Alkalmazott Matematikai Lapok **33** (2016), 19–25.

A VÉGES SZÓHOSSZBÓL ADÓDÓ KORLÁTOZÁS HATÁSA GEOMETRIAI ADATOKBÓL SZÁMÍTOTT SZÁMJEGYVEZÉRLÉSŰ (NC) PROGRAMOK SZERKESZTÉSÉNÉL

DR. VÖRÖS GÁBOR

1. Bevezetés

A 32 bites szóhosszúságú lebegőpontos ábrázolás esetén (1 bit előjel, 7 bit karakterisztika, 24 bit mantissza) a reprezentáció pontossága 2^{-24}, azaz 10^{-7}. Jóllehet az ábrázolható legnagyobb és legkisebb szám $\pm 9,2\ 10^{18}$, a pontosságon a következőket kell érteni:

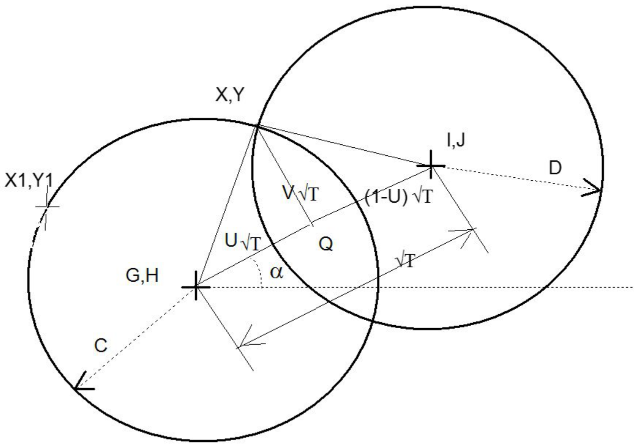
- Azonos karakterisztikák esetén két, M hosszúságú (esetünkben 24 bites) mantissza összeadásakor túlcsordulás keletkezik, és az eredményt egy bittel jobbra kell léptetnünk (a bináris törtvessző a bal oldalon van). Amennyiben ez a bit zérus értékű volt, hibát nem követtünk el, logikai 1 esetén viszont $\pm 2^{-M}$ nagyságú hiba lép fel attól függően, hogy a szám pozitív, vagy negatív volt-e. Ennek a hibának a szórásnégyzete $\delta_1^2 = 2^{-M}/2$.
- Amikor pedig két M bites mantisszájú gépi szót összeszorzunk, az eredmény $2M$ (esetünkben 48) bites mantisszájú gépi szó lesz. Mivel az ábrázolás miatt az eredményt újból M bitszámra kell visszaléptetnünk, hibát követünk el, amelynek szórásnégyzete $\delta_1^2 = 2^{-2M}/12$.

2. A jelenség

Geometriai adatokból számított számjegyvezérlésű (NC) programok szerkesztésénél (elemszámításkor) a bevezetőben körvonalazott csonkítási hibák csak akkor okoznak nehézséget, ha egy adott számítási módszerrel meghatározott körpontok egy ezt követő másik módszerrel (a körön fekvés ellenőrzésekor) a megengedett hibát meghaladva is eltérést jeleznek a kör kerületétől.

3. Elemzés

Két kör metszése esetén a metszéspont a következők szerint számítható:



ahol C, D a sugarak
G, H az egyik kör középpontjának x, y koordinátája
I, J a másik kör középpontjának x, y koordinátája
X, Y a kerületi metszéspontok
T a középpontok távolságának négyzete

Ha bevezetjük a következő jelölést:

$$R = I - G, \tag{1}$$

akkor

$$R/\sqrt{T} \text{ az } \alpha \text{ szög koszinusza,}$$

valamint

$$S = J - H \tag{2}$$

esetén

$$S/\sqrt{T} \text{ az } \alpha \text{ szög szinusza.}$$

T értékét Pithagorász tételével S és R-ből számíthatjuk:

$$T = S^2 + R^2. \tag{2a}$$

A $[Q - G, H - X, Y]$ háromszögben

$$C^2 = U^2 \cdot T + V^2 \cdot T, \tag{P1}$$

míg a $[Q-I, J-X, Y]$ háromszögben

$$D^2 = (1-U)^2 \cdot T + V^2 \cdot T. \tag{P2}$$

A (P1) jelű egyenletből kivonva (P2)-t kapjuk:

$$C^2 - D^2 = U^2 \cdot T - T + 2 \cdot U \cdot T - U^2 \cdot T,$$

így

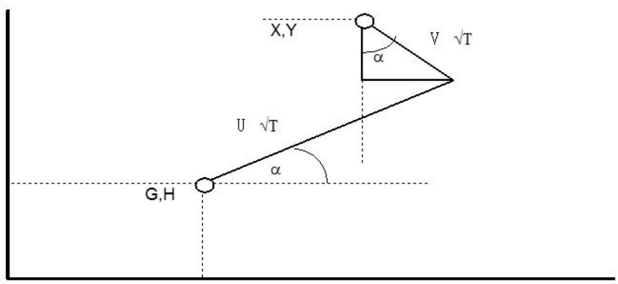
$$U = \frac{C^2 - D^2 + T}{2T} \tag{3}$$

és (P1)-ből:

$$V = \pm\sqrt{\frac{C^2}{T} - U^2} \tag{4}$$

Ez egyben az elrendezés diszkriminánsa: $U^2 > T^2/2$ esetén a két körnek nincs egyetlen közös pontja sem.

A keresett metszéspont X koordinátáját az alábbi ábra szerint határozhatjuk meg:



$$X = G + U \cdot \sqrt{T}\cos\alpha - V \cdot \sqrt{T}\sin\alpha,$$

de

$$\cos\alpha = R/\sqrt{T} \qquad \text{és} \qquad \sin\alpha = S/\sqrt{T}.$$

Így

$$X = G + U \cdot R - V \cdot S \tag{5}$$

hasonló okoskodással kapjuk, hogy

$$Y = H + U \cdot S + V \cdot R. \tag{6}$$

Amennyiben a két kör

$$(X-G)^2 + (Y-H)^2 = C^2,$$

illetve

$$(X - I)^2 + (Y - J)^2 = D^2$$

egyenleteiből a fenti geometriai jelentéstartalomtól függetlenül fejezzük ki X, Y értékeit, ezeket mintegy 50 %-kal több elemi művelet révén kaphatjuk csak meg az (1)-től (6) jelű számításokkal szemben (lásd Függelék).

Ezután következik a körön fekvés ellenőrzése: megmunkáláskor minden NC mondat kezdő és végpontjára nézve összevetés történik a megadott középpontra nézve, azaz az 1-jelű kör esetén:

$$\sqrt{(X1 - G)^2 + (Y1 - H)^2} - \sqrt{(X - G)2 + (Y - H)^2} = \vartheta$$

vagy

$$\sqrt{(X - G)2 + (Y - H)^2} - C = \vartheta$$

értékét a szerszámgép mechanikai pontosságnak figyelembe vételével állapítjuk meg (a gyakorlatban ez 3–5 mikron szokott lenni).

Végezzük most vizsgálatunkat csak pozitív számokra.

A korlátozott bitszám hatása úgy nyilvánul meg, hogy egy adott A érték helyet egy A' szerepel és

$$A = A' + \Delta a,$$

ahol Δa-val jelöltük a csonkítási hibát.

Most már (5) és (6) ezzel a formalizmussal átírható:

$$\begin{aligned} X &= X' + \Delta x = G + (U' + \Delta u) \cdot (R' + \Delta r) - (V' + \Delta v) \cdot (S' + \Delta s), \\ Y &= Y' + \Delta y = H + (U' + \Delta u) \cdot (S' + \Delta S) - (V' + \Delta v) \cdot (R' + \Delta r). \end{aligned}$$

Amennyiben a helyzetet úgy egyszerűsítjük, hogy $\Delta r = \Delta s = 0$ legyen, akkor

$$R' = R \qquad \text{és} \qquad S' = S,$$

így írható

$$\begin{aligned} X' + \Delta x &= G + U' \cdot R - V' \cdot S - \Delta v \cdot S + \Delta u \cdot R, \\ Y' + \Delta y &= H + U' \cdot S - V' \cdot R + \Delta v \cdot R + \Delta u \cdot S, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\Delta v \cdot S + \Delta u \cdot R, \\ \Delta y &= \Delta v \cdot R + \Delta u \cdot S. \end{aligned}$$

Amennyiben $R > S$ akkor előfordulhat, hogy $\Delta x > 0$ és $\Delta y < 0$. Így arra a meglepő közbenső eredményre jutunk, hogy pozitív számok esetén is előfordulhat, hogy csonkított érték (pl. Y') nagyobb lesz az elméletileg pontos értéknél (Y).

4. A probléma

A jelenség fellépésének szükséges feltétele, hogy például a 2-jelű körre

$$\Delta = \sqrt{(I - X' - \Delta x)^2 + (J - Y' + \Delta Y)^2} + \sqrt{(I - X')^2 + (J - Y')^2}$$

az általunk megadott (például 3 mikron) értékű hibahatárt meghaladja. A probléma az, hogy hogyan lehetne megadni azoknak az elrendezéseknek C, D és $\sqrt{T}$ értékeitől függő halmazát, melyre nézve a fenti összefüggés teljesül.

Ezen számhalmaz ismeretében remélhető lenne, hogy a helyesbítés is korrekten elvégezhető.

5. Heurisztikus helyesbítés

Az elvi kritérium hiányában az X', illetve Y' értékeket a következők szerint helyesbíthetjük:

A (9)-ből kapott Δ értékével D-t $\mathcal{D}$-re módosítjuk:

$$\mathcal{D} = D - \Delta \text{ szerint,}$$

azaz ellenkezően változtatjuk meg, mint amit a „túllövés" okozott.

Ezek után újból átszámítjuk a (3)-tól (9) összefüggéseket, de most már $\mathcal{D}$-vel D helyett. Szerencsés esetben remélhető, hogy Δ új értéke kisebb lesz a megengedett hibahatárnál.

6. A probléma heurisztikus megkerülése

A világszerte alkalmazott módszer a nagyobb bitszámú szóhossz bevezetése (64 bites lebegőpontos ábrázolás). Ilyenkor a csonkítások abszolút értékének nagyságrendekkel kisebb volta miatt az NC-gyakorlatban használt eddigi értékek esetén a jelenség nem lépett fel.

A probléma elvi megoldásának hiányában azonban nincs kizárva, hogy a jelenség fellépése nagyobb szóhossz esetén se fordulhasson elő. Lehetséges azonban, hogy ekkor ez már a mérnöki gyakorlat számára érdektelenné is válik, ezért a jelen sorok szerzője további vizsgálatok folytatásának lehetőségére hívja fel az érdeklődő Olvasó szíves figyelmét. Javasolható az újabban „divatos" kaotikus jelenségként történő kezelés is, hisz a jelenség determinisztikus és a „káoszt" nem filozófiai értelemben használva meghatározhatók lennének a kaotikus attraktorok.

7. Függelék

A metszéspontok kiszámítása pusztán algebrai módszerrel az

$$(X-G)^2+(Y-H)^2=C^2 \tag{A}$$

$$(X-I)^2+(Y-J)^2=D^2 \tag{B}$$

egyenletrendszer megoldását jelenti.

Elvégezve a négyzetre emeléseket, majd (B)-t kivonva (A)-ból:

$$2X(I-G)+G^2-I^2=C^2-D^2(Y-H)^2+(Y-J)^2,$$

ebből

$$X=R+S\cdot Y, \tag{C}$$

ahol

$$R=\frac{I^2-G^2+C^2-D^2+J^2-H^2}{2(I-G)} \tag{D}$$

és

$$S=\frac{H-J}{I-G} \tag{E}$$

(C)-t behelyettesítve (A)-ba

$$Y^2(1-S^2)+Y(2RS-2J-2SG)+R^2-2RG+G^2+H^2-C^2=0.$$

Ha bevezetjük hogy,

$$T=RS-J-SG \tag{F}$$

és

$$W=R^2-2RG+G^2+H^2-C^2 \tag{G}$$

azt kapjuk, hogy

$$Y=\frac{-T\pm\sqrt{T^2-(1+S)^2\cdot W}}{1+S^2} \tag{H}$$

A (C)-től (G)-ig terjedő egyenletek 17 szorzást, 3 osztást és 19 összeadást/kivonást írnak elő, szemben az (1)-től (6)-tal, ahol 9 szorzás, 2 osztás, 10 összeadás/kivonás szerepel, amit bizonyítani kellett.

Meg kell még jegyezni, hogy a megvalósító programban egy döntést kell végezni, hogy $I - G$ nem nulla-e? Amennyiben igen – azaz Y tengellyel párhuzamos egyenesen fekvő középpontok esetén – egy, az X/Y-ra nézve szimmetrikus kifejezéseket adó levezetést kell használnunk. Itt a nevezőben $J - H$ fog szerepelni, amellyel a számolás már elvégezhető. $J - H$ nulla esetén két koncentrikus körről van szó, amelynek nyilván nincs, vagy – egybevágóságuk miatt – végtelen sok közös pontja van.

(Beérkezett: 2015. december 6.)

DR. VÖRÖS GÁBOR
Az SzKI nyugalmazott villamosmérnöke
1036, Budapest, Uszály utca 12
dvg@kabelnet.hu vagy eddig vorosg37@gmail.com

EFFECTS OF TRUNCATION IN CALCULATING DATA FOR NUMERICALLY CONTROLLED MACHINE TOOLS

Dr. Gábor Vörös

Truncation errors can cause a problem in dispatching geometrical data for NC machine tools. I. e: calculations of intersection points give a result of off-the-circle result with final checks. In our practice the permissible difference was 3 microns and mantissa-length of floating point data was 24. In metal working, the generally accepted method is to apply longer word-lengths. Pointing out that even with this, theoretical occurance can not be excluded, we give a heuristic method of solving the problem. Finally, with a hint, we call the attention toward further development with chaotic attractors.