Alkalmazott Matematikai Lapok **33** (2016), 75–91

MATEMATIKAI KÖZGAZDASÁGTANRÓL MATEMATIKUSOKNAK

SIMONOVITS ANDRÁS

Kulcsszavak: matematikai közgazdaságtan, optimalizálás, egyensúly, dinamika, kormányzati beavatkozás.

Köszönetnyilvánítás: Hálásan köszönöm Freud Róbert és Lázár Eszter értékes megjegyzéseit.

1. Bevezetés

Gondtalan gyermekkorát maga után hagyva minden ember *gyakorlati* közgazdász lesz. Rövid távon: adott árak és jövedelem mellett, hajlamait és ízlését követve eldönti, hogy a különféle termékek (és szolgáltatások) között hogyan osztja el a jövedelmét. Hosszabb távon: úgy választ foglalkozást, hogy képességeinek megfelelő jövedelmet érjen el, és úgy vesz föl hitelt, illetve úgy takarékoskodik, hogy élete minél kellemesebben teljen.

Ebben a cikkben viszont az *elméleti* közgazdaságtant, azon belül is a matematikai módszert mutatjuk be érdeklődő matematikusoknak. Modellek segítségével megpróbáljuk megmagyarázni, néha előrejelezni, hogy miért így dönt az egyén. Sőt, az egyénről az egész társadalomra kiterjesztve a modelleket, elemezzük a kialakuló piaci árakat és jövedelmeket. A politikusok tanácsadójává szegődve még azt is vizsgálhatjuk, hogyan érdemes a kormányzatnak az adók és transzferek révén a jövedelemek eloszlását módosítaniuk. Megjegyezzük, hogy a kvantitatív közgazdaságtannak létezik egy másik válfaja: az *ökonometria*, amely a matematikai statisztika megfelelően módosított eszközeivel próbálja meg feltárni a közgazdaságtanban érvényesülő statisztikai szabályosságokat. Ez utóbbival nem foglalkozunk.

A matematika hasonló szerepet játszik a közgazdaságtanban, mint a természettudományokban: nyelv. Csupán a modellezett jelenségekről szóló ismeretek bizonytalanabbak, és a beavatkozási célok és eszközök erkölcsi tartalma kétségesebb itt, mint ott.

A cikk szerkezete a következő: a 2. szakasz az egyéni döntések elméletét ismerteti, statikus és dinamikus nézőpontból. A 3. szakasz a többszereplős döntések egyensúlyát vázolja: először statikus, majd dinamikus változatban, megkülönböztetve a sok és a kevésszereplős eseteket. A 4. szakasz a kormányzati beavatkozás legegyszerűbb modelljeit vázolja. Az 5. szakasz vázolja a történetet, míg a 6. szakasz megpróbál néhány következtetést levonni. Rövid hivatkozásjegyzék zárja a cikket.

Szándékosan a történeti összefoglalásra halasztottam az irodalmi hivatkozásokat, és nagyon megtartóztattam magam a hivatkozásokban, mert nem hiszem, hogy az átlagolvasó cikkem elolvasása után megveszi a többszáz-oldalas könyveket, hogy részletesebben is tájékozódjon a kérdéskörről.

2. Egyéni fogyasztási döntések

Ebben a szakaszban először az egyéni fogyasztási döntések statikus, majd dinamikus modelljét mutatjuk be.

2.1. Statikus megközelítés

Statikus modellünkben egyetlenegy fogyasztó egyetlen időszaki vásárlási döntéseit vizsgáljuk. Legegyszerűbb esetben a fogyasztó jövedelme az $m > 0$ valós szám; az n természetes szám adja a vásárolható termékek számát, és $i = 1, 2, \dots, n$ az egyes termékek indexét. Legyen x_i az i-edik termékből vásárolt mennyiség és $p_i > 0$ az egységár (mindketten valós számok). Első közelítésben feltehetjük, hogy a fogyasztó minden jövedelmét elkölti:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m. \tag{1}$$

Vektoriális írásmóddal:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{és} \qquad p = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

valamint

$$p \cdot x = m. \tag{1'}$$

Itt lép fel az első kérdés: hogyan ossza el a fogyasztó a jövedelmét az egyes termékek között? Egy köznapi fogyasztó nagyon egyszerű választ ad erre a kérdésre: legyen (α_i) egy n-elemű valós sorozat, elemeinek összege 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \tag{2}$$

Jövedelme α_i részét költi az i-edik termékre:

$$x_i = \frac{m\alpha_i}{p_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

Ha a súlyok értelmesen vannak megválasztva, és a jövedelemhez képest az árak is reálisak, akkor ez a szabály alkalmas a fogyasztói döntés leírására. Mutatja, hogy az egyes termék fogyasztása a jövedelemnek növekvő, az árnak viszont csökkenő függvénye. Azt is tükrözi, hogy az ízlésnek szerepe van a fogyasztási döntésben: rögzített jövedelem és árak mellett egyesek többet esznek, mások többet isznak, megint mások többet utaznak. Természetesen ez a leírás nem tükrözi a *keresztárhatást*: ha az alma ára emelkedik, akkor a narancs fogyasztása nő.

A főáramú közgazdaságtan a fogyasztó statikus döntését optimalizálásra vezeti vissza. Az optimalizálandó függvényt *hasznosságfüggvénynek* nevezik, amelyről csak annyit tesznek föl, hogy a fogyasztási vektor skalárértékű, folytonosan differenciálható, szigorúan növekvő és szigorúan konkáv függvénye, jele $U(x)$. A szigorú konkavitásnál csak egyetlen belső maximum létezik. Feltesszük, hogy

$$U(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = -\infty, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Ezt az U függvényt kell az (1) korlát mellett feltételesen maximalizálni.

A Lagrange-féle módszer segítségével a következő szükséges (és elégséges) feltételt kapjuk a belső optimumra. Legyen $\lambda \neq 0$ egy valós szám, és legyen $L(x) = U(x) - \lambda p \cdot x$.

2.1. Tétel. *Az (1) feltétel mellett az* $U(x) \to \max$ *feladat* x^* *megoldása kielégíti a következő egyenletrendszert:*

$$U_i'(x^*) = \lambda p_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

Bizonyítás. $L_x'(x^*) = 0.$ □

2.1. Példa. A közgazdaságtanban nagyon elterjedt a logaritmikus hasznosságfüggvény:

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log x_i,$$

ahol teljesül (2). (4) segítségével könnyen belátható, hogy az optimális arányokat éppen (3) adja, és $\lambda = 1/m$.

A hasznosságfüggvény azért népszerű a közgazdaságtanban, mert az egyéni döntések kaotikus világába rendet visz. Ugyanakkor kétséges, hogy az egyének képesek-e ilyen bonyolult feladatokat megoldani (az én III. éves matematikus hallgatóim többsége képtelen erre). Még inkább problematikus az elméleti eredmények gyakorlati megvalósítása: a szándékoltnál többet eszünk, és kevesebbet kirándulunk.

2.2. Dinamikus megközelítés

Eddig statikusan vizsgálódtunk, most rátérünk a dinamikus vizsgálatra. Maximális egyszerűségre törekedve, most csak a összes fogyasztás időbeli alakulását vizsgáljuk. Diszkrét időben vizsgálódunk, ahol az időszakok (hónap, év stb.) száma $T > 1$ természetes szám, indexük $t = 1, 2, \ldots, T$. Eltekintünk az inflációtól, és feltesszük, hogy fogyasztónk t-edik időszaki jövedelme m_t, és fogyasztása c_t. Eltekintünk attól a különbségtől, amely megtakarításunk és hitelünk után fizetett kamatláb között létezik. Időben is egységesnek tekintjük és R-rel jelöljük a kamattényezőt (=1+kamatláb). Feltéve, hogy a dolgozó előre ismeri a jövedelmi pályáját, nem kap és nem hagy örökséget, egyetlen egyenletbe tömöríthetjük költségvetését. Ehhez a jövedelem és a fogyasztás ún. *jelenértékére* van szükség:

$$\mathrm{PV}[m] = \sum_{t=1}^{T} m_t R^{-t} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{PV}[c] = \sum_{t=1}^{T} c_t R^{-t}. \tag{5}$$

Figyeljük meg, hogy az első kifejezés – (m_t) Laplace-transzformáltja – az a jövedelem, amelyet ha életpályánk elején egy összegben elhelyeznénk a bankunkban, és T db számlára tennénk, akkor a t-edik időszak végére a t-edik számlán éppen $m_t R^{-t} R^t = m_t$ friss jövedelem állna a rendelkezésünkre. Hasonlóan, a második kifejezés t-edik tagja éppen $c_t R^{-t} R^t = c_t$, s ez a nevezett időszak fogyasztási költsége. Egyensúlyi feltételünk szerint a két jelenérték azonos:

$$\mathrm{PV}[m] = \mathrm{PV}[c]. \tag{6}$$

A variációszámításhoz hasonlóan a fogyasztás dinamikus elméletében a hasznosságfüggvényt időben additívnak feltételezik:

$$U(c_1, \ldots, c_T) = \sum_{t=1}^{T} u_t(c_t),$$

ahol $u_t(\cdot)$ egy szigorúan növekvő és szigorúan konkáv függvény. További egyszerűsítésként feltételezik, hogy a t-edik időszaki hasznosság csupán abban különbözik az 1. időszakétól, hogy a jelenértékhez hasonlóan leszámítolják az ún. *leszámítolási tényezővel*, jele $\delta \in (0, 1]$:

$$U(c_1, \ldots, c_T) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t u(c_t), \tag{7}$$

ahol $u(\cdot)$ egy szigorúan növekvő és szigorúan konkáv függvény: $u(0) = -\infty$. Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy valamilyen okból a diszkrét idejű modellekben a közgazdászok elfelejtették negatív előjellel ellátni a t kitevőt, ennél fogva minél közelebb van az 1-hez a leszámítolási együttható, annál kevésbé számítol le a fogyasztó.

Előkészítésünk végére érve kimondhatjuk a következő tételt:

2.2. Tétel. *A (7) hasznosságfüggvényt az (5)–(6) egyensúlyi feltétel mellett maximalizáló (c_t^*) fogyasztási pálya kielégíti az ún. Euler-egyenletet:*

$$u'(c_t^*) = \delta R u'(c_{t+1}^*), \qquad t = 1, 2, \ldots T - 1. \tag{8}$$

Megjegyzés. Az Euler-jelző a folytonos idejű variációszámítás Euler–Lagrange-egyenletének első szerzőjére utal.

Bizonyítás. Az 1. tétel gondolatmenetét alkalmazva a Lagrange-függvény

$$L(c_1, \ldots, c_T) = \sum_{t=1}^{T} [\delta^t u(c_t) - \lambda c_t R^{-t}]$$

és a stacionaritási feltétel

$$0 = L_i'(c_1, \ldots, c_T) = \delta^t u'(c_t) - \lambda R^{-t}, \qquad t = 1, 2, \ldots T.$$

Átrendezve: $\delta^t R^t u'(c_t) = \lambda$ és összehasonlítva a $t+1$-edik időszak hasonló feltételével adódik (8): $\lambda = u'(c_0)$. □

A (8) feltétel eléggé nehézkesnek látszik. Az azonban kiolvasható belőle, hogy a δR szorzat értéke kulcsszerepet játszik a fogyasztási pálya alakulásában.

2.1. Következmény. *Ha $\delta R = 1$, akkor a fogyasztás időben állandó: $c_t \equiv c_1$; ha $\delta R > 1$, akkor a fogyasztás időben nő: $c_{t+1} > c_t$; s végül ha $\delta R < 1$, akkor a fogyasztás időben csökken: $c_{t+1} < c_t$.*

Megkönnyíti a 2.2. tétel megértését, ha megint a logaritmikus hasznosságfüggvényen szemléltetjük állításunkat.

2.2. Példa. Legyen az időszaki hasznosságfüggvény $u(x) = \log x$. Ekkor a (8) feltétel explicitté válik: $1/c_t = \delta R/c_{t+1}$, azaz $c_{t+1} = \delta R c_t$, azaz $c_t = (\delta R)^{t-1} c_1$. Visszahelyettesítve az (5)–(6) korlátba:

$$\mathrm{PV}[m] = \sum_{t=1}^{T} R^{-t} (\delta R)^{t-1} c_1 = \frac{1 - \delta^T}{(1-\delta)R} c_1, \qquad \text{ha} \qquad \delta \neq 1,$$

ahonnan az optimális fogyasztási pálya

$$c_1^* = \mathrm{PV}[m] \frac{(1-\delta)R}{1-\delta^T} \qquad \text{és} \qquad c_t^* = (\delta R)^{t-1} c_1^*, \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Ezt a gondolatmenetet gyakran alkalmazzák a nyugdíjmodellezésben. Például a leszámítolási együttható kicsiny értékével indokolják a kötelező nyugdíjrendszer bevezetését, illetve a kamattényező nagy értékével magyarázzák a magánnyugdíjrendszer fölényét a tb-nyugdíjrendszerrel szemben. A dolog nem ilyen egyszerű: a valóságban a fogyasztó csak rövid távon rövidlátó, a $3., \ldots, T$-edik időszakra már nem diszkontál. Csak az a gond, hogy 1 időszak elteltével a holnapból ma lesz, és újra kezdődik a leszámítolás. Hasonló gondot okoz, hogy az elméleti modellekben gyakran szereplő 10 százalék körüli reál-kamatlábak (R =1,1) csak alkotóik fejében léteznek. Végül nem igaz, hogy ugyanannyi kamatot fizet a fogyasztó 1 forintnyi tartozásáért, mint 1 forintnyi betétéért.

3. Egyensúly

Eddig egyetlen fogyasztóval számoltunk, márpedig a valóságban több fogyasztó (és a cikkben általában elhanyagolt termelő) lép kölcsönhatásba a piacon. Három esetet vizsgálunk ebben a szakaszban: a piaci egyensúly statikus modelljét, az együttélő nemzedékek dinamikus modelljét és a stratégiai gondolkodást is figyelembe vévő nem kooperatív játékelmélet Nash-egyensúlyát.

3.1. Piaci egyensúly

Visszatérünk a 2.1. szakasz statikus modelljéhez, de egy helyett r fogyasztóval, indexük $h = 1, \dots, r$. Föltesszük, hogy olyan sokan vannak, és egyenként olyan kicsi a súlyuk, hogy egyéni döntéseik nem hatnak a piac állapotára. Röviden megismételjük és általánosítjuk az ottani definíciókat és fogalmakat, majd újabbakat vezetünk be.

A h-adik fogyasztó jövedelme $m_h > 0$ valós szám, a továbbiakban is az n természetes szám adja a vásárolható termékek számát, és $i = 1, 2, \dots, n$ az egyes termékek indexét. Legyen $x_{i,h}$ az i-edik termékből a h-adik fogyasztó által vásárolt mennyiség és $p_i > 0$ az egységár (mindketten valós számok). Ismét feltesszük, hogy a h-adik háztartás minden jövedelmét elkölti:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_{i,h} = m_h, \qquad h = 1, \dots, r.$$

Vektoriális írásmóddal:

$$x^h = (x_{1,h}, x_{2,h}, \dots, x_{n,h}) \qquad \text{és} \qquad p \cdot x^h = m_h.$$

Feleslegesnek tartjuk a 2.1. pont optimumszámításának megismétlését, helyette bevezetjük a *cseregazdaságot*, amelyben nem termelnek, csak cserélnek. Feltesszük, hogy kezdetben a h-adik dolgozó *vagyona* $a^h = (a_{1,h}, \dots, a_{n,h})$ pozitív elemű vektor és a dolgozó csere útján x^h fogyasztásra törekszik. Termelés híján a cseregazdaságban teljesülnek a következő mérlegegyenletek: minden termékből az összvagyon = összfogyasztás, azaz

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{x}_i, \qquad i = 1, \dots, n; \tag{9}$$

ahol

$$\mathbf{a}_i = \sum_{h=1}^{r} a_{i,h}, \qquad \text{és} \qquad \mathbf{x}_i = \sum_{h=1}^{r} x_{i,h} \qquad i = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Pontosabban: megengedjük, hogy az egyes termékekből a vagyon nagyobb legyen, mint a fogyasztás, de azoknak a terméknek az ára 0 kell hogy legyen. Képletben:

$$\mathbf{a}_i \geq \mathbf{x}_i, \qquad i = 1, \dots, n; \tag{9'}$$

és

$$\text{ha} \qquad \mathbf{a}_i > \mathbf{x}_i, \qquad \text{akkor} \qquad p_i = 0. \tag{9''}$$

Kérdés: van-e olyan $n \times r$-dimenziós $X = (x_{i,h})$ fogyasztásmátrix, amely minden háztartásnak optimális, és teljesíti a (9)–(10) mérlegegyenleteket? A válaszhoz egyelőre eltekintünk a mérlegegyenletektől, és változónak tekintve a korábban adottnak vett p árvektort, bevezetjük az egyes termékekre vonatkozó *piaci túlkeresleti függvényt*; $\mathbf{z}_i(p)$, amely az összfogyasztási tervek és az összvagyon különbsége:

$$\mathbf{z}_i(p) = \mathbf{x}_i(p) - \mathbf{a}_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Vegyük észre, hogy most a jövedelmeket is az árvektor definiálja: $m_h = p \cdot a^h(p)$. Ezek segítségével felírhatjuk az egyéni túlkeresleti függvényeket is: $z^h(p) = x^h(p) - a^h(p)$. Érdekes, hogy ekkor az (1) egyenlet helyére a

$$p \cdot z^h(p) = 0, \qquad h = 1, \dots, r \tag{11}$$

lép.

Ha bármilyen pozitív μ skalárral beszorozzuk az árakat, akkor a jövedelmek is ugyanezzel a skalárral szorzódnak meg, tehát az egyensúly szempontjából az árszint közömbös. A későbbiek miatt célszerű lesz alkalmasan normálni az árvektort: az árak összegét vesszük 1-nek: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, azaz az árvektor egy n-dimenziós szimplex. (Másik alternatíva: az utolsó összetevőt vesszük 1-nek: $p_n = 1$, de nem élünk ezzel.)

Egyensúlynak nevezünk egy olyan $(p^*, X(p^*))$ hipermátrixot, amelyre (9)–(11) egyszerre teljesül, továbbá $\mathbf{z}_i(p) = 0$.

3.1. Tétel. *Ha a $z(p)$ piaci túlkereslet–ár-függvény folytonos, akkor létezik legalább egy egyensúlyi p^* árvektor és hozzátartozó $X(p^*)$ fogyasztási mátrix.*

Bizonyítás. A bizonyítás alapgondolata egyszerű: az árvektorok n-dimenziós szimplexét folytonos függvénnyel leképezzük e szimplexbe, s ekkor a nevezetes Brouwer-féle fixponttétel (1911) értelmében létezik legalább egy fixpont. Csak azt kell belátni, hogy e fixpont éppen az egyensúlyi ár. Szükségünk lesz egy vektor pozitív részének a jelölésére: $z_+ = (z_{1+}, \dots, z_{n+})$.

Lássuk a vázolt leképezést:

$$p' = T(p) = \frac{p + z_+(p)}{[p + z_+(p)]\mathbf{1}}, \text{ ahol } \mathbf{1} = (1, \dots, 1).$$

Könnyű belátni, hogy a $T(p)$ leképezés a n-dimenziós szimplexet ugyanabba a szimplexbe folytonosan képzi le, létezik tehát egy fixpont, pl. p^*.

Legyen $I(p)$ azon indexek halmaza, amelyre a piaci túlkereslet pozitív: $z_i > 0$, ha $i \in I(p)$. Ha ez nem üres halmaz, akkor a $T(p)$ leképezés emeli ezen termékek árát, és csökkenti a többiét. A piaci egyensúlyban nincsenek ilyen termékek: $I(p^*)$

üres halmaz, és a konstrukció miatt a p^* egyensúlyi árvektor T fixpontja. De a megfordítás is igaz: ha van fixpont, akkor az egyensúlyi árvektor. Valóban: jelölje a $T(p)$ nevezőjét λ, ekkor a fixpont-egyenletet rendezve:

$$\lambda p_i^* = p_i + z_{i+}(p^*), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Beszorozva mindkét oldalt p_i^*-gal, összeadva a kapott egyenleteket, és felhasználva, hogy az egyéni költségvetési korlátok miatt $p^* z^*(p^*) = 0$, adódik $\lambda p^{*2} = p^{*2}$, azaz $\lambda = 1$. Visszahelyettesítve a fixpont-egyenletbe: $z_{i+}(p^*) = 0$. □

A tételt lefordítva a hétköznapok nyelvére, azt kaptuk, hogy kedvező körülmények között a piac optimálisan osztja el a javakat az emberek között. Ezt láttuk, amikor a „tervgazdaságból” rövid időre kiruccantunk a piacgazdaságba, ahol mindent lehetett kapni, csak elég pénz kellett a vonzó áruk megvásárolásához.

De ez a tétel súlyos feltevésekre épül, és ha azokat elmozdítjuk, akkor a tétel kicsorbul. Csak a legfontosabb problémákat jelezzük, távirati stílusban. a) Feltettük, hogy az egyes piaci szereplők súlya kicsi, és mindenki elfogadja a piaci árakat olyannak, amilyenek. Ezzel szemben a valóságban olyan óriásvállalatok is működnek, amelyek szinte szabadon alakítják az áraikat (Microsoft, hollywoodi filmipar stb.). b) Feltettük, hogy minden szereplőnek van annyi kezdővagyona, amely elfogadható megélhetést biztosít a számára. Különösen a háborúk idején mutatkozik meg e feltevés életidegensége, ahol jegyrendszert kell bevezetni, nehogy a jobbmódúak az összes élelmiszert felvásárolják a szegények orra elől. c) Föltettük, hogy az egyes szereplők döntései nem befolyásolják mások életét. Ezzel szemben a közösségeknek törvényekkel kell megakadályozni, hogy a környezetszennyező vállalatok költségtakarékosság címén tönkretegyék a körülöttük élők életét. d) Föltettük, hogy az embereknek teljes információjuk van a vásárolt termékekről és szolgáltatásokról. A valóságban azonban a beteg csak azért bízhat meg vakon az orvosban, mert az állam oklevéllel igazolja az orvos szakértelmét. Hasonló aszimmetrikus információ jellemzi a beteg és a biztosító viszonyát, s ez indokolhatja a kötelező állami egészségbiztosítás bevezetését.

3.2. Az együttélő nemzedékek modellje

A 2.2. pont időben kiterjesztette a 2.1. szakasz statikus modelljét, miközben elhanyagolta a termékvilág sokszínűségét. Ehhez hasonlóan a 3.2. szakasz időben kiterjeszti a 3.1. szakasz többszereplős statikus modelljét, de közben visszatér az egytermékes világba. A lényeg: különböző életkorú nemzedékek élnek együtt.

Legyen $t = 1, 2, \dots$ az időszakok indexe, és $a = 1, 2$ az életkoré (fiatal, idős), gyakorlatilag 30 év hosszúságú időszakokkal dolgozva. Ekkor a jövedelmeket időtől függetlennek, de életkortól függőnek vesszük: m_1 és m_2. Bevezetjük a t-edik időszak (s_t) megtakarításának $t+1$-edik időszakra vonatkozó kamattényezőjét: R_{t+1}, valamint az idő- és életkorfüggő fogyasztást: $(c_{1,t}, c_{2,t+1})$-t. (A kamattényező indexe azért $t+1$ és nem t, mert szokás szerint nem a kezdő, hanem a záró időszakkal jelölik a két időszakot összekötő kamattényezőt.) Ekkor a fogyasztási egyenletek definíció szerint

$$c_{1,t} = m_1 - s_t \qquad \text{és} \qquad c_{2,t+1} = m_2 + R_t s_t. \tag{12}$$

Eltekintünk a halálozási kockázattól, azaz mindenkinek egységesen 2 időszaknyi felnőtt életet adunk. Föltesszük még, hogy minden anya $\nu > 0$ lányt szül, ahol ν szintén valós szám. (Ezt úgy kell elképzelni, hogy az anyákon belül vannak 0, 1, 2 stb. számú gyermeket szülők, és az így adódó nagy nevezőjű racionális számot valósnak tekintjük. Apákról és fiaikról külön nem beszélünk, de ők is léteznek.) Ha ragaszkodunk a korábban vázolt cseregazdasághoz, akkor a t-edik időszakbeli összes megtakarítások egyenlege 1 fiatalra vetítve 0; és a (12) második egyenletében szereplő időskori $R_t s_t$ megtakarítást 1 időszakkal visszadátumozzuk:

$$\nu s_t = R_{t-1} s_{t-1}. \tag{13}$$

Lemondva az optimalizálásról, csupán azt tesszük föl, hogy az s_t megtakarítás adott függvénye az R_t kamattényezőnek: $s_t = s(R_t)$. Föltesszük, hogy létezik olyan $R_B > 0$ szám, amelyre a megtakarítás eltűnik: $s(R_B) = 0$. Behelyettesítve (13)-ba, egy elsőrendű nemlineáris differenciaegyenlet kapunk az egymást követő kamattényezőkre:

$$\nu s(R_t) = R_{t-1} s(R_{t-1}), \qquad t = 1, 2, \ldots, \qquad R_0 \qquad \text{adott.} \tag{14}$$

Kimondhatjuk a következő tételt.

3.2. Tétel. *a) Az együttélő nemzedékek modelljében adott $s(\cdot)$ megtakarítási függvény esetén a kamattényező-dinamikát leíró (14) rendszernek általában két állandósult állapota van: $s(R_B) = 0$, ahol nincs megtakarítás, és ahol a kamattényező egyenlő a gyermekszámmal: $R_G = \nu$. b) A két állandósult állapot közül egyik vagy másik lehet lokálisan aszimptotikusan stabil. Például $R_B < \nu$ esetén R_B lokálisan aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. a) Vegyük észre, hogy a (14) egyenlet mind R_B-re, mind $R_G = \nu$-re fönnáll, tehát mindkettő állandósult állapot.

b) Az implicit függvény tétele szerint megfelelő feltevések mellett létezik (14) megoldása: $R_t = f(R_{t-1})$. Behelyettesítve (16)-ba, és deriválva R_{t-1} szerint: $\nu s'(f(R_{t-1}))f'(R_{t-1}) = s(R_{t-1}) + R_{t-1}s'(R_{t-1})$, azaz $0 < f'(R_B) = \nu/R_B < 1$ – a lokális stabilitás elégséges feltétele. □

Megjegyezzük, hogy elvont szinten e modell a tb- és a magánnyugdíjrendszert stilizálja. A magánrendszer hozama nyilván R_B, a tb-rendszer belső hozama pedig ν. Sokan ennek az egyszerű összefüggésnek az alapján részesítik előnyben egyiket vagy másikat. A valóságban azonban a korábbi kormányzatok nem a semmiből teremtettek egy új rendszert. Például a hazánkban 1998–2010 között fenálló kötelező magánnyugdíjrendszerbe terelt magánjárulékok hiányoztak a tb-nyugdíjrendszerből, ezért kellett őket állami forrásból pótolni.

Kiemelünk még egy kritikus feltevést: a dolgozó egy időszakra (30 évre) előre ismeri a kamattényezőt, ezt nevezik *tökéletes előrelátásnak* vagy általánosabban, *racionális várakozásnak*. Logikusnak tűnő feltevés, de a valóságban gyakran nem teljesül. Például akik 2004 és 2008 között Magyarországon svájci frank alapú jelzáloghitelt vettek föl, azt tételezték fel, hogy stabil forintárfolyam mellett megmarad a svájci frank kamatláb előnye a forinttal szemben. Ma már tudjuk, hogy az ellenkezője történt. Nem nehéz kiszámolni, hogy mi történik *naiv* várakozás esetén, amikor az előző időszak tényleges kamattényezőjét vetítik ki a jövőre. Persze, ez 30 év távlatában durva feltevés, de éves időszakra térve már nem.

3.3. Nash-egyensúly

Eddig eltekintettünk attól, hogy a szereplők esetleg olyan nagy súlyúak lehetnek, hogy hatásuk nem hanyagolható el a kölcsönhatási modellben. Most a játékelméletbe kiruccanva, egy olyan helyzetet vizsgálunk, ahol kevés játékos szerepel, és ezek figyelembe veszik döntéseik egymásra gyakorolt hatásait.

Legyen a játékosok száma $n > 1$, indexük $i = 1, 2. \dots, n$, *stratégiahalmazuk* S_i a d_i-dimenziós tér részhalmaza, elemeit pedig nevezzük a megfelelő játékosok *stratégiáinak*: $s_i \in S_i$. Az elemzési problémát az jelenti, hogy mindegyik játékos hasznosságát nemcsak saját, hanem a többi játékos stratégiája is befolyásolja. Leegyszerűsíti a jelöléseket, ha külön jelölést vezetünk be a „többi” stratégia vektorára, s így a hasznosságfüggvényekre:

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \qquad \text{és} \qquad u_i(s_1, s_{-i}).$$

Egy $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ stratégiavektort *Nash-egyensúlynak* nevezzük, ha egyik játékos sem javíthat hasznosságán azáltal, hogy eltér saját Nash-stratégiájától, feltéve, hogy a többi játékos ragaszkodik a Nash-stratégiához. Képletben:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \qquad \text{ha} \qquad s_i \in S_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a) a Nash-egyensúly definíciójában burkoltan megjelenik a racionális várakozás, ugyanis minden játékos a többi játék egyensúlyi stratégiáját várja, és várakozása beteljesül; b) egy játéknak lehet több egyensúlya is, és c) ha legalább két játékos eltér az egyensúlytól, akkor ezeknek a játékosoknak nőhet a hasznossága.

3.3. Tétel. *Ha az S_i stratégiahalmaz a d_i-dimenziós euklideszi tér kompakt és konvex részhalmaza, az u_i hasznosságfüggvény folytonos, és s_i-ben konkáv $(i = 1, \dots, n)$, akkor létezik legalább egy Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. A bizonyítás a már említett fixponttétel halmazértékű függvényekre történő Kakutani-féle általánosításán (1941) alapul. Tegyük föl, hogy

$b_i(s_{-i}) \in S_i$ halmazértékű leképezés a többi játékos $s_{-i} \in S_{-i}$ stratégiájára adott *legjobb válaszok* halmaza. Megfelelő technikai feltevések mellett e halmazok nem üresek. Nash-egyensúly esetén $s_i^* \in b_i(s_{-i}^*)$. Definiáljuk a

$$b(s) = (b_i(s_i, s_{-i}))_i$$

összetett leképezést, amely az $S_1 \times \cdots \times S_n$ halmazt képezi le önmagába. Könnyű belátni, hogy a Nash-egyensúly a b leképezés fixpontja: $s^* \in b(s^*)$, márpedig ilyen fixpont létezik. □

Egyik legegyszerűbb játékelméleti példa az ún. érempárosítás, amelyből kiderül, hogy Nash-egyensúly származtatásához szükség lehet az eredeti stratégiahalmazok radikális bővítésére.

3.1. Példa. Érempárosítás. Két játékos lerak az asztalra egy–egy azonos pénzérmét, amelynek értéke 1 egység. Ha azonosat raknak (FF vagy II), akkor az 1. játékos nyeri el mindkét érmét; ha különbözőt raknak (FI vagy IF), akkor a 2. játékos nyeri el mindkét érmét. Ez egy nullaöszegű játék: $u_2 \equiv -u_1$. Ha csak ez a két (ún. tiszta) stratégia létezne, akkor nem létezne Nash-egyensúly. Érdemes tehát bővíteni a stratégiák terét a kevert stratégiák bevezetésével: egy $s_i \in [0, 1]$ valós számmal jelölt stratégia azt jelenti, hogy az i-edik játékos s_i valószínűséggel játssza Fejet, és $1 - s_i$ valószínűséggel az Írást. Belátható, hogy az 1. játékos várható nyeresége

$$u_1(s_1, s_2) = s_1 s_2 + (1 - s_1)(1 - s_2) - s_1(1 - s_2) - (1 - s_1)s_2.$$

Az s_1 lokális optimumát a parciális derivált gyöke adja:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} u_1(s_1, s_2) = s_2 - 1 + s_2 - 1 + s_2 + s_2 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad s_2^* = 1/2.$$

Furcsa, hogy az 1. játékos lokális optimuma csak a 2. játékos választásától függ, de a játék szimmetriája miatt a 2. játékos optimalitási feltételéből adódik az 1. játékos lokális optimuma is: $s_1^* = 1/2$. A sarokpontokat már kizártuk, ezért egyetlenegy Nash-egyensúly létezik, és ott mindkét játékos földobja a saját érméjét, és teljesen a véletlenre bízza a választást.

Csak technikai érdekességű példánk után most vázolunk egy gyakorlatban is nagyon fontos példát, amely fényt vet az autópiaci vagy olajpiaci óriások küzdelmére, valamint arra, hogy bizonyos feltételek mellett minél több vállalat verseng egymással, annál olcsóbban jutnak a vevők a termékhez.

3.2. Példa. Oligopoljáték. Legyen az egymással versengő vállalatok száma n, indexük $i = 1, \ldots, n$. Homogén terméket állítanak elő, kapacitáskorlát nélkül. Ha $(q_1, \ldots, q_n)$ nemnegatív elemű valós vektor a vállalatok termelési vektora, akkor az össztermelés $Q = q_1 + \cdots + q_n$. A 2.1. szakaszban vázolt $q_i(p_i)$ kereslet–ár-függvény makrováltozata $Q = D(P)$, s ennek inverzeként bevezetjük az inverz keresleti függvényt, méghozzá lineáris változatban: $P = \alpha - \beta Q$, ahol $\alpha, \beta > 0$. Tegyük föl, hogy minden vállalat költségfüggvénye azonos, és homogén lineáris: q_i mennyiségű termék előállítási költsége γq_i, ahol $0 \leq \gamma < \alpha$ az egységköltség. A vállalatok úgy választják meg saját kibocsátásukat, hogy saját profitjukat maximalizálják, de az árfüggvényen keresztül a többi vállalat összegzett döntése, $Q_{-i} = Q - q_i$ is befolyásolja profitjukat:

$$\pi_i(q_i, Q_{-i}) = (P(q_i, Q_{-i}) - \gamma)q_i.$$

Behelyettesítve a lineáris árfüggvényt és $Q = q_i + Q_{-i}$-t:

$$\pi_i(q_i, Q_{-i}) = [\alpha - \gamma - \beta(q_i + Q_{-i})]q_i.$$

Adottnak véve a Q_{-i}-t, az i-edik vállalat profitfüggvényére a következő maximalizálási feltétel adódik:

$$0 = \frac{\partial}{\partial_i}\pi_i(q_i, Q_{-i}) = -\beta q_i + [\alpha - \gamma - \beta(q_i + Q_{-i})].$$

Visszahelyettesítve $Q_{-i} = Q - q_i$-t az optimalitási feltételbe,

$$0 = -\beta q_i + \alpha - \gamma - \beta Q,$$

azaz minden vállalat ugyanannyit termel: $Q = nq_i$, azaz n-felső indexszel jelölve az n-vállalatos Nash-egyensúlyt:

$$q_i^n = \frac{\alpha - \gamma}{\beta(n+1)}, \qquad Q^n = \frac{(\alpha - \gamma)n}{\beta(n+1)} \qquad \text{és} \qquad P^n = \frac{\alpha + \gamma n}{n+1}.$$

Tanulság: minél több (hatékony) vállalat verseng, annál jobban közelít az ár a költséghez, azaz annál kisebb a profit.

A játékelmélet számos irányba fejlődött, ezek ismertetése külön tanulmányokat igényelnek. Itt csupán még egy egyszerű játékot mutatunk be, amelyben a valódi játékosok nem a szakemberek által elképzelt hasznosságfüggvényt maximalizálják.

3.3. Példa. Ultimátumjáték. Két játékosunk van, és a bíró letesz az asztalra 100 db ötforintost. Az első időszakban az 1. játékos bejelenti igényét az ötforintosokra ($0 \leq s_1 \leq 100$), és a 2. időszakban a 2. játékos vagy elfogadja az ajánlatot ($s_2 = 100 - s_1$) vagy felborítja az asztalt, és senki sem kap semmit sem. Könnyű belátni, hogy egyetlenegy Nash-egyensúly létezik: $s_1^* = 99$ és $s_2^* = 1$, de a kísérletek során a 2. játékos általában 20-30 ötforintosra tart igényt.

4. Adózás és jövedelemújraelosztás

Eddig csak a piaci szereplők kölcsönhatását vizsgáltuk, csupán megjegyzésben utaltunk arra, hogy gyakran szükség lehet a piac kormányzati befolyásolására. Például ha a legkisebb keresetű dolgozó piaci jövedelme nagyon kicsi, akkor a kormányzat adót vet ki, és alapjövedelem fizetésével újra elosztja a jövedelmeket.

Jó közelítéssel feltehetjük, hogy csak a dolgozók fizetnek személyi jövedelemadót. A nálunk megvalósult, matematikai értelemben valóban arányos adóval számolva, ahol egy 0 és 1 közötti valós θ az adókulcs, egy w a teljes munkaidőért járó, röviden *teljes* havi bérű, havonta l időt dolgozó egyén wl kereset után θwl adót fizet. (Nem érdemes órában mérni a munkaidőt, egyszerűbb, ha a maximális 176 órát tekintjük egységnek.)

A gyermekektől és a nyugdíjasoktól itt eltekintünk, és feltesszük, hogy az adózás egyetlen célja: minden dolgozónak azonos alapjövedelemmel (jele: b) kiegészíteni adózás utáni piaci jövedelmét.

Kiszemelt dolgozónk fogyasztása

$$c = (1-\theta)wl + b.$$

A lehető legegyszerűbb hasznosságfüggvénnyel dolgozunk:

$$U(c,l) = 2c - wl^2. \tag{15}$$

Magyarázat: a fogyasztást duplán vesszük figyelembe, viszont minden dolgozó ódzkodása a munkától a munkaidő négyzetével arányos, és az arányossági tényező éppen w, a teljes havi bér.

4.1. Tétel. *Adott adókulcs és alapjövedelem esetén minden dolgozó optimális munkakínálata*

$$l^* = 1-\theta.$$

Bizonyítás. Behelyettesítve a fogyasztást (15)-be, a hasznosságfüggvényt egyváltozóssá tettük:

$$U[l] = 2[(1-\theta)wl + b] - wl^2. \tag{16}$$

Az optimális munkakínálat $U'[l] = 2(1-\theta)w - 2wl = 0$-ból már közvetlenül adódik. □

Megjegyzések. A 4.1. tétel modellje túlzottan egyszerű. 1. Nem veszi figyelembe, hogy a valóságban gyakran lehetetlen folyamatosan változó hosszúságú részmunkát vállalni. 2. Elhanyagolja a családfenntartó férfi és a gyermeknevelő nő helyzete közti különbséget. 3. Elsiklik az adómorál fölött, amely az adókulcs mellett szintén befolyásolja az adóelkerülés mértékét. Ennek ellenére fontos részigazságot kifejez: nagyobb adókulcshoz egyébként változatlan körülmények között kisebb munkakínálat tartozik, ezért a kormányzatnak célszerű elkerülnie a munka túladóztatását.

Országos szinten a dolgozók kereseteloszlását egy F eloszlásfüggvény írja le, és olyan mértékegységben számolunk, hogy a teljes havi bér várható értéke egységnyi legyen: $\mathbf{E}w = 1$. Ekkor az alapjövedelem $b = \theta(1-\theta)$. Behelyettesítve az adókulcstól függő munkakínálatot és alapjövedelmet (16)-ba, adódik

$$u(\theta) = (1-\theta)^2 w + 2\theta(1-\theta). \tag{17}$$

(Itt megkülönböztetésül írunk $U(\cdot)$ helyett $u(\cdot)$-t.)

Tegyük föl, hogy a kormányzat a legkisebb hasznosságfüggvényű, esetünkben a minimálbérű dolgozó hasznosságát akarja maximalizálni, akinek teljes havi bére $0 < w_m < 1$.

4.2. Tétel. *Modellünkben a társadalmilag optimális adókulcs*

$$\theta^* = \frac{1-w_m}{2-w_m} < \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Bizonyítás. (17)-be behelyettesítve $w = w_m$-et és deriválva a függvényt, az optimálisi feltétel

$$0 = u'(\theta)/2 = -w_m(1-\theta) + (1-\theta) - \theta. \tag{19}$$

(19) gyöke valóban (18). □

Megjegyzés. A 4.2. tétel nagyon bölcsen azt sugallja, hogy minél nagyobb a keresetegyenlőtlenség, amelyet itt $1 - w_m$ mér, annál nagyobb az optimális adókulcs. Ugyanakkor e tétel még a 4.1. tételen is túlmegy a valóság egyszerűsítésében. Például a modellezett kormányzat csak a legrosszabb helyzetűek helyzetének javítását tűzi ki célul, és ezzel túllőhet a célon. Erről szól a következő tétel.

A társadalmi jólét kormányzati maximalizálása helyett egy tömegdemokráciában a választók határozzák meg az egyensúlyi adókulcsot. Ehhez szükségünk van a *mediánszavazó* fogalmára: legyen a dolgozók $F(w)$ kereseti eloszlása folytonos, ahol $F(w)$ a w-nél kevesebbet keresők aránya a dolgozó népességben. Jelölje w^{o} a mediánkeresetet, amelyre teljesül, hogy $F(w^{\mathrm{o}}) = 1/2$. Azaz ugyanannyi dolgozó keres w^{o}-nál kevesebbet, mint amennyi többet. Föltesszük, hogy két párt vetélkedik a szavazatokért: egy baloldali pártot magasabb (θ_L) adókulccsal, és egy jobboldali pártot alacsonyabbal (θ_R): $0 \le \theta_R \le \theta_L \le 1$. A w keresetű szavazó arra a pártra szavaz, amely által ígért adókulcsnál a jóléte nagyobb, mint a másiknál. (17) alapján a w keresetű dolgozó pontosan akkor szavaz balra, ha

$$u[w, \theta_L] > u[w, \theta_R]. \tag{20}$$

(17) értelmében (20) ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel

$$(1-\theta_L)^2 w + 2\theta_L(1-\theta_L) > (1-\theta_R)^2 w + 2\theta_R(1-\theta_R).$$

A 4.1. tétel értelmében [vö. (18)] a w keresetű dolgozó számára számára optimális adókulcs

$$\theta(w) = \frac{1-w}{2-w}. \tag{21}$$

Mindkét párt olyan adókulcsot javasol, amely győzelemmel kecsegtet.

4.3. TÉTEL. *A kétpárti modellben mindkét párt Nash-egyensúlyra törekszik, amelyben a mediánszavazó választása jut érvényre:*

$$\theta_L = \theta_R = \theta(w^{\circ}).$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy (21)-ben a $\theta(w)$ adókulcs a w kereset szigorúan csökkenő függvénye. A baloldali párt megszerzi a dolgozók szegényebb felének a szavazatait, ha $\theta(w^{\circ})$-t javasol, és a jobboldali párt megszerzi a dolgozók gazdagabb feléét, ha $\theta(w^{\circ})$-t javasol. Ha bármelyik párt ettől eltér, a másik párt elcsábíthatja a másik párt szavazói hozzá közel eső részét. □

Megjegyzések.

1. Úgy tűnhet, hogy e modell elfajult, hiszen mindkét párt ugyanazt a közpolitikát javasolja. A valóságban gyakran előfordul azonban, hogy mindkét párt középre húz, emiatt a szavazás nagyon kiegyenlített, és csak másodlagos kérdések döntik el a választás eredményét.

2. Természetesen az is gyakori, amikor nem két nagy párt van, hanem több kisebb; vagy nem egy, hanem több kérdés játszik központi szerepet, és ilyenkor más modelleket kell alkalmazni.

5. Történeti vázlat

Nem akartam történeti részletekkel elvonni a figyelmet az elmélet logikájáról, de a vázlat végére érve helyénvalónak látszik a történet vázolása. Daniel Bernoulli volt talán az első gondolkodó, aki 1735-ben a szentpétervári paradoxon elemzése közben rábukkant a logaritmikus hasznosságfüggvényre. A közlekedésmérnök Cournot (1838) bevezette a keresleti függvényt, és két versengő vállalat esetén meghatározta az egyensúlyi megoldást. A hasznosságfüggvényen alapuló egyéni és piaci elemzés úttörője Walras (1874/77) volt, aki az általános egyensúlyelmélet számos kérdését vázolta, de az akkori matematika és a közgazdaságtan fejletlensége miatt a szabatos tárgyalás lehetetlen volt. A fixponttétel felhasználásával Neumann (1928) bizonyította be a nullaösszegű kétszemélyes játékok alaptételét. Samuelson (1947) monográfiája határkő volt a matematikai közgazdaságtan fejlődésében. A független hasznosságfüggvényű, sokszemélyes játékelmélet kialakítása Nash (1951) érdeme. Arrow és Debreu (1954) cikke tartalmazta az általános egyensúlyelmélet első szabatosan bizonyított tételét. Samuelson (1958) fedezte föl az együttélő nemzedékek modelljét. Arrow (1963) már részletesen elemezte, hogy az aszimmetrikus információ és a morális kockázat miatt mennyire csorbul az általános egyensúlyelmélet érvényessége az egészségügyi szolgáltatások terén. Az optimális adózás klasszikusa Mirrlees (1971), a mediánszavazó elméletét Black (1948) dolgozta ki, és csírájában tartalmazta a Nash-egyensúlyt.

6. Következtetések

Egyes szám első személyre váltok. Lehetlennek tűnő feladatra vállalkoztam: dióhéjban bemutatni a matematikai közgazdaságtant matematikusoknak. Nagyon visszafogtam magam: csak néhány alapvető modellt körvonalaztam. Próbáltam hangsúlyozni a modern főáramú közgazdaságtan egyik alapvető sajátosságát: mindent az egyéni optimalizálásra vezet vissza; s ebből a mikromegközelítésből kísérli meg levezetni a makroszinten megvalósuló egyensúlyt. A többtermékes statikus modell eredményeit szembesítettem az egytermékes dinamikus modellével. Hangsúlyoztam a kevés- és sokszereplős modellek közti különbséget.

Ugyanakkor röviden igyekeztem utalni az alkalmazott modellek korlátaira: például az egyén képtelen kiszámítani az optimális döntést, az egyensúly létezését szavatoló feltevések számos piacon nem állnak fenn, ezért az egyenúly vagy nem optimális vagy nem is létezik. A piaci rendszert mindig kiegészíti egy kormányzati szféra, amely például az adórendszeren keresztül befolyásolja a piac működését. Az adórendszer optimalitása is vizsgálható, méghozzá nem is egyféleképpen: mást ad a társadalmi jólétet maximalizáló tervezés és megint mást a két párt versengése.

Csak néhány alapvető cikk szerepel a hivatkozási listán. Az itt leírtak zöme megtalálható a legtöbb emelt szintű tankönyvben. Ajánlom a wikipédia *mathematical economics* címszavát, amely nem ennyire szabatosan, de nagyobb ívben tárgyalja a kérdést. Külön felhívom a figyelmet két további könyvre: Keynes (1936) a Nagy Válság mélypontja után elméletileg is megmagyarázta, hogy az elégtelen kereslet tömeges munkanélküliséghez vezet. Kornai (1971) monográfiája nemzetközileg is az elsők között mutatott rá az általános egyensúlyelmélet korlátaira.

Hivatkozások

[1] Arrow, K. J. és Debreu, G.: *Existence of Equilibrium for a Competitive Economy*, Econometrica, **22** (1954): 265–290.

[2] Arrow, K. J.: *Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care*, American Economic Review **53** (1963): 941–973.

[3] Bernoulli, D.: *Exposition of New Theory of the Measurement of Risk* (angol fordítás), Econometrica, **22** (1735/1954): 23–36.

[4] Black, D.: *On the Rationale of Group Decision Making*, Journal of Political Economy, **56**, (1948): 23–34.

[5] Cournot, A.: *Recherches sur la Principe Mathematiques de la Theorie des Richesses.* (1838)

[6] Keynes, J. M.: *A foglalkoztatás, a kamat és a pénz általános elmélete* (1936), magyar fordítás, Bp. KJK, 1965.

[7] Kornai, J.: *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó. (1971)

[8] Mirrlees, J. A.: *An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation*, Review of Economic Studies **38** (1971): 175–208.

[9] Nash, J.: *Non–Cooperative Games*, The Annals of Mathematics, **54** (1951): 286–295.

[10] Neumann: *A társasjátékok elméletéről*, Válogatott előadások és tanulmányok, Budapest, KJK, (1928/1965): 121–156.

[11] Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, MA, Harvard University Press (1947), bővített kiadás, 1983.

[12] Samuelson P. A.: *An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money*, Journal of Political Economy **66** (1958): 467–482.

[13] Walras, L.: *Elements of Pure Economics*, London, Allen and Unwin (1874-1877) (a francia eredeti angol nyelvű fordítása), 1954.

(Beérkezett: 2016. május 19.)

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA KRTK Közgazdaság-tudományi Intézet
Budaörsi út 45, Hungary, 1112
illetve BME, MI, Differenciálegyenlet Tanszék
simonovits.andras@krtk.mta.hu

ON MATHEMATICAL ECONOMICS FOR MATHEMATICIANS

András Simonovits

This survey outlines the elements of mathematical economics for mathematicians. We introduce the static and the dynamic models of optimal consumption. We extend these models from one to many decision-makers, considering also the theory of strategic interaction: game theory. Pure market models are extended by government intervention. Appreciating the results, we point out unsolved problems.