Alkalmazott Matematikai Lapok **33** (2016), 1–17.

ÁTLAGTÉRJÁTÉKOK: OPTIMÁLIS VEZÉRLÉSTŐL OPTIMÁLIS TRANSZPORTIG

MÉSZÁROS ALPÁR RICHÁRD

Jelen dolgozatunkkal egy rövid betekintést nyújtunk az újonnan bevezetett átlagtérjátékok elméletébe. Ezen rendszerek optimális vezérléssel való megfogalmazása és a Nash-típusú egyensúlyi fogalmak elemzése után, az optimális transzport modern elméletét felhasználva tárgyalunk néhány ún. variációs rendszert. Lokális kapcsolattal ellátott átlagtérjátékok gyenge megoldásainak létezését és unicitását mutatjuk be. Az alkalmazott módszerek az optimális transzport probléma ún. Benamou–Brenier-megfogalmazásából merítkeznek.

1. Bevezetés

Az átlagtérjátékok (ang. *mean field games*, a továbbiakban röviden *MFG*) elméletét nagyjából egyidejűleg J.-M. Lasry és a Fields-díjas P.-L. Lions ([17, 18, 19]) francia matematikusok, valamint M. Huang, P.E. Caines és R.P. Malhamé ([14]) Kanadában dolgozó mérnökök vezették be. Később Lions pár éven keresztül a párizsi Collège de France intézményben mutatta be ([20]) az elmélet további fejlődését. Tulajdonképpen Lions tekinthető az elmélet atyjának. 2006 óta az elmélet folyamatosan bővül újabb és újabb eredményekkel (lásd a további hivatkozásokat), amelyek nagy mértékben a francia és olasz parciális differenciálegyenletek és optimális vezérlés elméletek iskoláiban tevékenykedő neves kutatóknak köszönhetőek. Például, MFG rendszerek tanulmányozására kifejlesztett numerikus módszereket az [1, 2, 10, 16] dolgozatokban mutatnak be; MFG rendszerek gyenge megoldásai a [7, 8, 9] dolgozatban kerülnek tanulmányozásra, stb.

Az átlagtérjátékok valójában olyan differenciáljátékok[1], ahol a játékosok száma nagyon nagy, tart végtelenhez. Az elmélet alapötlete és elnevezése valójában a statisztikus fizikában és mechanikában is megtalálható átlagtér modellekből származik. Ha a Bolzmann-, vagy Vlasov-egyenletek származtatására gondolunk (folytonossági határértékből) látható, hogy az átlagtér elmélet nagyon hasznosnak bizonyul abban, hogy a részecskék mozgását (helyzetét, sebességét) úgymond átlagolva, egy parciális differenciálegyenlet-rendszerrel írjuk le. Így a több millió,

[1] Olyan játékok, ahol a játékosok dinamikáját közönséges (sztochasztikus) differenciálegyenletek írják le.

milliárd közönséges differenciálegyenletből álló rendszer megoldása helyett (amelyek megadnák minden részecske pályáját), egy parciális differenciálegyenletekből álló rendszert tekintünk, ahol az egyik fő változó a részecskék sűrűsége (a másik általában a sebességük). Természetes az is, hogy nem puszta eleganciából választjuk a második megközelítést, hiszen szinte azonnal belátható, hogy az első kivitelezése (például numerikusan) szinte lehetetlen. Ha csak az $N-$test problémára gondolunk a newtoni/hamiltoni mechanikában, rögtön érezhető a probléma nehézsége már $N = 2, 3, \ldots, 10$ esetén is. A fenti problémakör esetén $N \approx 10^{18}$ nagyságrendű problémákról beszélünk.

Visszatérve az MFG rendszerekhez megjegyezzük, hogy ezek a játékok nem atomi játékok, vagyis minden játékosnak a játék teljességéhez való egyenkénti hozzájárulása elhanyagolható. Más szóval, egy játék során nem az egyének optimális pályájának megadásán, hanem a populáció sűrűség-evolúciójának tanulmányozásán van a hangsúly.

Jelen dolgozatunkkal egy rövid betekintést szeretnénk nyújtani ezen színes elméletbe. Az MFG-elmélet végső soron a parciális differenciálegyenletek elméletébe tartozik, de szoros kapcsolatban áll az optimális és sztochasztikus vezérléssel és az optimális transzport elmélettel. Nem utolsósorban mély valószínűségszámítási megközelítései is vannak. A dolgozat célja, hogy néhány ilyen kapcsolatot bemutassunk és elemezzünk. Melléktermékként rövid betekintést nyújtunk az optimális transzport újszerű elméletébe, amely alkalmazhatósága néhány variációs MFG-rendszer (gyenge) megoldásainak tanulmányozásában is megtalálható.

Egy MFG-rendszer általában a következő kapcsolt Hamilton-Jacobi-Bellman (a továbbiakban röviden HJB) és Fokker-Planck (a továbbiakban röviden FP) egyenletekből álló parciális differenciálegyenlet-rendszert jelenti

$$\begin{cases} -\partial_t u(t,x) - \nu\Delta u(t,x) + H(x, \nabla u(t,x)) = f(x, m(t,x)), & [0,T) \times \mathbb{T}^d \\ \partial_t m(t,x) - \nu\Delta m(t,x) - \mathrm{div}\,(\nabla_p H(x, \nabla u(t,x)) m(t,x)) = 0, & (0,T] \times \mathbb{T}^d, \\ m(0,x) = m_0, \quad u(T,x) = g(x), \quad \mathbb{T}^d. \end{cases} \tag{MFG}$$

Ebben a rendszerben az u változó jelenti egy tipikus ügynök nyereségfüggvényét, és az m változó a populáció sűrűségét adja meg. A rendszer bemeneti adatai az f, g függvények, a H hamiltoni függvény, a $\nu \geq 0$ valós paraméter, valamint m_0 az ügynökök kezdeti sűrűségfüggvénye. A játék $T > 0$ ideig tart, és jelen esetben a $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ teren történik. A későbbiekben részletesen elemezzük ezen bemeneti adatokat.

A dolgozat felépítése a következő: A 2. fejezetben az MFG-rendszerek eredeti optimális vezérlés alapú megközelítését vázoljuk. Ebből a megközelítésből látható a Nash-egyensúlyi fogalom is. A 3. fejezetben röviden vázoljuk az optimális transzport elmélet főbb alappillérét. Itt bemutatjuk a Monge-, illetve Kantorovich-problémákat, Brenier tételét, McCann interpolációját és a Wasserstein-terek szerkesztését. Továbbá megadjuk az ún. Benamou-Brenier dinamikus formulációt, amely a Wasserstein-tér differenciálgeometriai elemzéséhez és geodetikusok értelmezéséhez vezet. A 4. fejezetben teremtjük meg a kapcsolatot az optimális transzport Benamou–Brenier-formulációja és az MFG-rendszerek variációs megközelítése között. Parciális differenciálegyenletek optimális vezérlésére és a konvex analízisből ismeretes Fenchel–Rockafellar-típusú tételekre alapozva, igazolni lehet variációs MFG-rendszerek gyenge megoldásainak létezését és parciális uniciátát.

2. MFG-rendszerek optimális vezérlés alapú megfogalmazása

Ebben a fejezetben alapul véve J.-M. Lasry és P.-L. Lions bevezető munkáit (lásd [17, 18, 19]), valamint a későbbiekben P.-L. Lions által tartott előadás sorozatot ([20]), megadjuk néhány MFG-rendszer leírását. Az általánosság megsértése nélkül a $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$ tóruszon dolgozunk (peremfeltételek elkerülése végett). A továbbiakban, egy $\mathbb{T}^d - n$ értelmezett függvény azt jelenti, hogy a függvény $\mathbb{R}^d$-n értelmezett és $\mathbb{Z}^d$ periódikus.

Tekintsük a következő sztochasztikus differenciáljátékot: adott egy $N > 1$ ügynökből álló populáció. Az ügynökök szabadon mozoghatnak $\mathbb{T}^d$-n $[0, T]$ időintervallum alatt. Az $i-$edik ügynök, aki a t időpillanatban az $x^i \in \mathbb{T}^d$ pontban tartózkodik tekinti, a következő sztochasztikus vezérlési problémát

$$u^i(t,x^i) := \inf \mathbb{E}\left\{\int_t^T L(X^i(s),\alpha^i(s)) + f\left(X^i(s), \frac{1}{N-1}\sum_{i\neq j}\delta_{X^j(s)}\right)\mathrm{d}s + g\Big(X^i(T)\Big)\right\}, \quad (1)$$

a

$$\mathrm{d}X^i(s) = \alpha^i(s)\mathrm{d}s + \sqrt{2\nu}\mathrm{d}B^i(s),\ s \in (t,T] \quad \text{és} \quad X^i(t) = x^i$$

feltételekkel. Ebben a problémában $L : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ egy adott Lagrange-függvény; $f : \mathbb{T}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{R}$ (itt $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ a $\mathbb{T}^d$ Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek terét jelöli) adott függvény képezi a kapcsolatot a játékosok között és egyben az ún. *üzemeltetési költséget*; $g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ szintén egy adott függvény, amely a játék *végső költségét* képezi. Látható, hogy minden ügynök optimalizálási problémája függ a többi ügynöktől, ezek empirikus mértéke szerint. Továbbá $\nu \geq 0$ egy valós paraméter, $\nu = 0$ esetén determinisztikus (elsőrendű) modellről beszélünk, valamint a B^i-k $i \in \{1, \ldots, N\}$ független $d-$dimenziós Brown-mozgások $\mathbb{T}^d$-n. A fenti problémában δ_x az $x \in \mathbb{T}^d$ pontban vett Dirac-delta mértéket jelöli.

Formálisan dolgozva, az empirikus mértékek konvergenciája mellett (a t időpillanatban a populáció sűrűségét megadó valószínűségi mértékhez),

$$\frac{1}{N-1}\sum_{i\neq j}\delta_{X^j(t)} \rightharpoonup m(t,\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d),\ \text{a gyenge} - * \text{ topológiában},\ \text{amint } N \to +\infty,$$

a fenti optimalizálási probléma felírható bármely tipikus ügynök esetén, bemenő változóként használva az ügynökök sűrűségét. Így ez a probléma felírható az indexek elhagyása után a következő alakban:

$$u(t,x) := \inf \mathbb{E}\left\{\int_t^T L(X(s),\alpha(s)) + f\left(X(s), m(s, X(s))\right)\, \mathrm{d}s + g\left(X(T)\right)\right\},$$

a

$$\mathrm{d}X(s) = \alpha(s)\mathrm{d}s + \sqrt{2\nu}\mathrm{d}B(s),\ s \in (t,T] \quad \text{és} \quad X(t) = x$$

feltétellel. A bemeneti függvények bizonyos regularitási feltételei mellett a sztochasztikus vezérlés elmélete biztosítja az optimális α^* vezérlések létezését mindkét fenti probléma esetén (így mindkét problémában az inf valójában min). Továbbá α^* visszacsatolás (feedback) formában, az $\alpha^*(t,x) := -\nabla_p H(x, \nabla u(t,x))$ formulával adott, ahol a $H : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ hamiltoni függvény az L második változó szerint vett Legendre–Fenchel-transzformáltja. Továbbá az u *értékfüggvény* formálisan megold egy *Hamilton–Jacobi–Bellman*-típusú egyenletet, míg a populáció sűrűsége, amely az $m(t,\cdot) := \mathrm{Law}(X(t))$ formulával adott, egy *Fokker–Planck-egyenlet* szerint fog változni, a formálisan felírt optimális α^* vektormező szerint. Ezt könnyen beláthatjuk az Itô-kalkulust használva. Az imént használt Law-jelölés a következőképpen értelmezhető: egy $\mathbb{T}^d$-n értelmezett Y valószínűségi változó esetén, Y *törvénye* a $\mu := \mathrm{Law}(Y)$ valószínűségi mérték, úh.

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \mathbb{E}\left(\varphi(Y)\right)$$

minden $\varphi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén.

A fentiek alapján az MFG-rendszer egy kapcsolt HJB- és FP-egyenletekből álló rendszer:

$$\begin{cases} -\partial_t u(t,x) - \nu\Delta u(t,x) + H(x,\nabla u(t,x)) = f(x, m(t,x)), & [0,T) \times \mathbb{T}^d \\ \partial_t m(t,x) - \nu\Delta m(t,x) - \mathrm{div}\left(\nabla_p H(x,\nabla u(t,x)) m(t,x)\right) = 0, & (0,T] \times \mathbb{T}^d, \\ m(0,x) = m_0, \quad u(T,x) = g(x), \quad \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

Minden esetben ismeretes az ügynök populáció kezdeti konfigurációja, az $m_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ valószínűségi mérték.

A figyelmes olvasó észrevehette, hogy bizonyos értelemben „csalás” történt a fenti rendszer származtatása során. Valóban, hiszen az u értékfüggvény értelmezése során szükség van m-re, mint bemeneti adatra, később pedig m-et az optimális trajektória segítségével ($m(t,\cdot) := \mathrm{Law}(X(t))$) – amely függ m-től – értelmeztük. Valójában a csalás azzal magyarázható, hogy a fenti rendszer megoldása egy Nash-egyensúlyt is kódol a játékban.

Pontosabban, a következő történik a rendszer származtatása során: az optimális vezérlés probléma esetén a tipikus ügynök „előrejelzi” a populáció sűrűségének változását, $m(t,\cdot)$-et. Ennek segítségével meg tudja határozni az optimális pályáját, valamint az optimális vezérlést, α^*-t. Ez alapján értelmezni tud egy új valószínűségi mértéket, mint $\tilde{m}(t,\cdot) := \mathrm{Law}(X(t))$, amely az FP-egyenlet megoldását fogja eredményezni. Ha az előrejelzés helyes volt, vagyis $m = \tilde{m}$, akkor Nash-egyensúlyról beszélünk, valamint (MFG)-nek van megoldása. Ebben az esetben az m valószínűségi mérték egyben megközelítő Nash-egyensúlyként is szolgál véges, de nagy számmal rendelkező (1) típusú differenciáljátékok esetén.

A fenti (MFG) rendszer megoldásának létezése nehéz kérdésnek bizonyul. Abban az esetben, amikor a kapcsolatot jelentő f függvény nem lokális és regularizáló (például az $m-$szerinti függés valamilyen konvolúcióval adott) Lasry és Lions igazolták (lásd [17, 18, 19, 20]) az erős megoldások létezését (és bizonyos monotonicitási feltételek mellett az unicitását is), elsőrendű ($\nu = 0$) esetén is, többnyire fixpont alapú eljárásokat használva. Az előbbi előrejelzés-eljárás is utalás a fixpontos megközelítésre, de ez csak regularizáló operátor esetés kivitelezhető.

Lokális függvények esetén, amikor f nem regularizál (például $f(x, m) = m^\alpha$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ adott hatvány), a létezés kérdése sokkal mélyebb. Itt megemlítenénk példának D. Gomes és munkatársai munkáját ([12]), akik a következő rendszert tanulmányozták:

$$\begin{cases} -\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) + H(x, \nabla u(t,x)) = m(t,x)^\alpha, & [0,T) \times \mathbb{T}^d \\ \partial_t m(t,x) - \Delta m(t,x) - \operatorname{div}\left(\nabla_p H(x, \nabla u(t,x)) m(t,x)\right) = 0, & (0,T] \times \mathbb{T}^d, \\ m(0,x) = m_0, \quad u(T,x) = g(x), \quad \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

Néhány strukturális feltétel mellett, H szubkvadratikus $1+1/(d+1) < \gamma < 2$ növekedéssel a második változóban, $0 < \alpha < \alpha_\gamma$, ahol α_γ egy felső korlát, ami konkrétan kiszámolható a többi paraméter függvényében, és $m_0, g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, a fenti lokális rendszernek létezik egyértelmű klasszikus megoldása. Az eredmény igazolására a szerzők Gagliardo–Nirenberg-típusú interpolációs eljárásokat és egyéb PDE-témakörben használatos a priori becsléseket használnak.

Ez a dolgozat is azt igazolja, hogy általános esetben még mindig nagyon keveset tudunk a lokális kapcsolattal ellátott MFG-rendszerekről. Továbbá előrevetíti azt a tényt is, hogy különböző gyenge megoldások létezésére sokkal több remény lehet. Egy nagyon hasznos elmélet, amely MFG-rendszerek tanulmányozásábal is segítségünkre lesz, az *optimális transzport* elmélet. Ezen elmélet elemeit a következőkben vázoljuk.

3. Optimális transzport eszköztár

Az optimális transzport elmélet alapjait Gaspard Monge francia matematikus tette le 1781-ben (lásd [27]). Matematikai nyelvezettel ez a probléma a következőképpen fogalmazható meg: adott μ és ν, a d-dimenziós Lebesgue-mértékre ($\mathcal{L}^d$) nézve abszolút folytonos (jel: $\mu, \nu \ll \mathcal{L}^d$) valószínűségi mérték $\mathbb{R}^d$-n, f, illetve g

sűrűségfüggvényekkel, vagyis $\mu = f \cdot \mathcal{L}^d$ és $\nu = g \cdot \mathcal{L}^d$ úgy, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Találjuk meg azt a (mérhető) $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ leképezést amely az f sűrűséget a g-be *transzportálja* (jel: $T_\# f = g$) és közben optimalizálja a transzportálási költséget, azaz

$$T \in \operatorname{argmin}\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |x - S(x)| f(x)\mathrm{d}x \ : \ \ S_\# f = g \right\}. \tag{MP}$$

A fenti probléma esetén, ha létezik optimális T, ezt *optimális transzport leképezés*nek nevezzük. Az (MP) problémát természetes módon megfogalmazhatjuk általános valószínűségi mértékek esetén (nem feltétlenül kell megkövetelni az abszolút folytonosságot).

A továbbiakban egy (X, d) lengyel (teljes, szeparábilis metrikus) tér esetén jelöljük az X Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek terét $\mathcal{P}(X)$-szel. Nemkompakt X esetén megkülönböztetjük a $\mathcal{P}_p(X)$ tereket ($1 \le p < +\infty$, véges $p-$edrendű momentummal rendelkező mértékek), amelyeket a következőképpen értelmezhetük: legyen $x_0 \in X$ egy tetszőleges rögzített pont. Ekkor

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) \ : \ \int_X d(x_0, x)^p \,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\}.$$

Nyilvánvalóan, ha X kompakt, akkor $\mathcal{P}(X)$ ekvivalens $\mathcal{P}_p(X)$-szel bármely $1 \le p < +\infty$ esetén.

A mi esetünkben általában $X = \mathbb{R}^d$, $X = \Omega$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ egy kompakt halmaz, $X = \mathbb{T}^d$ a d-dimenziós tórusz ($\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$), vagy $X = M$, egy kompakt Riemann-sokaság. Mivel sok eredmény kijelentése esetén nem jelent plusz erőfeszítést absztraktabb terekkel dolgozni, ezért mi is általánosan lengyel terekkel fogunk dolgozni. Viszont legtöbbször sajátosan az euklidészi keretek között maradunk.

Most nézzük, mit is jelent pontosabban egy mérhető leképezés esetén a „transzportáció" fogalma. Legyenek X, Y lengyel terek, $T : X \to Y$ mérhető, és $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Ekkor $\mathcal{P}(Y) \ni \nu := T_\# \mu$ (ν a μ mérték T leképezés által vett transzport mértéke, vagy ang. *push-forward*-ja) azt jelenti, hogy bármely $B \in \mathcal{B}(Y)$ Borel-halmaz esetén $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$. Ez a feltétel tesztfüggvényekre térve azt jelenti, hogy

$$\int_X \varphi(T(x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \varphi(y)\,\mathrm{d}\nu(y), \quad \forall\ \varphi : Y \to \mathbb{R} \text{ korlátos estén.}$$

Visszatérve Monge problémájához elmondhatjuk, hogy (MP) teljes általánosságában több mint 150 évig megoldatlan maradt. Nagyon egyszerű belátni, hogy a fenti problémának nem mindig létezik megoldása. Ennek érdekében tekintsük például az $X = Y = \mathbb{R}$ és $\mu := \delta_0$, valamint $\nu := \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2$ esetet, ahol δ_x az

x pontban vett Dirac-delta mértéket jelöli. Ebben az esetben a $T_{\#}\mu = \nu$ feltétel üres, hiszen egyetlen leképezés sem létezik, amely „széthasítaná” a $0-$ban levő tömeget.

Tekintsünk egy másik példát (lásd [32]): Legyenek

$$X = Y = \mathbb{R}^2,\ A = \{-1\} \times [0,1],\ B = \{0\} \times [0,1] \text{ és } C = \{1\} \times [0,1]$$

függőleges szakaszok. Legyenek továbbá $\mu := \mathcal{H}^1 \llcorner B$ és $\nu := \frac{1}{2}\mathcal{H}^1 \llcorner A + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1 \llcorner C$, ahol $\mathcal{H}^1 \llcorner D$ az 1-dimenziós Hausdorff-mértéknek a D $\mathcal{H}^1$-mérhető halmazra való leszűkítését jelöli. Ekkor nyilván léteznek $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mérhető leképezések ú.h. $T_{\#}\mu = \nu$, de könnyű belátni, hogy nincsen optimális megoldása az (MP) problémának. Valóban, ennek érdekében szerkesszük a következő transzport leképezéseket: Legyen $n \in \mathbb{N}$, és osszuk fel a B szakaszt $2n$ részre úgy, hogy minden kis szakasz hossza $1/2n$ legyen. Legyenek ezek a szakaszok fentről lefele haladva $(B_i)_{i\in\{1,\dots,2n\}}$. Osszuk fel továbbá az A és C szakaszokat n részre úgy, hogy minden kis szakasz hossza $1/n$ legyen. Legyenek ezek a szakaszok fentről lefele haladva $(A_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, illetve $(C_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Ekkor szerkesszük meg a $T_n : B \to A \cup C$ darabonként affin leképezéseket, amelyek a B_{2i-1} szakaszokat A_i-be, valamint a B_{2i} szakaszokat a C_i-be viszik át, minden $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén. Minden ilyen leképezés költsége az (MP) problémában kisebb, vagy egyenlő, mint $\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2n}\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}$. Ha $n \to +\infty$, akkor ez a költség tart 1-hez, és nyilvánvaló, hogy ha létezik optimális transzport leképezés, akkor ennek költsége nem lehet kisebb, mint 1, hiszen a B pontjai legalább 1 távolságra vannak az A és a C pontjaitól is. Másfelől belátható, hogy a T_n leképezéssorozatnak nem létezik pontonkénti határértéke, hiszen az esetleges T határértékre egyidejűleg kellene teljesüljön, hogy $T = T_1$ és $T = T_2$, ahol $T_1(x) = x + e_1$, $T_2(x) = x - e_1$ és $e_1 = (1,0)^\top \in \mathbb{R}^2$, ami természetesen lehetetlen. Más szóval, ebben az esetben is az optimális leképezés szét kellene hasítsa a B pontjaiban levő tömegeket. Vegyük észre, hogy $T_n \rightharpoonup \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$, gyenge értelemben, amiből az is látszik, hogy (MP) nem bizonyul stabilnak a transzport leképezések gyenge konvergenciáját illetően.

Monge problémáját teljes általánosságában L. Kantorovich orosz matematikus és Nobel-díjas közgazdász válaszolta meg 1942-ben (lásd [15]). Ő az (MP) probléma egy következő relaxált változatát tekintette. Térjünk vissza az absztraktabb környezetbe, legyenek X és Y (nem feltétlenül kompakt) lengyel terek, és $c : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ egy tetszőleges alulról félig folytonos és alulról korlátos költségfüggvény (az euklidészi esetben $c(x,y) = |x-y|$ az előbb felírt (MP) probléma költségfüggvénye), és tekintsük a következő problémát:

$$\inf\left\{\int_{X\times Y} c(x,y)\,\mathrm{d}\gamma(x,y)\ :\ \gamma \in \Pi(\mu,\nu)\right\}, \tag{KP}$$

ahol $\Pi(\mu,\nu) := \{\gamma \in \mathcal{P}(X\times Y)\ :\ (\pi^x)_{\#}\gamma = \mu,\ (\pi^y)_{\#}\gamma = \nu\}$ és $\pi^x : X \times Y \to X$, valamint $\pi^y : X \times Y \to Y$ a kanonikus projekciók. Könnyen belátható, hogy (KP) esetén a feltétel soha nem lehet üres, hiszen bármely $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$ esetén $\mu \otimes \nu \in \Pi(\mu, \nu)$. Valóban, hiszen a $\mu \otimes \nu$ szorzatteren értelmezett méték x szerinti projekciója μ, és y szerinti projekciója ν.

Az is könnyen igazolható, hogy a (KP) problémának mindig van megoldása. Ez a tény belátható alkalmazva a variációszámítás direkt módszerét. Ehhez elegendő igazolni, hogy bármely $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ minimalizáló sorozatnak van gyenge-$\star$ konvergens részsorozata, a gyenge határérték megengedhető megoldás valamint, hogy az (KP) problémában szereplő funkcionál alulról félig folytonos az imént említett konvergenciára nézve. Ha megkövetelnénk, hogy az X és Y terek kompaktak legyenek, akkor a minimizáló sorozat szekvenciális kompaktsága a (szekvenciális) Banach–Alaoglu-tétel következménye lenne. Valóban, hiszen kompakt téren értelmezett folytonos függvények tere szeparábilis, és $\mathcal{P}(X \times Y)$ része ezen tér duálisának. Viszont általános esetben, ha az X és Y terek nem kompaktak, ez a megközelítés nem használható. Ekkor egy mélyebb eredmény, Prokhorov tétele fogja eredményezni a szekvenciális kompaktságot, hiszen a minimalizáló sorozat ún. *szűk* (ang. *tight*) mértéksorozat. A funkcionál alulról félig folytonossága a gyenge-$\star$ konvergenciára nézve egy jól ismert eredmény, amely a c függvény alulról félig folytonosságának és alulról korlátosságának következménye.

A (KP) probléma γ optimalizálóját *optimális transzport terv*nek nevezzük. A kapcsolat az (MP) és (KP) problémák között könnyen felfedezhető: ha létezik optimális T leképezés az (MP) esetén, akkor $\gamma := (\mathrm{id}, T)_{\#}\mu$ optimális terv a (KP) esetén.

3.1. Kantorovich-potenciál, Wasserstein-terek és Brenier tétele

Konvex analízisben használatos dualitási technikák segítségével felírhatjuk a (KP) probléma duálisát a következőképpen:

$$\begin{aligned}\sup\Bigg\{ &\int_X \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) + \int_Y \psi(y)\mathrm{d}\nu(y) : \\ &\varphi \in C_b(X), \psi \in C_b(Y) \text{ és } \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y),\ \forall (x,y) \in X \times Y \Bigg\},\end{aligned} \tag{DP}$$

ahol $C_b(X)$ az X-en értelmezett folytonos és korlátos függvények terét jelöli.

A (DP)-ben használt φ és ψ függvényeket *Kantorovich potenciál*oknak nevezzük. Szintén konvex analízisből ismert Rockafellar tételének segítségével igazolható, hogy léteznek az optimális φ, ψ függvények, valamint $\min(\mathrm{KP}) = \max(\mathrm{DP})$.

$X = Y = \mathbb{R}^d$ esetén különös jelentőséggel bírnak a $c(x,y) = |x-y|^p$ alakú költségek ($1 \leq p \leq +\infty$). Ebben az esetben értelmezhetjük minden $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ esetén az ún. *Wasserstein*-metrikát, mint

$$W_p(\mu,\nu) := \min\left\{ \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |x-y|^p \,\mathrm{d}\,\gamma(x,y) : \gamma \in \Pi(\mu,\nu) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

W_p metrizálja a valószínűségi mértékek gyengye-$*$ topológiáját. A $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$ teret *Wasserstein-tér*nek nevezzük. Természetesen ezen terek megszerkeszthetőek, ha $(\mathbb{R}^d, |x-y|)$ helyett egy általános (X, d) metrikus teret tekintünk.

Az elmúlt 25–30 évben az optimális transzport elmélet óriási fejlődésen ment keresztül. Valójában Y. Brenier és R. J. McCann voltak azok, akik lefektették az elmélet mai arculatának alapjait. A következőkben ismertetjük Y. Brenier tételét az optimális transzport leképezések létezéséről és jellemzéséről.

3.1. TÉTEL. (Y. Brenier, 1987, [5]) *Legyenek $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Tekintsük továbbá a $c(x,y) := h(x-y)$ költségfüggvényt, ahol $h : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ egy szigorúan konvex függvény. Ekkor létezik egy optimáls $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ terv a* (KP) *problémában. Ha $\mu \ll \mathcal{L}^d$, akkor γ egyértelmű, létezik egy egyértelmű T optimális transzport leképezés az* (MP) *problémában és $\gamma = (\mathrm{id}, T)_{\#}\mu$. Továbbá, léteznek $\varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}$ optimális Kantorovich-pontenciálok a* (DP) *problémában és*

$$T(x) := x - (\nabla h)^{-1}(\nabla\varphi(x)).$$

Megjegyzés.

(i) A fenti tétel eredetileg a $c(x,y) = |x-y|^2$ költségfüggvényre volt megfogalmazva, de különösebb nehézség nélkül felírható minden

$$c(x,y) := h(x-y)$$

alakú függvényre a megadott feltételekkel (lásd [11]).

(ii) A tétel feltételei közül a $\mu \ll \mathcal{L}^d$ feltétel (μ abszolút folytonos a $d-$dimenziós Lebesgue-mértékre nézve) kicserélhető arra, hogy $\mu(A) = 0$ bármely $A \subseteq \Omega$, ahol A Hausdorff-dimenziója $(d-1)$ (lásd [11]).

(iii) Y. Brenier tételét megfogalmazhatjuk kompakt Riemann-sokaságok esetében is, ahol a költségfüggvény $c(x,y) = d^2(x,y)$, és d a sokaságon értelmezett Riemann-távolság. Ez az eredmény R. J. McCann nevéhez fűződik (lásd [24]).

3.2. Benamou–Brenier-formuláció és geodetikusok $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)-$ben

J.-D. Benamou és Y. Brenier egy új formulációt adtak az (MP) és (KP) optimális transzport problémáknak (lásd [4]). Ötletük a folyadékmechanikából ered. Pontosabban a folyadékmechanikában ismeretes ún. euleri modellek ihlették a kutatókat a következő probléma felírására. Adott $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ esetén tekintsük a következő problémát

$$\inf\left\{\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |v_t|^2 \,\mathrm{d}\rho_t(x)\mathrm{d}t : \partial_t\rho_t + \nabla\cdot(\rho_t v_t) = 0;\ \rho_0 = \mu,\ \rho_1 = \nu\right\}. \tag{BB}$$

A fenti problémában, az optimalizálás minden (ρ, v) időfüggő (a $[0,1]$ időintervallumon) mérték és vektormező páros szerint történik, amelyen gyenge megoldását képezik a felírt folytonossági egyenletnek a μ kezdeti és ν végső peremfeltételekkel.

Ismét konvex analízisbeli technikákat használva igazolhatjuk, hogy

$$W_2^2(\mu, \nu) = \min \text{(BB)},$$

ahol $W_2(\cdot, \cdot)$ a fentebb bevezetett Wasserstein-metrika.

A (BB) probléma megoldása során szerkesztünk egy optimális mértékgörbét $[0,1] \ni t \mapsto \rho_t \in \mathcal{P}(\Omega)$ és egy vektormezőt, amelyek megoldanak egy folytonossági egyenletet. A $t \mapsto \rho_t$ görbe összeköti a μ és ν mértékeket úgy, hogy közben kinetikus energiát, ún. *hatást (ang. action)* minimalizál. Ebből a szempontból a ρ_t görbét *geodetikus vonal*nak tekinthetjük a Wasserstein-térben. Természetesen a (BB) problémát megfogalmazhatjuk általánosan bármely W_p $(1 \leq p \leq +\infty)$ metrika esetén.

A geodetikus vonalakat másképpen is értelmezhetjük, R. J. McCann *interpolációja* segítségével. Tételezzük fel, hogy $\mu \ll \mathcal{L}^d$ és $\nu \ll \mathcal{L}^d$ (általános esetben a traszport leképezések helyett transzport tervekre kell térni), valamint tekintsük a kvadratikus esetet. Ekkor egyértelműen létezik egy optimális transzport leképezés T, megoldása az (MP) problémának. Értelmezzük minden $t \in [0,1]$ esetén a

$$T_t := (1-t)\mathrm{id} + tT$$

leképezést és a

$$\rho_t := (T_t)_\# \mu$$

görbét. Ez a görbe egy geodetikus vonalat eredményez, amely összeköti a μ és ν mértékeket, valamint a megfelelő v_t vektormezővel – amelyet megadhatunk a $v_t := (T - \mathrm{id}) \circ T_t^{-1}$ formulával – megoldása a (BB) problémának. Ezzel a szerkesztéssel R. J. McCann eredeti motivációja egy új konvexitási fogalom bevezetése volt. Ha funkcionálokat értelmezünk a Wasserstein-téren, és optimalizálási feladatokat szeretnénk megoldani ezen funkcionálok segítségével, jogosan fogalmazzuk meg a kérdést, hogy melyik lenne a legtermészetesebb konvexitási fogalom ezen keretek között. Erre a kérdésre a már említett [23] dolgozat adja a választ, amely ilyen geodetikusok mentén vett konvexitást értelmez, amit a szerző *elmozdulás konvexitás*nak (ang. *displacement convexity*) keresztel.

Ebben a szövegkörnyezetben megemlítjük F. Otto munkáját is (lásd [28]), aki elsők között fogalmazta meg a Wasserstein-terek ezen jellegű differenciálgeometriai vonzatait. Így a szakirodalom mai álláspontja szerint nyilvánvaló, hogy a valószínűségi mértékek Wasserstein-tere, $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$ ebből a szempontból egy végtelen dimenziós sokaságnak tekinthető, amelyet differenciális struktúrával láthatunk el. Ez a meglátás kaput nyitott a metrikus mértékterek egzotikus struktúráinak mélyebb megismeréséhez. Itt megemlítenénk idézés nélkül főként C. Villani, J. Lott, K.-T. Sturm, L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré és mások munkáit, amelyek robbanásszerűen kezdik feltárni ezt a 20 évvel ezelőtt még szinte ismeretlennek vélt világot. Manapság például (Ricci) görbület fogalommal tudunk ellátni metrikus mértéktereket és hőfolyamot tudunk értelmezni ugyanitt. És mindezt az optimális transzport elméletnek köszönhetően.

Az optimális transzport elmélet mélyreható naprakész eredményeit megtaláljuk a Fields-díjas C. Villani két monográfiájában (lásd [31, 32]), L. Ambrosio, N. Gigli és G. Savaré monográfiájában (lásd [3]), valamint a F. Santambrogio monográfiájában (lásd [30]).

4. MFG-rendszerek variációs megfogalmazása: kapcsolatok Benamou-Brenierrel

Ebben a fejezetben egy másik szempontból vizsgáljuk meg az MFG-rendszereket. Az eddig bemutatott optimális vezérlés alapú megfogalmazás, valamint a különböző PDE-technikák alkalmazása mellett az (MFG) típusú rendszerek hozzárendelhetők variációszámításhoz kapcsolódó problémákhoz.

Valóban, formálisan az (MFG) rendszer felfogható, mint a következő variációs probléma optimalitási feltétele:

$$\inf_{(m,w)\in\mathcal{K}_P}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\left\{m(t,x)L\left(x,-\frac{w(t,x)}{m(t,x)}\right)+F(x,m(t,x))\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}^d}g(x)m(T,x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

ahol

$$\mathcal{K}_P:=\left\{(m,w)\in X_P\times Y_P:\partial_t m-\nu\Delta m+\operatorname{div}(w)=0,\ m(0,x)=m_0\right\},$$

és $F(x,m):=\displaystyle\int_0^m f(x,s)\,\mathrm{d}s$, valamint $m_0\in L^\infty(\mathbb{T}^d)$, amely teljesíti az $m_0\geq 0$ és $\displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} m_0\,\mathrm{d}x=1$ feltételeket. A fenti problémában felírt funkcionál valójában az (MFG) rendszer energiafunkcionáljának tekinthető.

Itt az X_P és Y_P terek függvénytereket jelölnek, amelyek természetesen függenek az L Lagrange-függvény és az F növekedésétől. A $\mathcal{K}_P$ halmaz definiciójában vett Fokker–Planck-egyenletet a megfelő gyenge értelemben terkintjük. A későbbiekben részletezzük ezen terek tulajdonságait, valamint további részletek megtalálhatóak a [7] és a [8] dolgozatokban.

A fenti probléma a Fokker–Planck-egyenlet egy optimális vezérlési feladatának tekinthető. A figyelmes olvasó ezen probléma olvasása során felismerheti a kapcsolatot az imént említett Benamou–Brenier-formulával (lásd (BB)). Valóban, $\nu=0$ és $f\equiv 0$ esetén, valamint $L(x,p)=H(x,p)=|p|^2$ megválasztásával majdnem a (BB) problémához jutunk. Pontosabban, ahhoz, hogy az így megfogalmazott problémának értelme legyen, egy végső sűrűséget ($m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$) is meg kellene adni. Ebben az esetben a rendszer egyenletei (mivel nincsen kapcsolat a kettő között) külön-külön is megoldhatóak.

Látható, hogy az előző szemléltetés teljes mértékben formális. Először is, egyáltalán nem világos, hogy a fenti problémának létezik-e megoldása (ez természetesen kapcsolatban van az $X_P \times Y_P$ tér megválasztásával). Másodszor, ha igazolni is tudjuk a létezést, utána sem világos a optimalitási feltételek származtatása. Gyakorlatilag, szükségünk lenne a fenti funkcionál Gâteaux-szubdifferenciáljának a felírására. Ez viszonylag nehézkes kérdésnek bizonyul. Időfüggetlen problémák és viszonylag reguláris mértékek esetén, hasonló funkcionál szubdifferenciáljának jellemzése megtalálható a [26] dolgozatban.

Az optimalitási feltételek levezetése és a létezés igazolása érdekében bevezetjük a (2) probléma duálisát (konvex analízis értelemben). Tekintsük a következő problémát:

$$\inf_{(u,\alpha)\in\mathcal{K}_D} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} F^*(x,\alpha(t,x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{T}^d} u(0,x)m_0(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

ahol

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_D := \{(u,\alpha) \in X_D \times Y_D : -\partial_t u(t,x) - \nu\Delta u(t,x) + H(x,\nabla u(t,x)) = \alpha(t,x)\,,\\ u(T,x) = g(x)\}\,,\end{aligned}$$

és az F^* az F függvény második változója szerint vett Legendre–Fenchel-transzformáltja. Ez a probléma a viszkózus Hamilton–Jacobi–Bellman-egyenlet optimális vezérlési feladatának tekinthető.

Innen is látszik, hogy az MFG-rendszerekben szereplő HJB-, valamint FP-egyenletek valójában egymás duálisai. A közelmúltban főként P. Cardaliaguet és munkatársai nagy mértékben tanulmányoztak hasonló típusú problémákat (lást [7, 8, 9]). Így elmondhatjuk, hogy ebben a kontextusban valamelyest sikerült az MFG-rendszerek gyenge megoldásainak vizsgálata, mélyebb megértése. A következőkben szemléltetjük P. Cardaliaguet és P. J. Graber gyenge megoldásait.

4.1. P. Cardaliaguet és P. J. Graber gyenge megoldásai

P. Cardaliaguet és P. J. Graber többnyire elsőrendű rendszereket tanulmányoztak, de a gondolatmenet működik általánosabb, másodrendű rendszerek esetén is (lást [9]). Ezért a továbbiakban mi is elsőrendű rendszereket tekintünk, vagyis $\nu = 0$ (a bemutatott eredmények megtalálhatók a [7, 8] dolgozatokban).

Tekintsük a következő feltételeket:

1. (Feltételek a kezdeti és végső adatokra.) Legyen m_0 egy folytonos valószínűségi mérték $\mathbb{T}^d$–n, amely abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, és $m_0 > 0$. Továbbá legyen $g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos.

2. (Feltételek a Hamilton-i függvényre.) Legyen $H : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ folytonos mindkét változóban, konvex és differenciálható a második változóban, és $\nabla_p H$ folytonos mindkét változóban. Továbbá H növekedése szuperlineáris a gradiens változóban: létezik $r > 1$ és $C > 0$ úh.

$$\frac{1}{rC}|p|^r - C \leq H(x,p) \leq \frac{C}{r}|p|^r + C, \tag{4}$$

$H^*(x,\cdot)$ az előbbi feltételek miatt teljesíti a

$$\frac{1}{r'C}|q|^{r'} - C \leq H^*(x,q) \leq \frac{C}{r'}|q|^{r'} + C \tag{5}$$

feltételt, ahol r' az r konjugáltja, vagyis $1/r + 1/r' = 1$.

3. (Feltételek a kapcsolatot teremtő függvényre.) Legyen f folytonos $\mathbb{T}^d \times (0,+\infty)$−n, szigorúan növekvő a második változóban, és $f(x,0) = 0$. Továbbá teljesüljön a következő növekedési feltétel: létezik $C > 0$ és $q > 1$ úh.

$$\frac{1}{C}|m|^{q-1} - C \leq f(x,m) \leq C|m|^{q-1} + C, \ \forall m \geq 1, \tag{6}$$

ahol a kapcsolatot az r és a q között az $r > \max\{d(q-1), 1\}$ feltétel képezi. Hasonló növekedési feltétel fogalmazható meg az F függvényre is:

$$\frac{1}{C}|m|^q - C \leq F(x,m) \leq C|m|^q + C, \ \forall m \geq 1. \tag{7}$$

A fenti feltételek mellett P. Cardaliaguet főbb eredményei a következők: legyen

$$X_P \times Y_P := L^1((0,T) \times \mathbb{T}^d) \times L^1((0,T) \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d).$$

Legyen $\mathcal{K}_D$ azon $(u,\alpha) \in BV((0,T)\times\mathbb{T}^d)\times L^1((0,T)\times\mathbb{T}^d)$ párok halmaza, amelyre $\nabla u \in L^r((0,T) \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)$, $u(T,\cdot) \leq g$ trace értelemben, $\alpha_+ \in L^p((0,T) \times \mathbb{T}^d)$ $(p = q^*)$, $u \in L^\infty((t,T) \times \mathbb{T}^d)$ minden $t \in (0,T)$ esetén és

$$-\partial_t u + H(x, \nabla u) \leq \alpha,$$

disztribúció értelemben.

Ekkor a (2) problémának van megoldása a $\mathcal{K}_P$ halmazon, valamint a (3) problémának van megoldása a $\mathcal{K}_D$ halmazon, és a dualitás teljesül. Pontosabban

$$\min_{\mathcal{K}_P}(2) = -\min_{\mathcal{K}_D}(3).$$

A dualitásból könnyen levezethetők az optimalitási feltételek, amelyek a következő MFG-rendszert eredményezik.

4.1. Definíció. (MFG-rendszer gyenge megoldásai) Az

$$(u, m) \in BV((0,T) \times \mathbb{T}^d) \times L^q((0,T) \times \mathbb{T}^d)$$

az (MFG) rendszer gyenge megoldása, ha

1. $\nabla u \in L^r((0,T)\times\mathbb{T}^d)$ és $mf(x,m)$, $mH^*(x, -\nabla_p H(x, \nabla u))$ és $m\nabla_p H(x, \nabla u)$ integrálhatóak;
2. u teljesíti az elsőrendű HJ-egyenlőtlenséget

$$-\partial_t u + H(x, \nabla u) \leq f(x, m)$$

disztribúció értelemben, az $u(t, \cdot) \leq g$ peremfeltétel teljesül trace értelemben, valamint teljesül a következő egyenlőség

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} m(t,x)\{H(x, \nabla u(t,x)) &- \nabla u(t,x) \cdot \nabla_p H(x, \nabla u(t,x)) \\ &- f(x, m(t,x))\}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \{g(x)m(T,x) - u(0,x)m_0(x)\}\, \mathrm{d}x;\end{aligned}$$

3. m megoldása a folytonossági egyenletnek

$$\partial_t m - \operatorname{div}(m\nabla_p H(x, \nabla u)) = 0, \quad ((0,T) \times \mathbb{T}^d) - \text{ben}, \quad m(0, \cdot) = m_0$$

disztribúció értelemben.

A fenti értelmezésből könnyen levezethető a HJ-egyenlet következő felírása:

$$(-\partial_t u)^{\mathrm{ac}} + H(x, \nabla u(t,x)) = f(x, m(t,x))$$

$m-$majdnem mindenhol $((0,T)\times\mathbb{T}^d)-$ban, ahol $(-\partial_t u)^{\mathrm{ac}}$ a $-\partial_t u$ mérték Lebesgue-mérték szerinti abszolút folytonos részét jelöli. A [8] fő eredménye a következő tétel:

4.1. Tétel. (Létezés és parciális unicitás)

(i) *Legyen $(m, w) \in \mathcal{K}_P$ egy minimizáló a (2) problémában és $(u, \alpha) \in \mathcal{K}_D$ minimizáló a (3) problémában. Ekkor (u, m) az MFG-rendszer gyenge megoldása a 4.1 értelmezés értelmében. Továbbá $\alpha(t,x) = f(x, m(t,x))$ majdnem mindenhol.*

(ii) *Fordítva, ha (u, m) gyenge megoldása az MFG-rendszernek, akkor létezik w, α úh. $(m, w) \in \mathcal{K}_P$ minimalizáló a (2) problémában, és $(u, \alpha) \in \mathcal{K}_D$ minimalizáló a (3) problémában.*

(iii) Ha (u_1, m_1) és (u_2, m_2) két gyenge megoldása az MFG-rendszernek, akkor $m_1 = m_2$ majdnem mindenhol, és $u_1 = u_2$ majdnem mindenhol az $\{m_1 > 0\}$ halmazon.

Látható, hogy a fenti tétel segítségével meg tudjuk alapozni a lokális kapcsolattal ellátott rendszerek (gyenge értelemben vett, de alapos) származtatását. Továbbá megjegyezzük azt is, hogy az ilyen értelemben vett gyenge megoldások globális regularitása (ami szükséges lenne ahhoz, hogy következtessünk arra, hogy ezek a megoldások valójában klasszikus megoldások) egyelőre nyílt kérdésnek bizonyul ebben a témakörben.

5. Köszönetnyilvánítás

A kutatatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Hivatkozások

[1] Achdou, Y., Capuzzo Dolcetta, I.: *Mean field games: Numerical methods*, SIAM J. of Num. Anal., Vol. **48** (2010), No. **3**, 1136–1162.

[2] Achdou, Y., Camilli, F., Capuzzo Dolcetta, I.: *Mean field games: numerical methods for the planning problems*, SIAM J. of Control and Optimization, Vol. **50** (2012), No. **1**, 77–109.

[3] Ambrosio, L., Gigli, N., Savaré, G.: *Gradient flows in metric spaces and in the spaces of probability measures*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, (2008).

[4] Benamou, J.-D., Brenier Y.: *A computational fluod mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numer. Math., Vol. **84** (2000), 375–393.

[5] Brenier, Y.: *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., Vol. **305** (1987), No. **19**, 805–808.

[6] Cardaliaguet, P.: *Notes on Mean Field Games (from P.-L. Lions' lectures at Collège de France), http://www.ceremade.dauphine.fr/ cardalia/MFG100629.pdf.*

[7] Cardaliaguet, P.: *Weak solutions for first order mean field games with local coupling*, Analysis and geometry in control theory and its applications, 111–158, Springer INdAM Ser., Vol. **11**, Springer, Cham, (2015).

[8] Cardaliaguet, P., Graber, P. J.: *Mean field games systems of first order*, ESAIM: COCV, Vol **21** (2015), No. **3**, 690–722.

[9] Cardaliaguet, P., Graber, P. J., Porretta, A., Tonon, D.: *Second order mean field games with degenerate diffusion and local coupling*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. **22** (2015), No. **5** , 1287–1317.

[10] Carlini, E., Silva, F. J.: *A fully discrete semi-Lagrangian scheme for a first order mean field game problem*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. **52** (2014), No. **1**, 45–67.

[11] Gangbo, W., McCann, R. J.: *The geometry of optimal transportation*, Acta Math., Vol. **17**, No. **2** (1996), 113–161.

[12] Gomes, D. A., Pimentel, E. A., Sánchez-Morgado, H.: *Time-dependent mean-field games in the subquadratic case*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. **40** (2015), No. **1**, 40–76.

[13] Guéant, O., Lions, P.-L., Lasry, J.-M.: *Mean Field Games and Applications*, Paris-Princeton Lectures on Mathamtical Finance 2010. Tankov, Peter; Lions, Pierre-Louis; Laurent, Jean-Paul; Lasry, Jean-Michel; Jeanblanc, Monique; Hobson, David; Guéant, Olivier; Crépy, Stéphane; Cousin, Areski. Springer, Berlin (2011), 205–266.

[14] Huang, M., Caines, P. E., Malhamé, R. P.: *Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle*, Comm. Inform. Systems, Vol. **6** (2006, No. **3**), 221–252.

[15] Kantorovich, L.: *On the transfer of masses*, Dokl. Acad. Nauk. USSR, Vol. **37** (1942), 7–8.

[16] Lachapelle, A., Salomon, J., Turinici, G.: *Computation of mean field equilibria in economics*, Math. Models and Meth. in Appl. Sci., Vol. **20 (2010)**, No. **4**, 567–588.

[17] Lasry, J.-M., Lions, P.-L.: *Jeux à champ moyen I. Le cas stationnaire*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Vol. **343** (2006), No. **9**, 619–625.

[18] Lasry, J.-M., Lions, P.-L.: *Jeux à champ moyen II. Horizon fini et contrôle optimal*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Vol. **343** (2006), No. **10**, 679–684.

[19] Lasry, J.-M., Lions, P.-L.: *Mean field games*, Jpn. J. Math., Vol. **2** (2007), No. **1**, 229–260.

[20] Lions, P.-L.: *Cours au Collège de France*, www.college-de-france.fr.

[21] Maury, B., Roudneff-Chupin, A., Santambrogio, F.: *A macroscopic crowd motion model of gradient flow type*, Mat. Mod. Meth. Appl. Sci., Vol. **20** (2010), No. **10**, 1787–1821.

[22] Maury, B., Roudneff-Chupin, A., Santambrogio, F., Venel, J.: *Handling congestion in crowd motion modeling*, Net. Het. Media, vol. **6** (2011), No. **3**, 485–519, Special issue on Crowd Dynamics: Results and Perspectives.

[23] McCann, R. J.: *A convexity principle for interacting gases*, Adv. Math., Vol. **128** (1997), No. **1**, 153–159.

[24] McCann, R. J.: *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*, Geom. Funct. Anal., Vol. **11** (2001), 589–608.

[25] Mészáros, A. R.: *Mean field games with density constraints*, MSc thesis, École Polytechnique, Palaiseau, France, (2012).

[26] Mészáros, A. R., Silva, F. J.: *A variational approach for second order mean field games with density constraints: the stationary case*, J. Math. Pures Appl., Vol. **104** (2015), Issue **6**, 1135–1159.

[27] Monge, G.: *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, (1781), 666–704.

[28] Otto, F.: *The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation*, Comm. PDEs, Vol. **26**:1-2 (2001), 101–174.

[29] Santambrgio, F.: *A modest proposal for MFG with density constraints*, Netw. Heterog. Media, Vol. **7** (2012), No. **2**, 337–347.

[30] Santambrogio, F.: *Optimal Transport for Applied Mathematicians - Calculus of variations, PDEs and Modeling*, Birkhäuser, (2015).

[31] Villani, C.: *Topics in Optimal Transportation*, Grad. Stud. Math., Vol. **58**, AMS, Providence, (2003).

[32] Villani, C.: *Optimal Transport: Old and New*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. **338**, (2009).

(Beérkezett: 2015. február 12.)

MÉSZÁROS ALPÁR RICHÁRD
Department of Mathematics, University of California
520 Portola Plaza, 90095 Los Angeles, USA
Edutus Főiskola
Stúdium tér 1, Tatabánya, 2800, Magyarország
alpar@math.ucla.edu

MEAN FIELD GAMES: FROM OPTIMAL CONTROL TO OPTIMAL TRANSPORT

Alpár Richárd Mészáros

With the present paper we provide a short survey to the recently introduced theory of Mean Field Games. After the optimal control formulation of these systems and the analysis of Nash-type equilibria notions, we use the modern theory of optimal transportation to describe some Mean Field Games via a variational characterization. With the help of the so-called Benamou-Brenier formulation of the optimal transportation problem we study the existence and unicity of weak solutions of some Mean Field Game systems with local couplings.