1/q)}$, $f_1(t) = f(t + 1/q)$. Akkor az $f$ momentumait megadó integrál

$$\int_0^{2/q} e^{i(2kq\pm j)\pi t} f(t)\, dt = \int_0^{1/q} e^{i2kq\pi t} g_\pm(t)\, dt,$$
$$g_\pm(t) = e^{\pm ij\pi t}[f_0(t) + e^{\pm ij\pi/q} f_1(t)].$$

Az $e^{i2kq\pi t}$ rendszer konstans normájú ortogonális bázis $L_2(0, 1/q; \mathbb{C})$-ben, ezért pontosan akkor kapjuk a teljes $\ell_2$ momentumteret, ha $g_+$ és $g_-$ két tetszőleges eleme lehet $L_2(0, 1/q; \mathbb{C})$-nek. A $g_\pm$ függvényeket az $f_0$, $f_1$ függvényekből kapjuk a

$$g_+ e^{-ij\pi t} = f_0 + e^{ij\pi/q} f_1,$$
$$g_- e^{ij\pi t} = f_0 + e^{-ij\pi/q} f_1$$

lineáris egyenletrendszerrel. Mivel $T = 2/q$ esetén $(f_0, f_1)$ tetszőleges $L_2$-beli pár lehet, és az egyenletrendszer megoldása bármely $L_2$-beli $(g_+, g_-)$ pár esetén egy $L_2$-beli $(f_0, f_1)$ pár, ezért ilyenkor a momentumtér a teljes $\ell_2$. Emiatt nyilván maximális a momentumtér $T > 2/q$-ra is. Ha viszont $T < 2/q$, akkor $f_1$ már nem választható tetszőlegesen, és emiatt a momentumtér is kisebb lesz. □

A $\Lambda_j$ által kifeszített $V_j$ altérbeli függvények egyszerűen jellemezhetők:

3.4. LEMMA. *Legyen $T > 2/q$. Akkor*

$$V_j = \{f \in L_2(0, T; \mathbb{C})| \quad f(t + 2/q) = 2\cos(\pi j/q) f(t + 1/q) - f(t) \text{ m.m. } t\text{-re}\}. \tag{11}$$

*Ha pedig $f \in V_j$ és $k \ge 2$, akkor m.m. $t \in (0, 1/q)$-ra*

$$f(t + k/q) = \frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t + 1/q) - \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t). \tag{12}$$

*Bizonyítás.* Mivel az $e^{i2k\pi qt}$ függvények által kifeszített tér az összes $1/q$-periodikus $L_2$-beli függvényből áll, ezért nyilván

$$V_j = \{e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2 |\, g_1,\, g_2 \ 1/q\text{-periodikus } L_2\text{-beli függvény.}\}$$

Ilyen alakban minden $L_2(0, 2/q; \mathbb{C})$-beli függvény előáll: az előző bizonyítás jelölésével $f_0 = e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2$, $f_1 = e^{ij\pi/q} \cdot e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi/q} \cdot e^{-ij\pi t} g_2$ befut minden $L_2$-beli $(f_0, f_1)$ párt. A

$$\left(z - e^{ij\pi/q}\right)\left(z - e^{-ij\pi/q}\right) = z^2 - 2\cos(j\pi/q)z + 1$$

azonosságból következik, hogy (11) teljesül minden $e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2$ alakú függvényre. Ez egyúttal bizonyítja (12)-t is $k = 2$-re. Nagyobb $k$ esetén teljes indukciót alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
f(t + (k+1)/q) &= 2\cos(j\pi/q) f(t + k/q) - f(t + (k-1)/q) \\
&= 2\cos(j\pi/q) \left[\frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 - \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0\right] \\
&- \left[\frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 - \frac{\sin(j(k-2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0\right] \\
&= \frac{\sin(j(k+1)\pi/q) + \sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 \\
&- \frac{\sin(jk\pi/q) + \sin(j(k-2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \\
&- \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 + \frac{\sin(j(k-2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \\
&= \frac{\sin(j(k+1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t + 1/q) - \frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t).
\end{aligned}$$

□

3.5. Lemma. *Ha a $W_j$ alterek lineárisan függetlenek valamilyen $T$-re $H = L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$-ben, akkor erősen függetlenek is.*

*Bizonyítás.* A lineáris függetlenség azt jelenti, hogy ha valamilyen $f_j \in V_j$-vel

$$\sum_{j=1}^{q-1} F_j(t) = 0 \quad \text{m.m. } t \in (0, T)\text{-re}, \quad F_j(t) = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} f_j(t), \tag{13}$$

akkor $f_j = 0$ m.m., $j = 1, \ldots, q-1$. Az előző lemma szerint az $f_j$-k kifejezhetők az $f_{j,0} = f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t) = f_j(t + 1/q)$, $0 < t < 1/q$ függvényekkel, ezért (13) minden $t \in (r/q, (r+1)/q)$ esetén egy egyenletpárt ad. Ha $k/q < T \le (k+1)/q$ és $f = (f_{j,0}, f_{j,1})_{j=1}^{q-1}$, akkor a (13) egyenletrendszer $(0, T-k/q)$-n a $Cf = 0$, $(T-k/q, 1/q)$-n a $C^*f = 0$ alakban írható, ahol a $C$ és $C^*$ mátrixok $t$-től függetlenek (és $C$ a $C^*$ két sorral való bővítése). A $W_j$-k függetlensége miatt $Cf = 0$-nak és $C^*f = 0$-nak is csak $f = 0$ a megoldása, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|Cf|^2 \ge \delta \sum_{j=1}^{q-1} (|f_{j,0}|^2 + |f_{j,1}|^2), \quad |C^*f|^2 \ge \delta \sum_{j=1}^{q-1} (|f_{j,0}|^2 + |f_{j,1}|^2).$$

Az első becslést integrálva $(0, T-k/q)$-n, a másodikat $(T-k/q, 1/q)$-n, majd összeadva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\sum F_j\|^2_{L_2(0,T;\mathbb{C}^2)} &\ge \delta \sum \|f_j\|^2_{L_2(0,2/q)} \ge c_1 \sum \|f_j\|^2_{L_2(0,T)} \\ &\ge c_2 \sum \|F_j\|^2_{L_2(0,T)} \ge \frac{c_2}{q-1} \Big(\sum \|F_j\|_{L_2(0,T)}\Big)^2, \end{aligned}$$

ezért az erős függetlenséget igazoltuk $c = \sqrt{c_2/(q-1)}$ konstanssal. □

A minimális elérési időre a következő jellemzést adhatjuk:

3.6. Lemma. *$T_0$ az a legkisebb érték, amelyre a*

$$W_j = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} V_j, \quad j = 1, \dots q-1 \tag{14}$$

*alterek lineárisan független rendszert alkotnak $L_2(0,T;\mathbb{C}^2)$-ben minden $T > T_0$-ra.*

*Bizonyítás.* Láttuk, hogy $T_0$ a legkisebb idő, amely mellett minden $T > T_0$-ra a $\Lambda$ exponenciális rendszer $L_2(0,T;\mathbb{C}^2)$-beli momentumtere a $q$-val nem osztható indexeken befutja az $\ell_2$ teret. A 3.3. lemma szerint a (14) altereket kifeszítő $\Lambda$-beli vektorok momentumtere $\ell_2$ lesz, ha $T \ge 2/q$, és ilyenkor az alterekben vannak olyan vektorok, melyek éppen egy előírt $\ell_2$-beli momentumsorozatot adnak. Ha a (14) alterek lineárisan függetlenek valamilyen $T$-re, akkor a 3.5. lemma szerint erősen függetlenek is, ezért a 3.2. lemma szerint ilyen $T$-re a teljes $\Lambda$ rendszer momentumtere is befutja $\ell_2$-t, hiszen $h$ és $p_j h$ skaláris szorzata egy $W_j$-beli függvénnyel ugyanaz. Tegyük fel most, hogy a $W_j$ alterek lineárisan összefüggők. A

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \sin(n\pi p_1/q) \\ \sin(n\pi p_2/q) \end{pmatrix} e^{in\pi t}$$

jelöléssel élve ez azt jelenti, hogy a $q$-val nem osztható $n$ indexeken létezik egy nem azonosan nulla $\{c_{n,0}\} \in \ell_2$ sorozat, amelyre $\sum_n c_{n,0}\varphi_n = 0$ (és az összeg $L_2(0,T;\mathbb{C}^2)$-ben konvergens). Akkor viszont bármely $h \in L_2(0,T;\mathbb{C}^2)$-re

$$0 = \langle h, \sum_n c_{n,0}\varphi_n \rangle = \sum_n \overline{c_{n,0}} \langle h, \varphi_n \rangle,$$

azaz minden momentumsorozat merőleges $\{c_{n,0}\}$-ra, és akkor a momentumtér nem lehet maximális. $\square$

A dolgozat fő eredményének kimondásához vezessük be a következő lineáris egyenletrendszert. Válasszunk $f_j \in V_j$ függvényeket, és vezessük be az

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p/q) f_{j,0}, \\ y_p &= \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p/q) f_{j,1} \end{aligned} \tag{15}$$

jelöléseket, ahol $f_{j,0} = f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t) = f_j(t + 1/q)$, $0 < t < 1/q$. Vegyük észre, hogy az $(f_{j,0})_{j=1}^{q-1} \mapsto (x_p)_{p=1}^{q-1}$ és $(f_{j,1})_{j=1}^{q-1} \mapsto (y_p)_{p=1}^{q-1}$ hozzárendelések kölcsönösen egyértelműek. Valóban, ha

$$\sum_{j=1}^{q-1} \alpha_j \sin(j\pi p/q) = 0 \quad p = 1, \ldots, q-1,$$

akkor a $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{q-1} \alpha_j \sin(jt)$ egy olyan, legfeljebb $q-1$-edfokú trigonometrikus polinom, melynek gyöke van az összes $\pi k/q$ pontban, tehát $[0, 2\pi)$-ben van legalább $2q-1$ gyöke, ezért $\varphi \equiv 0$, vagyis $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{q-1} = 0$.
Az alábbiakban minden egyenlet egy egyenletpárt jelent, ahol $p^*$ helyébe minden előfordulásakor $p_1$-et, illetve minden előfordulásakor $p_2$-t kell helyettesíteni:

$$(A) \begin{cases} [0] & x_{p^*} = 0, \\ [1] & y_{p^*} = 0, \\ [2] & y_{p^*+1} + y_{p^*-1} = 0, \\ [k] & y_{p^*+k-1} + y_{p^*-k+1} - x_{p^*+k-2} - x_{p^*-k+2} = 0, \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Az $x_p$, $y_p$ változók definíciójából látható, hogy

$$(B) \begin{cases} x_0 = x_q = 0, \ x_{-p} = -x_p, \ x_{q+p} = -x_{q-p}, \\ y_0 = y_q = 0, \ y_{-p} = -y_p, \ y_{q+p} = -y_{q-p}. \end{cases}$$

Látjuk, hogy a (B) redukció figyelembe vételével az (A) egyenletrendszer az $x_1, \ldots, x_{q-1}, y_1, \ldots, y_{q-1}$ változókat tartalmazza. Az egyenletrendszer mátrixa egyszerű szerkezetű: soronként legfeljebb négy $\pm 1$ elemen kívül csak nullákat tartalmaz, és a nemnulla értékek is szabályosan helyezkednek el. Heurisztikusan azt lehet mondani, hogy két $q-1$ hosszúságú diszkrét húr $p_1$ és $p_2$ pontjából egy egységnyi jel szimmetrikusan továbbterjed mindkét irányba, és (B) szerint a húr határához érve a jel ellentétes fázisban verődik vissza. A dolgozat fő eredménye, hogy a keresett minimális elérési idő attól függ, milyen $k$ esetén lesz az (A), (B) egyenletrendszernek csak a nullvektor a megoldása, vagyis mikor lesz az egyenletrendszer mátrixának rangja a maximális $2q-2$:

3.1. TÉTEL. *Tekintsük azt a lineáris egyenletrendszert az $x_1,\dots,x_{q-1}$, $y_1,\dots,y_{q-1}$ változókra, amely az (A)-beli $[0],[1],\dots,[k]$ egyenletpárokból adódik a (B) figyelembe vételével. Az a minimális $T_0$ elérési idő, amely fölött $R(T)$ már nem nő tovább, megadható $T_0=(k_0+1)/q$ alakban, ahol $k_0$ a legkisebb olyan $k$ érték, amelynél a (B) szerint módosí tott (A) lineáris egyenletrendszernek csak a nullvektor a megoldása. Az $R(T_0)$ halmaz már tartalmazza a húr összes, véges idő alatt elérhető mozgásállapotát.*

*Bizonyítás.* A 3.6. lemma szerint azt kell vizsgálnunk, milyen $T$-re lesznek a $W_j$ alterek lineárisan függetlenek $L_2(0,T;\mathbb{C}^2)$-ben. Legyen tehát $f_j\in V_j$, és vizsgáljuk a

$$\sum_{j=1}^{q-1}\sin(j\pi p^*/q)f_j=0 \text{ m.m, } p^*=\begin{cases}p_1\\ p_2\end{cases} \tag{16}$$

egyenletpárt. A $t$ időt felosztva $1/q$ hosszú szakaszokra az $f_{j,0}=f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t)=f_j(t+1/q)$, $0<t<1/q$ jelölésekkel az alábbi egyenletek adódnak:

$$x_{p^*}=\sum_{j=1}^{q-1}\sin(j\pi p^*/q)f_{j,0}=0,$$

$$y_{p^*}=\sum_{j=1}^{q-1}\sin(j\pi p^*/q)f_{j,1}=0,$$

a $k\ge 2$ indexekre pedig a 3.4. lemma szerint trigonometrikus azonosságok alkalmazásával az adódik, hogy

$$\begin{aligned}0&=2\sum_{j=1}^{q-1}\sin(j\pi p^*/q)\left(\frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)}f_{j,1}-\frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)}f_{j,0}\right)\\&=\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\cos(j(p^*-k)\pi/q)-\cos(j(p^*+k)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)}f_{j,1}\\&-\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\cos(j(p^*-k+1)\pi/q)-\cos(j(p^*+k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)}f_{j,0}.\end{aligned} \tag{17}$$

Mivel

$$2x_p=2\sum_{j=1}^{q-1}\sin(j\pi p/q)f_{j,0}=\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\cos(j(p-1)\pi/q)-\cos(j(p+1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)}f_{j,0},$$

és hasonlóan $y_p$-re, ezért (17) ekvivalens az

$$y_{p^*-k+1} + y_{p^*-k+3} + \cdots + y_{p^*+k-1} - (x_{p^*-k+2} + x_{p^*-k+4} + \cdots + x_{p^*+k-2}) = 0$$

egyenletpárral, ami a 2-vel kisebb $k$ esetére felírt hasonló egyenletpár miatt ekvivalens az

$$y_{p^*-k+1} + y_{p^*+k-1} - (x_{p^*-k+2} + x_{p^*+k-2}) = 0$$

egyenletpárral. Vagyis az (A) egyenletrendszer adódik, és nyilvánvalóan a (B) azonosságok is teljesülnek. Ha $k/q < T \leq (k+1)/q$, akkor a [0], [1], ..., [k-1] egyenletek a teljes $[0, 1/q]$ szakaszon teljesülnek, [k] pedig a $[0, T - k/q]$ szakaszon. Nézzük először a $k \leq k_0$, $k/q < T < (k+1)/q$ esetet. Akkor a $T - k/q < t < 1/q$ értékekre vett $x_p$, $y_p$ változókra csak a [0], [1], ..., [k-1] egyenletek teljesülnek, ezért vannak olyan $x_p$, $y_p$ nem mind nulla konstansok, melyek kielégítik [0], [1], ..., [k-1]-et. Legyen $0 < t < T - k/q$-ra $f_{j,0} = f_{j,1} = 0$, $T - k/q < t < 1/q$ esetén pedig $f_{j,0}$, $f_{j,1}$ legyenek az $x_p$, $y_p$ megoldásnak (15) szerint megfelelő nem mind nulla konstansfüggvények. Akkor a fentiek szerint megkapjuk a (16) egyenletnek egy nemtriviális megoldását, azaz a $W_j$ alterek nem függetlenek, emiatt az $R(T)$ halmaz ilyen T-re nem maximális. Most legyen $k = k_0$, és $T = (k_0 - 1)/q$ vagy $k > k_0$. Akkor minden $0 < t < 1/q$-hoz tartozó $x_p$, $y_p$-re teljesülnek a ((B) szerint módosított) [0], [1], ..., $[k]$ egyenletek, vagyis csak $x_p = y_p = 0$ a megoldás, és emiatt a (16) egyenletnek csak triviális megoldása van. Ez azt jelenti, hogy a $W_j$ alterek lineárisan függetlenek, akkor pedig a 3.6. lemma szerint bármely $T \geq (k_0 + 1)/q$-ra az $R(T)$ halmaz maximális lesz. A bizonyítást befejeztük. □

A tétel pontos leírását adja a minimális elérési időnek. A kritérium nem nagy $p_1$, $p_2$ és $q$ értékekre papíron könnyen számolható, illetve bármely $p_1$, $p_2$, $q$ esetén könnyen programozható a (módosított) [0], [1], ..., $[k]$ egyenleteknek megfelelő mátrix rangjának vizsgálata. Ugyanakkor érdekes lenne egy explicit formula, mely $p_1$, $p_2$ és $q$ függvényében megadja $k_0$-t. Ez számos speciális esetben meghatározható, ezekből bemutatunk néhányat, teljes általánosságban viszont nem ismert.

Vezessük be az

$$u_k = y_k - x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

változókat. A (B) szerint

$$u_{-k} = x_{k+1} - y_k.$$

Nyilván $u_k$ $2q$-periodikus, de valójában $2q-2$ független új változót ad meg, melyekből az $x_k$, $y_k$ változók egyértelműen kifejezhetők, és az (A) egyenletrendszer tovább egyszerűsíthető:

3.7. LEMMA. *Az új $u_k$ változókból a korábbi változók felírhatók az*

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{j=0}^{k-1} u_{1-k+2j} = u_{k-1} + u_{k-3} + \cdots + u_{1-k}, \\ y_k &= \sum_{j=0}^{k-1} u_{2-k+2j} = u_k + u_{k-2} + \cdots + u_{2-k} \end{aligned} \tag{18}$$

*alakban. Speciálisan*

$$\sum_{j=0}^{q-1} u_{i+2j} = 0 \quad \forall i, \tag{19}$$

*azaz a páratlan indexű u-k és a páros indexű u-k összege is 0, így valójában $2q-2$ független $u_k$ változót definiáltunk. Az új változókkal az (A) egyenletrendszer a következő alakot ölti a $p/q$, $(p+s)/q$ pontpár esetén:*

$$(A')\begin{cases} [0] \quad \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+s-1} u_{1-p-s+2j} = 0, \\ [1] \quad \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+s-1} u_{2-p-s+2j} = 0, \\ [2] \quad u_{p+1} = u_{-p+1}, \quad u_{p+s+1} = u_{-p-s+1}, \\ [k] \quad u_{p+k-1} = u_{-p+k-1}, \quad u_{p+s+k-1} = u_{-p-s+k-1}, \quad k \geq 3. \end{cases}$$

*Bizonyítás.* Definíció szerint $u_0 = -x_{-1} = x_1$ és $u_1 = y_1$. Ezzel a (18) egyenleteket $k = 1$-re megkaptuk. Nagyobb $k$ esetén teljes indukciót alkalmazunk az $x_k = u_{1-k} + y_{k-1}$, illetve az $y_k = u_k + x_{k-1}$ formulák alapján. Így megkapjuk (18)-at, speciálisan az $x_q = y_q = 0$ egyenletek miatt (18)-ból (19) is adódik. Az (A') rendszerben [0] és [1] az $x_p = x_{p+s} = 0$ és $y_p = y_{p+s} = 0$ egyenletek (18) szerinti átírása, [k] pedig az eredeti egyenletpár $y_{p^*+k-1} - x_{p^*+k-2} = x_{p^*-k+2} - y_{p^*-k+1}$ alakra hozásából következik. □

Az új (A') egyenletrendszer annyiban egyszerűbb, mint az (A), hogy a $\geq 2$ indexű egyenletek két változó egyenlőségét állítják. A következőkben azt vizsgáljuk, melyik $[k]$ esetén találjuk az első redundáns egyenletet. A $[k]$ egyik egyenletét akkor nevezzük redundánsnak, ha kifejezhető $[k]$ másik egyenletéből és a $[0]$-$[k-1]$ egyenletekből a $2q$-periodikusság és (19) figyelembe vételével.

3.8. LEMMA. *a) Ha az (A') egyenletrendszerben $[k_1]$ egyik egyenlete redundáns, akkor a $k > k_1$ indexű egyenletpárok megfelelő egyenlete is redundáns lesz. b) Ha először $[k_1]$-ben van redundáns egyenlet, akkor*

$$T_0\left(\frac{p}{q}, \frac{p+s}{q}\right) = \frac{2q-k_1-2}{q}.$$

*Bizonyítás.*

a) A [2] egyenletpár [0] miatt ekvivalens a $\sum_{j=0}^{p-1} u_{3-p+2j} = 0$, $\sum_{j=0}^{p+s-1} u_{3-p-s+2j} = 0$ egyenletekkel. Hasonlóan látható teljes indukcióval, hogy $[k]$ ekvivalens a $\sum_{j=0}^{p-1} u_{k-p+2j} = 0$, $\sum_{j=0}^{p+s-1} u_{k-p-s+2j} = 0$ egyenletpárral. Vagyis ekvivalens átalakítás után $[k]$ egyenleteit úgy kapjuk, hogy [0] egyenleteiben minden indexet megnövelünk $k$-val. Emiatt ha $[k]$ egyik egyenlete kifejezhető nem későbbi indexű más egyenletekkel, akkor az indexek eltolásával kapott későbbi egyenlet is redundáns lesz. Megjegyezzük, hogy a változók indexben vett $2q$-periodikussága és a (19) egyenletek is invariánsak az indexek eltolására.

b) Tudjuk, hogy elég nagy $[k]$ esetén a $[0]$-$[k]$ egyenletrendszernek csak a nullvektor lesz a megoldása. Az a) szerint ha $k_1$ az első redundáns egyenlet, akkor $k_1 \le k \le k_0$-ra $[k]$ egyik egyenlete lesz redundáns, $k > k_0$-ra pedig mindkettő. Összesen $2q-2$ független egyenlet kell az egyértelmű megoldhatósághoz, ebből $k_1 - 1$-ig van $2k_1$, utána kell még $2q - 2k_1 - 2$, tehát az utolsó információt hordozó egyenlet indexe $k_0 = 2q - k_1 - 3$. Mivel tudjuk, hogy $T_0 = (k_0+1)/q$, a bizonyítást befejeztük. $\square$

A fenti apparátussal $s = 1$ és $s = 2$ esetére fogjuk a minimális elérési időt meghatározni.

3.9. Lemma.

$$T_0\left(\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right) = \max\left(\frac{2p}{q}, \frac{2q-2p-2}{q}\right).$$

*Bizonyítás.* Az előző lemma miatt azt kell megmutatni, hogy $2p \le 2q - 2p - 2$ esetén az első redundáns egyenlet indexe $k_1 = 2p$. Az egyenletrendszer

$$(A')\begin{cases}
[0] & \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p} u_{-p+2j} = 0,\\
[1] & \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p} u_{1-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p} = 0,\ u_{p+1} = 0,\\
[2] & u_{p+1} = u_{-p+1}, \quad u_{p+2} = u_{-p} \Leftrightarrow u_{1-p} = 0,\ u_{p+2} = 0,\\
[3] & u_{p+2} = u_{-p+2}, \quad u_{p+3} = u_{-p+1} \Leftrightarrow u_{2-p} = 0,\ u_{p+3} = 0,\\
\vdots & \\
[2p-2] & u_{3p-3} = u_{p-3}, \quad u_{3p-2} = u_{p-4} \Leftrightarrow u_{p-3} = 0,\ u_{3p-2} = 0,\\
[2p-1] & u_{3p-2} = u_{p-2}, \quad u_{3p-1} = u_{p-3} \Leftrightarrow u_{p-2} = 0,\ u_{3p-1} = 0,\\
[2p] & u_{3p-1} = u_{p-1}, \quad u_{3p} = u_{p-2} \Leftrightarrow u_{p-1} = 0,\ u_{3p} = 0.
\end{cases}$$

A [0] első egyenletére tekintettel $[2p-2]$-ből és a korábbi egyenletekből $u_{p-1} = 0$ következik; hasonlóan [0] második egyenletéből $[2p-1]$ szerint $u_p = 0$. Ezért

$[2p]$ első egyenlete redundáns. Amint láttuk, a $[0]$-$[2p-1]$ összesen $4p$ egyenletéből levezethető, hogy a $-p$ és $3p-1$ közötti indexű összes $u_k = 0$. Vagyis $4p$ egyenletből $4p$ ismeretlent meg lehet határozni, ezért ezen $4p$ egyenlet között csak akkor lehet redundáns, ha a $4p$ változó nem mind független, vagyis ha $-p+2q-2 \leq 3p-1$, azaz $4p \geq 2q-1$, tehát $2p \geq q$, de ez ellentmond a $2p \leq 2q-2p-2$ feltevésnek. □

Az $s = 2$ esetben a következőképpen kapjuk az optimális elérési időt. Az állítást olyan alakban mondjuk ki, amely kiemeli a $p \leftrightarrow q-p-2$ szimmetriát.

3.10. Lemma. *Legyen* $T_0 = T_0(p/q, (p+2)/q)$.
*a) Ha* $p$ *páros és* $q-p-2$ *páratlan, akkor* $T_0 = \max(2p/q, (2q-2p-2)/q)$.
*b) Ha* $p$ *páratlan és* $q-p-2$ *páros, akkor* $T_0 = \max((2p+2)/q, (2q-2p-4)/q)$.
*c) Ha* $p$ *és* $q-p-2$ *is páratlan, akkor* $T_0 = \max(2p/q, (2q-2p-4)/q)$ *ha* $p \neq q-p-2$ *és* $T_0 = (2p+2)/q = (2q-2p-2)/q = 1$, *ha* $p = q-p-2$.

*Bizonyítás.* Most is megkeressük az első redundáns egyenletet.

$$(A')\begin{cases}[0]\ \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+1} u_{-1-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p-1} + u_{p+1} = 0,\\ [1]\ \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+1} u_{-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p} + u_{p+2} = 0,\\ [2]\ u_{p+1} = u_{-p+1}, \quad u_{p+3} = u_{-p-1} \Leftrightarrow u_{-p-1} + u_{1-p} = 0,\ u_{p+3} + u_{p+1} = 0,\\ [3]\ u_{p+2} = u_{-p+2}, \quad u_{p+4} = u_{-p} \Leftrightarrow u_{2-p} + u_{-p} = 0,\ u_{p+4} + u_{p+2} = 0,\\ \ \vdots\\ [2p-3] \Leftrightarrow u_{p-6} + u_{p-4} = 0,\ u_{3p-2} + u_{3p-4} = 0,\\ [2p-2] \Leftrightarrow u_{p-5} + u_{p-3} = 0,\ u_{3p-1} + u_{3p-3} = 0,\\ [2p-1] \Leftrightarrow u_{p-4} + u_{p-2} = 0,\ u_{3p} + u_{3p-2} = 0,\\ [2p] \qquad \Leftrightarrow u_{p-3} + u_{p-1} = 0,\ u_{3p+1} + u_{3p-1} = 0,\\ [2p+1] \Leftrightarrow u_{p-2} + u_{p} = 0,\ u_{3p+2} + u_{3p} = 0,\\ [2p+2] \Leftrightarrow u_{p-1} + u_{p+1} = 0,\ u_{3p+3} + u_{3p+1} = 0.\end{cases}$$

Legyen először $p$ páros. Akkor $[0]$ illetve $[1]$ első egyenlete felírható

$$(u_{p-1} + u_{p-3}) + (u_{p-5} + u_{p-7}) + \cdots + (u_{3-p} + u_{1-p}) = 0,$$
$$(u_{p} + u_{p-2}) + (u_{p-4} + u_{p-6}) + \cdots + (u_{4-p} + u_{2-p}) = 0$$

alakban. Ezért a $[4]$, $[6], \ldots, [2p-4]$ egyenletekből kapjuk, hogy $u_{p-1} + u_{p-3} = 0$, emiatt $[2p]$ első egyenlete redundáns. Most nézzük csak a $[0]$-$[2p-1]$ egyenleteket. A $[2]$, $[4], \ldots, [2p-4]$, $[2p-2]$, $[2p-4]$, $[0]$, $[2]$, $[4], \ldots, [2p-4]$, $[2p-2]$ egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}u_{-p-1} &= -u_{1-p} = u_{3-p} = \cdots = u_{p-5} = -u_{p-3} = u_{p-1} = -u_{p+1}\\ &= u_{p+3} = -u_{p+5} = \cdots = -u_{3p-3} = u_{3p-1}.\end{aligned}$$

Hasonlóan a [3], [5], ... ,[$2p-3$], [$2p-1$], [$2p-3$], [1], [3], ... , [$2p-5$], [$2p-3$], [$2p-1$] egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_{-p} &= -u_{2-p} = u_{4-p} = \cdots = u_{p-4} = -u_{p-2} = u_p = -u_{p+2} \\ &= u_{p+4} = \cdots = u_{3p-4} = -u_{3p-2} = u_{3p}. \end{aligned}$$

Vagyis a [0] – [$2p-1$] $4p$ egyenletéből a $-p-1$ és $3p$ közti indexű $4p+2$ változók alteréből két szabadsági fokú rendszer maradt. Emiatt a [0] – [$2p-1$] egyenletek között csak akkor lehet redundáns, ha nem mind a $4p+2$ változó független, vagyis ha $-p-1+2q-2 \leq 3p$, $4p \geq 2q-4$, azaz $p \geq q-p-2$. Mivel páros $p$-re $q$ páratlan, ezért $p \neq q-p-2$, ezzel beláttuk:

$$\text{Ha } p \leq q-p-2 \text{ páros, akkor } T_0 = \frac{2q-2p-2}{q}.$$

Legyen most $p$ páratlan. Akkor [0], illetve [1] első egyenletének alakja

$$\begin{aligned} u_{p-1} + (u_{p-3} + u_{p-5}) + \cdots + (u_{3-p} + u_{1-p}) &= 0, \\ u_p + (u_{p-2} + u_{p-4}) + \cdots + (u_{4-p} + u_{2-p}) &= 0. \end{aligned}$$

Ezért [$2p-2$]-ből $u_{p-1} = 0$, [$2p-1$]-ből $u_p = 0$ következik. A páros indexű egyenleteket először csökkenő, aztán növő sorrendben figyelembe véve kapjuk, hogy

$$0 = u_{p-1} = u_{p-3} = u_{p-5} = \cdots = u_{-p-1} = u_{p+1} = u_{p+3} = \cdots = u_{3p+1},$$

és hasonlóan egy indexszel eltolva

$$0 = u_p = u_{p-2} = \cdots = u_{3p+2}.$$

Innen következik, hogy [$2p+2$] első egyenlete redundáns. Másrészt a [0] – [$2p+1$] $4p+4$ egyenletéből megkaptuk, hogy az $u_{-p-1}$ és $u_{3p+2}$ közti $4p+4$ változó mindegyike nulla. Vagyis [0] – [$2p+1$]-ben nem lehet redundáns egyenlet, ha a változók függetlenek, azaz $-p-1+2q-2 > 3p+2$, másképpen ha $p \leq q-p-3$. Ezzel igazoltuk:

$$\text{Ha } p \leq q-p-3 \text{ páratlan, akkor } T_0 = \frac{2q-2p-4}{q}.$$

Végül legyen $p = q-p-2$ páratlan. Akkor [$2p$] első egyenlete redundáns. Ugyanis $3p+1 = 2q-p-3$ miatt

$$\begin{aligned} u_{3p+1} + u_{3p-1} &= u_{-p-3} + u_{-p-5} = -(u_{-p-1} + u_{1-p} + \cdots + u_{2q-p-7}) \\ &= -[(u_{-p-1} + u_{1-p}) + \cdots + (u_{p-5} + u_{p-3}) + u_{p-1} \\ &\quad + (u_{p+1} + u_{p+3}) + \cdots + (u_{3p-5} + u_{3p-3})] = 0. \end{aligned}$$

Másrészt ha $[2p-1]$-ben is lenne redundáns egyenlet, akkor $[0]-[2p+1]$-ben legfeljebb $4p+1=2q-3$ független egyenlet volna, márpedig láttuk, hogy ezekből az egyenletekből következik, hogy mind a $2q-2$ változó egyenlő nullával. Vagyis ez esetben az első redundáns egyenlet $[2p]$-beli, ezért

$$T_0 = (2q-2p-2)/q = (2p+2)/q = 1.$$

A fentiekből a lemma állításai már könnyen adódnak. Valóban, ha $p$ páros és $q-p-2$ páratlan, akkor $p \neq q-p-2$ és $p < q-p-2$ esetén $T_0 = (2q-2p-2)/q$, $p > q-p-2$ esetén pedig $T_0 = (2q-2(q-p-2)-4)/q = 2p/q$, ahonnan a lemma a) állítása következik. Ha $p$ páratlan és $q-p-2$ páros, akkor szintén $p \neq q-p-2$ és $p < q-p-2$ esetén $T_0 = (2q-2p-4)/q$; $p > q-p-2$ esetén pedig $T_0 = (2q-2(q-p-2)-2)/q = (2p+2)/q$, amiből b) következik. Végül ha $p$ és $q-p-2$ is páratlan, de nem egyenlők, akkor $p < q-p-2$ esetén $T_0 = (2q-2p-4)/q$; $p > q-p-2$ esetén pedig $T_0 = (2q-2(q-p-2)-4)/q = 2p/q$, a $p = q-p-2$ esetet pedig már láttuk. Ezzel a c) is igazolást nyert, amivel a bizonyítást befejeztük. $\square$

## Hivatkozások


[1] S. A. Avdonin and J. Edward: *Exact controllability for a string with attached masses*, IMA Preprints, Minnesota (2015).

[2] C. Castro: *Exact controllability of the 1-d wave equation from a moving interior point*, ESAIM: COCV **19** (2013), no. 1, 301–316.

[3] S. Hansen and E. Zuazua: *Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass*, SIAM J. Control and Optim. **33** (1995), no. 5, 1357–1391.

[4] V. A. Il'in and E. I. Moiseev: *Optimization of the boundary control of string vibrations by an elastic force on an arbitrary sufficiently large time interval*, Diff. Equ. **42** (2006), no. 12, 1775–1786.

[5] I. Joó: *On the reachability set of a string in two interior points*, Acta Math. Hung. **49** (1987), 203–211.

[6] I. Joó: *The control of a string in two interior points*, Periodica Math. Hung. **22** (1991), no. 1, 15–25.


*(Beérkezett: 2016. március 29.)*

HORVÁTH MIKLÓS
Matematika Intézet, Analízis Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
H 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3–9.
horvath@math.bme.hu

## THE CONTROL OF VIBRATING STRINGS

Miklós Horváth

We investigate the reachable movement states of a finite string, fixed at the endpoints, with zero initial state and controlled in two interior points. It is known that all states reachable in finite time can be obtained in a fixed finite time $T_0$. In this paper we give a simple linear algebraic characterization of the minimal reachability time $T_0$.