

EGY NEMLINEÁRIS VEGYES-EGÉSZÉRTÉKŰ OPTIMALIZÁLÁSI FELADAT KÜLÖNFÉLE MODELLJEINEK KOMPARATÍV ELEMZÉSE

DOBJÁNNÉ ANTAL ELVIRA ÉS VINKÓ TAMÁS

Egy optimalizálási feladat megoldásának sebességét sokféle tényező befolyásolhatja, többek között az adott feladat mérete (beleértve a változók és a korlátok számát is), típusa (lineáris, egészértékű stb.), a megoldó algoritmus, valamint a reprezentáció módja (beleértve az alkalmazott adatstruktúrákat és a matematikai modellt is). Jelen tanulmányt egy hálózati folyam probléma matematikai modelljének felírása kapcsán felmerülő kérdések ihlették.

A cikkben azt vizsgáljuk, hogy egy konkrét, nagyméretű lineáris és nemlineáris vegyes-egészértékű programokat is magában foglaló optimalizálási feladat megoldásának sebességét mennyiben befolyásolja különféle modellezési technikák alkalmazása. Egy elosztott tartalommegosztó hálózat max-min méltányos erőforrás-elosztásának kiszámítását célzó modell tizenkét változatát hasonlítjuk össze egy kiterjedt numerikus tesztelés során, két professzionális megoldó és huszonegy nagyméretű tesztfeladat felhasználásával.

Reményeink szerint a közölt eredmények túlmutatnak a konkrét problémán, és árnyaltabb képet adnak más hasonló feladatok megértéséhez is.

1. Bevezetés

Élőkép interneten történő közvetítésére számos megoldás létezik. Amennyiben a skálázhatóság kérdése fölmerül, gyakran az elosztott módon működő módszerek adnak minőségi választ. Egy ilyen lehetséges módszer a BitTorrent protokollon alapszik [4]. A BitTorrent eredetileg egy tartalommegosztó rendszer, amely elsősorban nagyméretű fájlok hatékony hozzáférését segíti elő [5, 8]. Kiderült azonban, hogy a protokoll részleteinek megfelelő módosításával lehetőségünk van élő közvetítésre (live streaming), illetve video-on-demand szolgáltatások támogatására is [7, 6, 15, 13, 12].

Míg a hagyományos tartalomletöltésnél a felhasználók igénye elsősorban a letöltés sebességére vonatkozik (minél gyorsabb, annál jobb), addig a letöltés közbeni megtekintés vagy meghallgatás jellegű szolgáltatásoknál minden felhasználóra a számára elérhető lehető legjobb minimális letöltési sebességet kell garantálnunk.

Jelen cikkben ez utóbbi feladatra fókuszálunk. A feladat, bizonyos feltételek kikötése mellett, megfogalmazható egy speciális szerkezetű gráfon értelmezett nemlineáris vegyes-egészértékű optimalizálási feladatként. Ennek részletes leírását az [1] cikkben találhatjuk meg. Mivel a vizsgált feladat megoldására javasolt iterációs módszer számos részletet és modellezési megfontolást tartalmaz, ezért természetesen adódik a kérdés: vajon milyen tényezők befolyásolják a megoldás sebességét? Jelen cikkben összegyűjtöttük a lehetséges opciókat, amelyeket részletes numerikus vizsgálatoknak vetettünk alá. Bár a feladat specifikus, meggyőződésünk, hogy az elvégzett numerikus tesztek által kapott eredmények általánosabb érvényű empirikus képet adnak a hasonló típusú problémák számítógépes megoldási lehetőségeire.

A következőkben először megadjuk a legfontosabb fogalmakat, valamint a használt hálózati modellt (2. szakasz). Ezután röviden ismertetjük az [1] cikkben javasolt iterációs módszert, továbbá a lehetséges algoritmus változatok egy bőséges listáját (3. szakasz). A felhasznált tesztesetek leírását (4. szakasz) a numerikus eredmények diszkussziója követi (5. szakasz).

2. Max-min méltányos erőforrás-elosztás problémája

Ebben a fejezetben bevezetjük a legszükségesebb definíciókat, amelyek egyrészt megadják a vizsgált feladat felhasználási területét, másrészt leírják a vizsgált optimalizálási algoritmus bemeneteként szolgáló folyam hálózatot.

Mint azt a bevezetőben említettük, a vizsgált feladat egy elosztott tartalom-megosztó rendszerben előforduló erőforrás-elosztás problémaköréhez tartozik. Ez a rendszer a BitTorrent. Jelen cikk szempontjából nézve a rendszernek három fő komponense van: letöltők (*leecherek*), megosztók (*seederek*) és a megosztott fájlok (ezeket gyakran *torrentek*nek is nevezzük, amely valójában a megosztott tartalom technikailag fontos jellemzőit leíró meta fájl, de az elnevezés nem lesz félreérthető). A BitTorrent a fájlokat darabokra osztja. Egy adott fájlra nézve a megosztók halmaza azon felhasználókat tartalmazza, akik rendelkeznek a fájl összes darabjával. Fontos szempont, hogy a letöltők is tudnak egymás között darabokat cserélni, így a letöltés közben egyben feltöltőként is szolgálják a rendszer működését. Pontosan ez az az ötlet, amitől a BitTorrent rendkívüli módon jól skálázható [5]. A továbbiakban *BitTorrent közösség* alatt felhasználók (*leecherek* és *seederek*), valamint fájlok egy rögzített halmazát értjük.

Capotă és szerzőtársai [3] nyomán egy BitTorrent közösség aktuális állapotát – vagyis, hogy egy adott időpillanatban ki kinek tölthet fel, milyen adatátviteli korlátok érvényesek, stb. – egy speciális hármas gráf reprezentációval írhatjuk le. Ezt az irányított, súlyozott hármas gráfot $G = (\{U, L, D\}, E, f, c)$ jelöli. A közösség alapvető elemei a felhasználók halmaza (I) és a torrentek halmaza (T). Minden $i \in I$ felhasználó rendelkezik μ_i feltöltési kapacitással és δ_i letöltési kapacitással, továbbá

$U = \{u_i \mid i \in I\}$: a *feltöltő csúcsok* halmaza, ahol u_i az i felhasználó feltöltési (seeding vagy leeching) potenciálját reprezentálja;

$D = \{d_i \mid i \in I\}$: a *letöltő csúcsok* halmaza, ahol d_i az i felhasználó letöltési (leeching) potenciálját reprezentálja;

$L = \{l_i^t \mid i \in I, t \in T\}$: a *leeching csúcsok* halmaza, ahol az l_i^t (ún. *leeching session*) létezése azt jelöli, hogy az i felhasználó éppen leech-eli, letölti a t torrentet;

E : az élek halmaza; $E = E_U \cup E_D$, ahol $E_U = \bigcup_{i,j,t} (u_i, l_j^t)$ a *feltöltő élek* halmaza, és $E_D = \bigcup_{j,t} (l_j^t, d_j)$ a *letöltő élek* halmaza;

$c : U \cup L \cup D \rightarrow \mathbb{N}$: a *kapacitás függvény*, amely a résztvevők sávszélesség-korlátait reprezentálja:

$$c(u_i) = \mu_i, \quad c(d_i) = \delta_i, \quad c(l_i^t) = \infty;$$

$f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$: a *folyam függvény*, a kiosztott sávszélességet reprezentálja azokon az éleken, amelyek kielégítik a *folyammegmaradási tulajdonságot*:

$$\sum_{u_i \in U} f(u_i, l_j^t) = f(l_j^t, d_j) \quad \forall l_j^t \in L,$$

valamint a *kapacitás korlátokat*:

$$\begin{aligned} \sum_{l_i^t : (u_i, l_j^t) \in E_U} f(u_i, l_j^t) &\leq \mu_i & \forall u_i \in U, \\ \sum_{l_j^t : (l_j^t, d_j) \in E_D} f(l_j^t, d_j) &\leq \delta_j & \forall d_j \in D. \end{aligned}$$

Célunk minden $(l_j^t, d_j) \in E_D$ élre a *max-min méltányos erőforrás-elosztás* meghatározása, vagyis minden egyes letöltő élre a lehető legnagyobb folyam kiszámítása, figyelembe véve, hogy egy letöltő élen sem növelhető a folyam értéke olyan áron, hogy egy tőle kisebb folyammal rendelkező letöltő élen csökkentjük azt. Ez tulajdonképpen a Pareto-optimális erőforrás-elosztás egy rokon feladata [14]. A formális definíció megtalálható pl. [3] és [14] cikkekben.

3. A probléma megoldása; modellátírási lehetőségek

A max-min méltányos erőforrás-elosztás kiszámítását célzó algoritmus kiindulási alakját a 3.1. *algoritmus* tartalmazza. A korábbi cikkünkben [1] bemutatott megoldás tulajdonképpen Radunović és Le Boudec általános max-min programozási algoritmusának [14] a feladatra adaptált változata. A letöltési élek max-min

méltányos folyamait iteratív módon számítjuk: minden iterációban a legkisebb, még nem rögzített folyammal rendelkező letöltő élekre állapítjuk meg a minden korlátot kielégítő legnagyobb folyam értékét. A halmazokat nagy betűkkel, az optimalizálási feladatok döntési változóit kis betűkkel, míg a paramétereket (a rögzített értékkel bíró változókkal egyetemben) görög betűkkel jelöljük.

3.1. Algoritmus. $mMaxMin$

1. **Alsó korlát számítása a folyam értékekre.** MM_0 megoldása:

$$\begin{aligned} & \max f, \\ & \text{f.h. } f(l_j^t, d_j) \geq f \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_D. \end{aligned}$$

A minimális folyam érték eltárolása. Legyen $\phi := f$.

2. **Maximális átvitel számítása.** Az MM_{MaxFlow} -val jelölt LP-feladat megoldása:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_D} f(l_j^t, d_j), \\ & \text{f.h. } f(l_j^t, d_j) \geq \phi \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_D. \end{aligned}$$

Optimum eltárolása. Legyen $\sigma := \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_D} f(l_j^t, d_j)$.

3. **Inicializálás.** Legyen $F := \emptyset$, $k := 1$, $E_1 := E_D$, $\forall (l_j^t, d_j) \in E_D : \ell_j^t := 0$, $\phi_0 = 0$.

4. **LP-megoldás (max-min folyam érték kiszámítása).** Az $mMM_k^{(1)}$ -gyel jelölt LP-feladat megoldása:

$$\begin{aligned} & \max f_k, \\ & \text{f.h. } \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} f(l_j^t, d_j) + \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t \geq (1 - \epsilon) \cdot \sigma \\ & \quad f(l_j^t, d_j) \geq f_k \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Optimum eltárolása. Legyen $\phi_k := f_k$.

5. **Előmegoldás (max-min folyammal rendelkező élek kiválasztása).**

$$\begin{aligned} E_{k_f} &:= \left\{ (l_j^t, d_j) \in E_k \left| \frac{c(d_j) - \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t}{deg_k^-(d_j)} = \phi_k \right. \right\}, \\ & \quad x_j^t := 0, \forall (l_j^t, d_j) \in E_{k_f}. \end{aligned}$$

A $deg_k^-(d_j)$ a d_j azon bemenő éleinek száma, amelyek E_k elemei. Ha $|E_{k_f}| \neq 0$, ugrás a 7. lépésre.

6. **MINLP-megoldás (max-min folyammal rendelkező élek kiválasztása).**

Az $mMM_k^{(2)}$ -vel jelölt vegyes-egészértékű bilineáris programozási feladat megoldása:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} x_j^t, \\ & \text{f.h. } \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} f(l_j^t, d_j) x_j^t + \phi_k \cdot \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} (1 - x_j^t) + \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t = (1 - \epsilon) \cdot \sigma_k, \\ & \quad f(l_j^t, d_j) \geq \phi_k \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k, \\ & \quad f(l_j^t, d_j) > \phi_k x_j^t \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $x_j^t \in \{0, 1\}$.

7. **Fixálás (kiválasztott éleken folyam rögzítése).** A ϕ_k -ra vonatkozó aktív korlátok kikeresése, és a kapcsolódó letöltő éleken a folyam értékek rögzítése:

$$\begin{aligned}\Phi_k &:= \{(l_j^t, d_j) \in E_k \mid x_j^t = 0\}, \\ \ell_j^t &:= \phi_k, \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k \text{ ahol } x_j^t = 0, \\ F &:= F \cup \Phi_k, \quad E_{k+1} := E_k \setminus \Phi_k.\end{aligned}$$

8. **Megállási feltétel.** Ha $F = E_D$, megállunk. Különben $k := k + 1$ és ugrás a 4. lépésre.

Az algoritmus 1. lépésében egy jó alsó korlátot számítunk a folyam értékekre, ezt a 4. lépésben használjuk majd fel. A 2. lépésben meghatározzuk a hálózat maximális átvitelének mértékét abban az esetben, amikor minden letöltő élre az $f(l_j^t, d_j) \geq \phi$. Korábbi cikkünkben megmutattuk, hogy ez a σ -val jelölt szint az algoritmus minden iterációjában biztosítható. A következő lépésben inicializálunk: az F halmaz kezdetben üres, ez tartalmazza majd a rögzített folyam értékek azonosítóit; k a ciklusváltozó; E_k a k . iterációban rögzítetlen folyamokkal rendelkező élek halmaza; az utolsó iteráció után pedig ℓ_j^t tartalmazza minden $(l_j^t, d_j) \in E_D$ letöltő élre az optimális folyam értékét. A 4. lépésben kiszámítjuk a rögzítetlen folyamok max-min értékét, továbbá egy jó kezdő (fizibilis) megoldást a 6. lépés speciális MINLP-jéhez. Az 5. lépés egyfajta előmegoldás, szerepét a 3.5. szakaszban részletesebben bemutatjuk. Ez a lépés el is hagyható. A 6. lépésben állítjuk elő azt a max-min méltányos elosztást, ami egyúttal a σ átvitelt is garantálja (ϵ toleranciával, amit a lehetséges numerikus hibák miatt engedünk meg). Ennek a MINLP-nek a célja, hogy a 4. lépésben meghatározott max-min értéket a lehető legkevesebb élre rögzítsük egy-egy iteráció 7. lépésében. Végül, 4-től ismétljük a lépéseket, amíg minden élre meg nem határoztuk a max-min méltányos allokációt.

A 3.1. algoritmusnak természetesen sokféle variációja képzelhető el, a megvalósítás során érdemes lehet különféle modellezési „trükköket” alkalmazni. Korábbi cikkünk munkálatai közben mi magunk is többféle változtatást eszközöltünk a hatékonyság növelése érdekében, azonban az egyes változtatások hasznosságának igazolására akkor nem kerülhetett sor. A következőkben számbavesszük az általunk javasolt módosításokat, az 5. szakaszban pedig elemezzük az ezen módosítások kombinációjából előálló modell-változatok hatékonyságát a futási idő és az elért optimum érték tekintetében.

3.1. Egy redundáns korlát hozzáadása

A 3.1. algoritmus 4. lépésében szereplő $mMM_k^{(1)}$ jelzésű LP feladathoz hozzáadhatjuk a következő korlátot:

$$f_k \geq \phi. \quad (3)$$

Antal és Vinkó [1] 3. lemmája alapján a (3) korlát redundáns, és csak az első iterációban aktív, mivel az (1) jelzésű célfüggvény és a 7. fixáló lépés együttesen kikényszeríti, hogy $f_k > f_{k-1}$ minden k iterációra. Ugyanakkor benyomásunk

szerint az LP-megoldónak jelentős segítség, ha ez a fix alsó korlát is szerepel a feladatban.

3.2. Bilineáris vegyes-egészértékű feladat McCormick-átírása

A 3.1. algoritmus 6. lépésében szereplő $mMM_k^{(2)}$ jelzésű bilineáris programozási feladat helyettesíthető a McCormick-átírásával [11]. Ez az átírás egy ekvivalens vegyes-egészértékű lineáris programozási (MILP) feladatot eredményez, amelyben a bilineáris kifejezések helyére új, folytonos változókat vezetünk be:

$$p_j^t := f(l_j^t, d_j) \cdot x_j^t,$$

ahol $\forall (l_j^t, d_j) \in E_k : p_j^t \in \mathbb{R}^+$, továbbá $x_j^t \in \{0, 1\}$. Az $mMM_k^{(2)}$ feladat McCormick-átírása tehát a következő:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} x_j^t, \\ \text{f.h. } & \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} p_j^t + \phi_k \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} (1 - x_j^t) + \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t \geq (1 - \epsilon) \cdot \sigma, \end{aligned} \quad (4)$$

$$f(l_j^t, d_j) \geq \phi_k \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k,$$

$$f(l_j^t, d_j) > \phi_k x_j^t \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k,$$

$$\min(\delta_j x_j^t, f(l_j^t, d_j)) \geq p_j^t \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k, \quad (5)$$

$$\max(0, f(l_j^t, d_j) - \delta_j (1 - x_j^t)) \leq p_j^t \quad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k, \quad (6)$$

vagyis az eredeti (2) jelzésű korlátot lecseréljük (4)-re, és kiegészítjük a feladatot az (5) és (6) korlátokkal.

Habár a probléma dimenziója nő az átírás folytán, egy egzakt korlátozás és szétválasztás típusú megoldó alkalmazható az előálló MILP globális optimumának megtalálására [2].

A következőkben az algoritmus 6. lépésében szereplő MINLP-, ill. MILP-feladatokra gyűjtőnéven MIP-ként fogunk hivatkozni.

3.3. Kezdőértékadás a bináris változókra

Az $mMM_k^{(1)}$ optimális megoldása leképezhető $mMM_k^{(2)}$ egy fizibilis megoldásá-ra. Legyen

$$f_k^{(2)}(l_j^t, d_j) := f_k^{(1)}(l_j^t, d_j),$$

és

$$x_j^t := \begin{cases} 1 & \text{ha } f_k^{(1)}(l_j^t, d_j) > \phi_k \text{ és } (l_j^t, d_j) \in E_k, \\ 0 & \text{ha } f_k^{(1)}(l_j^t, d_j) = \phi_k \text{ és } (l_j^t, d_j) \in E_k. \end{cases}$$

Itt $f_k^{(y)}(l_j^t, d_j)$ a kapcsolódó $f(l_j^t, d_j)$ folyam értékeket jelöli az $mMM_k^{(y)}$ egy fizibilis megoldásában. Az $mMM_k^{(2)}$ feladat megoldása során segítséget jelenthet a bináris változókra vonatkozó kezdőértékek explicit megadása.

3.4. Kezdőértékadás a McCormick-átírás mesterséges változóira

Az $mMM_k^{(2)}$ McCormick-átírásának kezdőértéke csakugyan előállítható $mMM_k^{(2)}$ kezdőértékéből. Ehhez $mMM_k^{(2)}$ kezdőértékét bővítjük a p változókra vonatkozó értékekkel:

$$p_j^t := \begin{cases} f_k^{(1)}(l_j^t, d_j) & \text{ha } x_j^t = 1 \text{ és } (l_j^t, d_j) \in E_k, \\ 0 & \text{ha } x_j^t = 0 \text{ és } (l_j^t, d_j) \in E_k. \end{cases}$$

3.5. Előmegoldás, avagy folyamok rögzítése a folyammegmaradásra hivatkozva

A 3.1. algoritmus 5. lépése egy, az AMPL-előmegoldójában is megvalósított standard LP-előmegoldó technika [9, 10]. Az

$$E_{k_f} := \left\{ (l_j^t, d_j) \in E_k \mid \frac{c(d_j) - \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t}{deg_k^-(d_j)} = \phi_k \right\}$$

halmaz azokat a letöltő éleket tartalmazza, amelyekre a kapcsolódó $f(l_j^t, d_j)$ folyam értékek egyértelműen kiszámíthatóak a hálózat folyammegmaradási tulajdonsága alapján. A fenti kifejezésben $deg_k^-(d_j)$ a d_j csúcs azon bemenő éleinek számát jelöli, amelyeken a k . iterációban még nincs rögzített folyam.

Pontosabban, E_{k_f} minden elemére rögzíthető a ϕ_k folyamérték az algoritmus k . iterációjának 7. lépésében, méghozzá a 6. lépésben szereplő MIP megoldásától függetlenül. Ennek megfelelően az előmegoldást tartalmazó modellekben kimarad a MIP megoldása, amennyiben $E_{k_f} \neq \emptyset$ valamely k . iterációban.

Ha lenne olyan letöltő él, amelyre ϕ_k értékű folyamat kellene rögzíteni, de az előmegoldó ezt nem tudja megállapítani, úgy a következő iterációban ϕ_{k+1} értéke meg fog egyezni ϕ_k -val és a MIP megoldásra kerül. Legrosszabb esetben az iteráció számának duplázásával is járhat ez a megoldás, azonban az általunk tesztelt esetekben az iterációk jelentős részében szükséges fixálás megtörtént az előmegoldási fázisban, és csak az esetek töredékében volt szükség a MIP megoldására.

3.6. Modellváltozatok

A fent bemutatott módosítási javaslatok kombinációiból összesen tizenkettő modellváltozatot készítettünk, hogy a módosítások hasznosságát külön-külön, ill.

1. táblázat. *A vizsgált modellek áttekintése*

Modell	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
ref	•	•	•	•	•
1	•	•	•	•	
2	•	•	•		
3	•	•			
4	•				
5					
6			•		
7	•		•		
8	•		•		•
9			•		•
10	•				•
11					•

együttesen elemezni tudjuk (eredmények az 5. szakaszban). Az 1. táblázat összefoglalja, hogy melyik modell melyik korábbi alszakasz(ok)ban bemutatott módosítást tartalmazza. Referenciaként (**ref**) a korábban publikált matematikai modell [1] szolgált, amely minden módosítást tartalmazott, a többi modellt számokkal jelöltük.

4. Tesztesetek

Ahhoz, hogy a különböző algoritmusvariánsokkal numerikus hatékonysági vizsgálatokat készíthessünk, számos mesterségesen generált hálózatot készítettünk. Ebben a szakaszban ezen teszhálózatok előállításának módszereit közöljük.

Alapvetően három, lényegileg különböző típusú hálózatot gyártottunk, amelyek a következők:

Túlkereslet: Ebben az esetben a közösségben elérhető fájlok egy részét sokkal többen akarják letölteni, mint amennyien a teljes tartalommal rendelkeznek. A BitTorrent fogalmai szerint tehát ilyenkor nagyon sok letöltő és ehhez képes nagyon kevés megosztó van jelen. A hálózatokat úgy gyártottuk, hogy a fájlok véletlenszerűen választott 10%-ában legyen túlkereslet. Konkrétan a felhasználók fele letöltőként van jelen a kiválasztott tíz százalékban. Megjegyezzük, hogy ezek a felhasználók emellett letöltőként vagy feltöltőként részt vehetnek más fájlokban is. Az ilyen állapot általában akkor fordul elő valós BitTorrent közösségekben, amikor megjelennek rendkívül népszerű tartalmak, amire hirtelen nagyon sokan kíváncsiak.

Egyenletes: Itt minden fájlra teljesül egyfajta egyensúly, nagyjából ugyanannyi a letöltő, mint a megosztó.

Túlkínálat: Itt pedig a közösségben elérhető fájlokat sokkal többen kínálják letöltésre, mint amennyien azt ténylegesen le is töltik éppen. Tehát több megosztó van, mint letöltő. Érdekes módon valós BitTorrent közösségekben ez az állapot az, amely a legtöbbször előfordul. Ennek részben az a magyarázata, hogy az ilyen közösségekben a rögzített szabályok egyike általában előír bizonyos időtartamig történő rendelkezésre állást (seedelést), vagy pedig azt, hogy a letöltött mennyiség valamely részét fel kell tölteni a rendszerbe. Ez utóbbi hosszas időt vehet igénybe abban az esetben, ha a fájlra már csak csekély az érdeklődés.

Típusonként 9 teszhálózatot gyártottunk, amelyekben a felhasználók száma 100, 300 és 500 volt, míg a torrentek száma rendre 50, 100 és 200. Ami a sávszélességeket illeti (amely a folyam hálózatban az élek kapacitását jelenti), mindegyik hálózatban véletlenszerűen választottunk értékeket, egyenletes eloszlással, mégpedig a feltöltő élekre a [128, 2048] intervallumból, míg a letöltő élekre az [512, 4096] intervallumból. A gráfok méretét a 2. táblázatban foglaltuk össze. Vegyük észre, hogy minden gráfban a pontok száma jelentősen több, mint a felhasználók és torrentek száma. Ennek a magyarázata, hogy bemenetként nem páros gráfot kell megadnunk, hanem a 2. fejezetben említett hármas gráfot, amelyben elsősorban a köztes (L halmazba tartozó) csúcsok száma lesz magas.

2. táblázat. *A teszteléshez használt gráfok csúcsainak száma (n) és éleinek száma (m)*

user-torrent	egyenletes		túlkereslet		túlkínálat	
	n	m	n	m	n	m
100-50	653	10 447	307	3 850	827	24 229
100-100	1 172	21 734	513	8 111	1 561	48 872
100-200	2 135	40 206	919	16 201	2 992	99 686
300-50	3 279	255 412	963	37 082	2 571	218 375
300-100	5 837	523 330	1 603	75 338	4 664	433 011
300-200	10 748	1 015 084	2 710	142 701	14 782	2 407 987
500-50	1 913	85 316	1 597	101 097	4 252	598 766
500-100	3 395	175 709	2 626	204 077	7 827	1 203 877
500-200	6 376	357 693	4 690	411 916	14 818	2 417 266

A valós BitTorrent közösségekből származtatható gráfok az itt vizsgáltaknál jóval nagyobb méretűek, ugyanakkor nem feltétlenül reprezentálnak olyan eseteket, amelyeket itt vizsgáltunk. A kisebb méret továbbá lehetővé teszi, hogy kivártható időn belül legyen megoldásunk.

5. Eredmények

5.1. Tesztkörnyezet leírása

A hálózat összetételének, valamint a megoldás során alkalmazott matematikai modellnek a megoldó (solver) program hatékonyságára gyakorolt hatását szeretnénk volna megállapítani, ezért kiterjedt numerikus tesztelést végeztünk. A 3. szakaszban bemutatott *tizenkettő modellváltozat*, a 4. szakasz *huszonhét tesztete* és *kettő professzionális megoldó* minden lehetséges kombinációjára *három futtatást* végeztünk.

Az algoritmus-variánsok AMPL-nyelven voltak kódolva. A Gurobi- és a MOSEK-solvert vettük górcső alá, mivel ez a két általános nemlineáris megoldó állt rendelkezésünkre, amelyek a szóban forgó modellek optimalizálási feladatait kívártható időn belül meg tudták oldani. Mindkét megoldót az alapértelmezett paraméterekkel működtettük. A tesztek egy 24 magos Intel Xeon 2,27 GHz-es számítógépen futottak, ahol 24 GB memória állt rendelkezésre.

5.2. Gurobi

A 3–5. táblázatok a Gurobi-megoldóval elért átlagos futási időket mutatják a különböző feladatosztályokra. Megjegyezzük, hogy bizonyos modell–tesztet–megoldó kombinációkra, valószínűleg a feladat bonyolultságából adódó nagy tár-igény miatt, mindhárom futtatáskor szegmentálási hibával állt le az AMPL. Ezeket az eseteket „n.a.” jelöli a táblázatokban.

A megértés segítésére minden további táblázatra vetítettünk egy, az adatokból készült hőtérképet is, a következő színskála alapján:

0	50	500	5 000	50 000	500 000
---	----	-----	-------	--------	---------

Továbbá minden oszlopban aláhúzással jelöltük a minimumot.

Mindenekelőtt szembeötlő, hogy a hálózat felépítése rendkívüli mértékben befolyásolja a megoldó sebességét. Az egyenletes típusú hálózatokra lehetett a leggyorsabban kiszámítani a max-min méltányos erőforrás-elosztást, a futási idő átlaga itt 475 másodperc volt. A túlkeresletet mutató hálózatokban az átlagos futási idő egy nagyságrenddel nagyobb, 5 380 másodperc volt, míg a túlkínálatot mutató hálózatokon dolgozott legtovább a megoldó, átlagosan ismét egy nagyságrenddel tovább, 41 940 másodpercig.

Az 1–3. algoritmusvariánsok minden tesztetre a leglassabbnak bizonyultak, a 2. és 3. variáns több esetben szegmentálási hibával állt le. Az 1. variáns az 5.-hez képest átlagosan 59%-kal lassabban futott, a referenciához viszonyítva tehát átlagosan több, mint négyszeres futási időt igényelt. Ugyanakkor a 8. variáns a referenciához viszonyítva átlagosan 4%-kal rövidebb futási időket produkált.

3. táblázat. *A futási idő átlaga Gurobi-megoldóval a túlkeresletet mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	10,07	18,19	45,94	325,74	673,29	1 646,35	1 571,61	4 156,12	10 037,23
1	24,70	52,59	163,54	1 005,58	2 893,92	10 131,24	6 372,63	22 021,62	74 968,79
2	24,28	57,54	178,90	1 032,78	n.a.	11 193,77	6 662,24	24 129,19	81 453,34
3	24,37	55,31	171,21	1 014,39	n.a.	11 223,16	6 696,87	26 537,26	n.a.
4	19,95	34,52	106,72	637,97	1 550,51	4 406,24	3 417,54	9 616,70	24 960,11
5	19,40	36,94	119,00	624,85	1 611,28	4 884,42	3 544,83	9 812,69	26 715,23
6	19,25	36,23	109,95	599,36	1 982,60	6 648,88	3 290,78	8 479,57	22 512,50
7	16,08	27,04	90,44	574,74	1 880,29	6 200,34	3 089,95	7 892,06	20 627,51
8	8,68	14,76	42,13	304,23	696,97	1 854,49	1 626,95	4 081,75	10 172,45
9	9,15	17,78	59,14	348,47	785,58	2 228,94	1 699,07	4 561,72	12 356,00
10	9,23	14,57	52,28	302,89	699,93	1 849,76	1 622,43	4 074,37	10 322,80
11	9,24	19,13	65,44	353,52	765,38	2 287,31	1 785,71	4 582,57	12 446,04

4. táblázat. *A futási idő átlaga Gurobi-megoldóval az egyenletes keresletet mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	1,78	3,26	6,78	52,74	95,49	202,50	240,21	506,27	1 229,56
1	4,39	8,71	17,19	130,11	238,36	529,75	567,47	1 281,63	3 038,54
2	4,43	9,87	20,11	125,07	264,64	623,30	657,11	1 365,29	3 352,50
3	4,44	9,52	20,73	136,39	254,63	618,02	654,93	1 303,40	3 355,22
4	3,40	6,87	14,39	103,26	199,23	492,47	449,93	1 411,48	2 837,84
5	3,31	6,88	14,69	101,57	201,26	707,21	454,40	1 241,90	2 699,43
6	3,07	6,72	15,03	93,24	200,98	590,48	449,03	1 179,65	2 359,24
7	3,03	6,61	15,03	98,02	198,27	590,40	442,46	1 096,27	2 488,53
8	1,55	3,26	7,83	50,19	107,44	230,83	217,54	750,42	1 315,50
9	1,59	3,14	7,83	46,81	106,70	258,43	220,95	506,30	1 125,56
10	1,54	3,30	7,56	50,32	106,27	235,28	244,48	487,59	1 162,61
11	1,54	3,14	8,39	50,98	106,82	269,73	208,76	495,27	1 156,44

5. táblázat. *A futási idő átlaga Gurobi-megoldóval a túlkínálatot mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	44,62	99,71	394,93	1 767,19	3 602,11	44 689,13	10 101,58	19 961,00	142 826,03
1	164,46	437,85	1 816,25	11 773,90	23 278,35	368 166,92	66 839,67	166 285,16	393 350,03
2	203,01	410,63	1 885,52	11 005,87	n.a.	369 862,33	67 409,98	171 311,61	400 560,57
3	204,05	417,74	1 743,20	11 535,95	n.a.	n.a.	61 739,13	169 778,28	n.a.
4	133,54	281,15	1 359,30	6 527,94	19 146,21	110 138,40	41 315,39	82 407,80	124 545,26
5	133,68	332,27	1 596,19	7 481,82	20 126,71	120 270,78	43 926,90	86 053,85	123 590,57
6	118,68	312,86	1 350,50	6 805,64	18 939,62	93 867,99	39 201,74	76 569,01	104 913,93
7	87,75	321,38	1 385,52	6 197,48	17 703,81	87 309,58	38 955,36	72 105,72	94 794,07
8	52,84	85,87	406,71	1 741,15	3 756,55	30 590,76	7 767,45	17 273,40	28 178,77
9	59,06	125,65	516,26	1 842,90	4 019,89	34 418,82	8 535,70	19 165,41	34 922,32
10	57,75	109,89	375,08	1 981,35	4 090,36	29 545,93	8 203,24	16 128,15	27 372,15
11	60,25	124,50	454,04	2 064,10	4 357,51	37 142,15	9 126,37	18 057,12	35 088,72

Megállapítható tehát, hogy a 3.2. alszakaszban bemutatott McCormick-átírás alkalmazása az előmegoldás nélkül jelentősen, de az előmegoldással együtt is kismértékben bonyolítja a feladatot.

A 3.4. alszakaszban felvázolt kezdőértékadás, az 1. és 2. variáns eredményeire alapozva, az esetek 84%-ában javított a futási időn, átlagosan 6%-kal.

A 3.3. alszakasz kezdőértékadása, a 2. és 3. variáns összevetése alapján a McCormick-átírással kombinálva tizenegy esetben, vagyis az összevethető esetek 50%-ában lassított némileg a megoldáson. Ugyanakkor az 5. és 6. variáns alapján, tehát csupán a kezdőértékadás hatását vizsgálva kedvezőbb a helyzet: az esetek 89%-ában gyorsabb volt a 6. variáns, átlagosan 6%-kal. Úgy tűnik továbbá, hogy a hálózat típusától függ a javulás nagysága: míg a túlkeresletet mutató példákban 1%-os lassulást eredményezett a kezdőértékadás, az egyenletes hálózatokban 6%-kal gyorsabb, míg a túlkínálatot mutató hálózatokban 12%-kal gyorsabb volt a 6. variáns. A 4. és 7., 10. és 8., valamint 11. és 9. variánsok futási idejét is összehasonlítva, a 3.3. alszakasz kezdőértékadását implementáló modellek átlagosan mintegy 3%-kal voltak gyorsabbak a kezdőértékadást mellőző, minden egyéb tekintetben megegyező variánsoknál.

A 3.1. alszakaszban bemutatott redundáns korlát hozzáadása a 4. és 5. variáns összehasonlításában 7 esetet leszámítva segít a Gurobinak, átlagosan mintegy 4%-kal futott gyorsabban a 4. variáns. Ebben a tekintetben azonban igen nagy a szórás, a legjobb esetben 30%-kal is gyorsabb volt a 4. variáns, a legrosszabb esetben azonban 13%-kal lassabb. A 10. és 11. variáns az előmegoldót is implementálja, ebben a kontextusban nagyobb hasznot hozott a plusz korlát: átlagosan

9%-kal gyorsabban futott a 10. variáns. A 6. és 7., valamint a 8. és 9. variánst is figyelembe véve átlagosan 6%-os javulást eredményez a futási idő tekintetében a 3.1. alszakaszban tárgyalt módosítás. Érdemes megfigyelni, hogy az egyenletes kínálatot mutató gráfokra csak kis mértékű javulást, ill. bizonyos esetekben lassulást eredményez ez a módosítás.

Mindhárom típusú hálózatban a 3.5. alszakasz előmegoldóját megvalósító öt algoritmusvariáns (a referencia és a 8-11.) produkálta a legrövidebb átlagos futási időket, a 8. és 10. variáns hasonló idővel a két leggyorsabb volt. A referencia algoritmus átlagosan 58%-kal gyorsabban futott, mint a 3. szakaszban bemutatott módosításokat nélkülöző 5. variáns, habár egyetlen esetben 16%-kal lassabb volt annál (az 500 felhasználót és 200 torrentet tartalmazó példán a túlkínálatos teszt-halmazban). Összevetve a referencia algoritmust az 1. variánssal, továbbá a 8. és 7., 9. és 6., 10. és 4., valamint a 11. és 5. variánsok futási idejét, az előmegoldó beépítése 32–88%-kal (átlagosan 61%-kal) gyorsította meg a végrehajtást.

A megoldás minőségét tekintve nem volt jelentős különbség az egyes algoritmusvariánsok között. A többszöri futtatás eredményei is identikusak voltak, csak a futási idők különböztek.

A futási idők variációs koefficienseit mutatja a 6–8. táblázat. A variációs koefficiens tulajdonképpen az átlaggal normált szórás százalékos formája. A tesztesetek eltérő mérete miatt a szórást ebben az esetben nincs értelme összehasonlítani.

A Gurobi által igényelt futási idők átlagos variációs koefficiense mintegy 19% volt a teljes adathalmazra.

5.3. MOSEK

A 9–11. táblázatok a MOSEK-megoldóval elért átlagos futási időket mutatják. A Gurobival összehasonlítva ez a megoldó az esetek 65%-ában lassabb volt: a túlkeresletet mutató hálózatokra átlagosan 56%-kal, az egyenletes keresletet mutató hálózatokra 151%-kal, míg a túlkínálatot mutató hálózatokra átlagosan 20%-kal több időt igényelt, mint a Gurobi.

A hálózat felépítésétől itt is nagy mértékben függött a megoldó sebessége. Az arányok a Gurobihoz hasonlóak voltak: az egyenletes típusú hálózatok max-min méltányos erőforrás-elosztását átlagosan 884 másodperc alatt lehetett kiszámítani, a túlkeresletet mutató hálózatokra ugyanez 3 966 másodpercig tartott, a túlkínálatot mutató hálózatokra pedig átlagosan 34 649 másodpercig.

Érdekes, hogy a 4–7. algoritmusvariánsok produkálták a leggyorsabb futási időket, ugyanakkor a MOSEK ezekre a modellekre jelentősen eltérő optimumot talált mind a három teszt-halmazban, mint a Gurobi. A többi esetben nem volt jelentős eltérés a különböző variánsok által talált optimumban. Felmerül a kérdés, hogy egyáltalán itt miről is van szó. Az algoritmus végeredményként egy valós számokból álló vektort ad meg, amelynek hossza megegyezik az E_D letöltő élek halmazának méretével. Mivel a használt programok lebegőpontos műveleteket végeznek, ezért kerekítési hiba előfordulhat, amely befolyásolhatja a végeredményt.

6. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense Gurobi-megoldóval a túlkeresletet mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	37,03	33,80	18,61	27,12	20,64	25,82	18,35	23,75	22,83
1	34,34	37,36	16,41	21,98	<u>20,05</u>	21,80	<u>17,62</u>	<u>20,01</u>	25,10
2	27,51	40,27	18,49	21,23	n.a.	23,50	<u>20,42</u>	<u>22,06</u>	26,76
3	25,44	33,19	13,69	21,14	n.a.	19,76	21,31	21,88	n.a.
4	35,66	30,57	34,26	22,45	26,29	20,16	20,74	22,31	23,46
5	35,38	26,25	32,78	<u>19,59</u>	22,42	22,45	21,55	21,47	22,68
6	37,45	27,75	28,32	20,41	26,28	<u>17,84</u>	22,44	22,52	<u>21,89</u>
7	<u>14,44</u>	1,34	21,07	20,94	23,22	17,96	20,95	23,24	22,52
8	18,46	4,78	2,70	22,50	25,10	21,53	22,45	22,38	22,57
9	20,80	5,30	17,75	25,92	27,02	21,58	19,57	21,48	22,57
10	29,47	<u>1,15</u>	36,84	21,31	27,73	21,35	22,01	21,49	22,81
11	27,70	12,88	34,04	25,58	24,55	23,15	22,32	21,50	22,78

7. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense Gurobi-megoldóval az egyenletes keresletet mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	17,45	23,02	<u>6,03</u>	28,77	13,98	8,29	12,43	13,99	23,03
1	23,83	16,00	<u>12,12</u>	35,90	3,83	5,72	19,80	18,73	11,56
2	21,91	23,19	14,36	19,28	11,32	8,95	32,06	11,79	10,56
3	22,74	24,15	9,63	35,74	7,22	<u>5,22</u>	35,39	<u>11,63</u>	4,09
4	5,91	22,50	13,23	25,50	2,37	16,45	5,09	49,64	9,21
5	2,22	25,77	9,78	23,76	<u>1,37</u>	62,09	6,06	19,17	24,89
6	2,28	24,43	20,24	13,04	3,44	24,36	10,39	13,00	5,52
7	1,65	21,93	16,55	15,11	5,51	22,92	7,18	18,24	13,47
8	1,98	22,63	25,86	13,38	9,50	10,33	2,90	64,26	13,00
9	4,36	13,10	18,96	<u>3,19</u>	10,35	24,54	5,61	12,18	<u>3,64</u>
10	3,81	21,62	20,45	22,44	9,01	10,38	21,32	14,35	6,54
11	<u>0,65</u>	<u>11,80</u>	24,34	18,98	5,57	23,60	<u>2,00</u>	14,04	6,74

8. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense Gurobi-megoldóval a túlkínálatot mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	17,10	20,36	22,37	16,83	4,78	41,50	20,69	34,38	31,64
1	26,17	25,88	9,06	16,56	11,01	30,07	9,71	18,32	37,32
2	27,29	15,03	<u>6,16</u>	<u>1,56</u>	n.a.	42,28	<u>1,98</u>	15,26	36,69
3	25,43	20,85	12,53	11,36	n.a.	n.a.	5,83	20,39	n.a.
4	11,80	20,69	17,55	6,55	<u>4,23</u>	31,12	7,09	21,16	26,06
5	26,36	12,10	13,78	7,30	15,90	23,56	14,22	23,00	31,46
6	37,25	11,84	16,64	16,64	10,66	19,74	13,09	27,30	31,68
7	26,02	18,37	17,01	9,26	9,25	21,96	11,15	27,84	<u>23,61</u>
8	42,45	<u>11,62</u>	25,16	18,88	21,21	20,88	13,95	22,66	<u>27,23</u>
9	29,26	25,73	28,06	7,49	8,20	17,65	8,08	21,25	29,25
10	20,47	24,51	19,52	15,42	18,49	<u>17,27</u>	13,57	<u>14,44</u>	35,02
11	<u>11,00</u>	33,34	32,51	18,38	14,41	30,56	23,31	16,11	29,43

9. táblázat. *A futási idő átlaga MOSEK-megoldóval a túlkeresletet mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	24,37	<u>31,81</u>	100,39	786,25	2 322,84	2 832,95	3 142,39	8 264,79	15 530,16
1	53,75	114,94	538,45	1 994,33	5 640,38	8 206,87	7 911,81	n.a.	43 842,91
2	52,79	196,94	393,44	2 004,40	4 371,85	8 574,19	7 814,97	n.a.	44 410,97
3	48,31	157,22	431,42	2 032,38	3 753,17	7 766,67	7 069,46	n.a.	n.a.
4	<u>12,85</u>	92,43	79,79	852,03	263,57	3 769,14	2 492,32	<u>6 322,74</u>	12 820,44
5	17,44	63,43	116,95	784,68	162,88	3 341,78	2 823,70	7 433,14	12 754,80
6	19,24	53,13	124,65	762,61	<u>162,81</u>	3 428,15	2 820,49	7 370,58	12 542,12
7	14,04	66,16	38,96	764,09	262,85	3 600,78	2 460,55	6 625,07	12 327,43
8	18,92	46,49	132,29	<u>703,70</u>	1 522,22	3 123,00	2 942,77	7 480,00	12 915,44
9	20,01	49,45	115,92	706,56	1 488,22	3 179,90	2 970,85	7 754,06	12 472,33
10	19,77	40,55	116,00	837,10	1 487,42	2 918,84	2 923,90	7 171,64	13 249,78
11	17,87	34,08	96,26	853,30	1 484,55	3 002,99	3 007,52	6 993,45	12 526,17

10. táblázat. *A futási idő átlaga MOSEK-megoldóval az egyenletes keresletet mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	4,43	31,50	26,48	104,31	277,44	507,66	849,05	1 348,94	3 086,97
1	11,99	66,68	80,08	330,60	1 318,99	2 822,21	1 820,59	3 997,72	8 825,78
2	14,00	55,81	65,27	364,01	1 589,55	1 423,26	1 768,54	3 850,90	8 493,37
3	16,88	33,09	54,89	282,29	1 003,68	1 204,61	1 492,53	3 557,27	8 115,97
4	3,99	25,59	15,79	51,63	120,08	187,58	158,41	475,96	2 112,55
5	4,71	22,75	16,51	44,06	78,10	173,78	438,64	1 491,71	1 116,60
6	4,46	22,98	22,46	50,81	80,89	155,47	526,75	1 339,68	1 035,96
7	4,10	24,42	20,09	74,23	70,36	153,93	164,91	383,88	1 959,77
8	5,59	9,60	20,23	156,57	276,25	490,52	622,67	1 294,38	3 048,18
9	5,64	18,10	17,07	116,46	337,68	454,45	811,89	1 376,10	2 860,50
10	5,82	19,40	17,03	111,70	428,71	475,50	890,35	1 301,00	2 786,75
11	6,43	12,59	16,09	104,67	370,40	467,71	672,61	1 286,03	3 057,83

11. táblázat. *A futási idő átlaga MOSEK-megoldóval a túlkínálatot mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	89,05	151,76	444,85	4 507,05	6 306,93	75 623,57	21 554,93	46 478,14	79 790,16
1	233,39	385,46	1 486,71	11 195,84	18 563,54	231 112,80	53 257,07	130 143,77	238 281,27
2	234,78	414,23	1 393,63	12 414,49	20 058,58	240 579,41	53 556,80	127 726,95	234 208,96
3	238,75	384,34	1 239,84	11 223,46	17 062,86	200 349,91	48 026,53	109 517,87	206 670,79
4	125,17	203,71	743,85	5 685,84	8 438,62	80 322,97	23 689,90	20 777,48	50 918,92
5	103,52	223,73	719,30	4 924,70	5 386,52	65 981,88	24 691,29	12 603,89	49 730,91
6	71,94	231,58	610,23	5 289,23	5 521,25	65 418,69	24 371,14	12 235,95	49 122,63
7	79,34	234,52	800,96	5 645,32	8 211,28	74 196,66	24 576,94	23 006,69	54 052,46
8	71,53	189,45	520,43	4 347,72	6 983,93	65 769,86	21 785,44	39 517,99	71 876,95
9	78,30	152,02	501,05	4 381,32	6 500,54	66 224,38	21 597,08	37 839,99	70 950,75
10	83,25	137,53	527,78	4 974,26	6 469,97	66 024,15	20 479,21	37 763,42	67 863,08
11	89,08	134,40	461,94	5 126,51	6 951,19	63 601,68	20 635,79	40 666,32	66 916,01

Jelen esetben pontosan ezt tapasztaltuk, tehát a két megoldó a kerekítési hibákra különbözőképpen érzékeny.

A Gurobihoz hasonlóan itt is a McCormick-átírást megvalósító 1–3. algoritmusvariánsok voltak a leglassabbak, mindhárom produkált szegmentálási hibát is a legnagyobb feladatokon.

A 3.4. alszakasz kezdőértékadása, a 3.3. alszakasz kezdőértékadása, és a 3.1. alszakasz redundáns korlátja átlagosan mintegy 4%, 3%, ill. 5% lassulást eredményezett a MOSEK-megoldóval kombinálva.

A referencia átlagosan 65%-kal gyorsabban futott, mint az 1. algoritmusvariáns, ráadásul ebben az összehasonlításban (tehát a McCormick-átírással kombinálva) minden esetben több, mint 50%-os gyorsulást eredményezett a 3.5. alszakasz előmegoldója. Ugyanakkor a 8–11. algoritmusvariánsokat az előmegoldót nem implementáló párjaikkal összehasonlítva átlagosan 67%-os lassulást tapasztaltunk a MOSEK esetében.

A futási idők variációs koefficienseit a 12–14. táblázat tartalmazza. A MOSEK által igényelt futási idők átlagos variációs koefficiense a Gurobitól nagyobb, átlagosan 30% volt a teljes adathalmazra.

5.4. Konklúzió

A 15. táblázat tartalmazza egy-egy algoritmusvariáns átlagos futási idejét az egyes tesztalalmazokra. A 300 felhasználót és 100, ill. 200 torrentet, továbbá az 500 felhasználót és 100, ill. 200 torrentet tartalmazó teszteseteket mellőztük az átlagszámítás során, hogy a szegmentálási hiba miatt hiányzó adatok (ld. az 5.2. alfejezet eleje) ne torzítsák az eredményt.

A cikkben közölt tesztek eredményei alapján a következő tanulságokat vonhatjuk le:

- A hálózat felépítésétől rendkívüli mértékben függ a megoldó sebessége. Az egyenletes típusú hálózatokra a leggyorsabb, a túlkínálatot mutató hálózatokra pedig a leglassabb kiszámítani a max-min méltányos erőforrás-elosztást. A sebesség nagyjából arányos az alkalmazott speciális hármas gráf reprezentáció csúcseinak és éleinek a számával.
- A Gurobi általában gyorsabban oldotta meg a feladatot, és kevésbé volt érzékeny a kerekítési hibákra, mint a MOSEK. Ugyanakkor a Gurobi több tesztesetre produkált szegmentálási hibát.
- A Gurobi kedvezőbben reagált a cikkben szereplő modellátírásokra.
- A 3.2. alszakaszban bemutatott McCormick-átírás alkalmazása minden esetben lassította a megoldást. Ez meglepő és egyben pozitív eredmény, amellyel kimutattuk, hogy a tesztelt megoldók könnyebben boldogultak a kisebb méretű nemlineáris feladattal, mint a nagyobb méretű lineáris változattal.

12. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense MOSEK-megoldóval a túlkeresletet mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	65,26	<u>23,93</u>	49,54	31,92	73,51	<u>22,95</u>	10,98	29,21	24,87
1	41,64	65,23	107,28	28,85	66,07	23,65	7,97	n.a.	31,11
2	39,94	111,42	83,50	29,34	35,13	24,31	7,20	n.a.	32,89
3	44,45	103,21	100,73	35,36	24,82	30,37	7,70	n.a.	n.a.
4	33,08	115,95	135,16	27,09	22,69	23,61	12,82	17,03	18,87
5	40,93	112,76	126,79	26,06	24,67	27,89	9,64	9,47	20,25
6	56,65	103,42	129,77	21,47	21,36	29,63	9,27	16,56	20,53
7	47,87	93,97	97,79	19,17	<u>19,97</u>	30,95	10,72	17,79	14,93
8	39,89	73,25	83,44	17,28	<u>24,93</u>	31,32	7,85	14,84	<u>8,09</u>
9	45,95	81,40	68,19	<u>16,28</u>	22,77	44,87	8,47	12,12	8,64
10	42,73	62,07	69,34	41,11	22,03	36,62	<u>6,68</u>	6,41	10,67
11	<u>28,01</u>	39,27	<u>48,05</u>	44,45	21,88	36,85	<u>10,25</u>	<u>3,92</u>	8,53

13. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense MOSEK-megoldóval az egyenletes keresletet mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	7,33	141,23	38,84	13,61	44,22	22,92	30,54	11,74	11,63
1	<u>6,40</u>	119,65	59,99	20,47	88,08	85,49	4,73	<u>6,23</u>	4,04
2	24,65	100,17	62,14	6,99	102,51	<u>1,67</u>	<u>2,62</u>	11,90	4,30
3	44,02	56,41	43,35	18,98	71,41	7,01	3,40	19,66	5,79
4	36,18	98,00	49,05	11,96	87,76	6,42	8,46	29,16	18,54
5	36,86	61,39	26,39	16,12	50,71	10,28	18,36	17,86	24,11
6	30,77	52,55	71,77	16,70	65,96	13,72	42,35	8,51	8,91
7	23,32	90,66	85,02	58,06	49,42	7,78	3,81	11,45	7,64
8	13,79	56,88	53,72	31,80	<u>25,18</u>	10,77	9,58	8,64	7,92
9	12,31	69,97	32,70	<u>2,56</u>	58,58	13,61	40,86	10,11	9,09
10	11,36	71,84	<u>23,41</u>	15,93	89,39	5,57	32,99	11,13	<u>3,53</u>
11	22,53	<u>43,54</u>	41,41	20,89	56,87	8,02	8,90	9,63	4,86

14. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense MOSEK-megoldóval a túlkínálatot mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	29,25	<u>7,57</u>	24,14	<u>2,59</u>	10,76	27,78	14,36	15,56	<u>17,52</u>
1	22,50	16,73	<u>8,48</u>	5,56	8,55	<u>20,15</u>	12,72	7,10	19,83
2	13,62	23,59	17,34	6,83	14,59	<u>21,13</u>	10,53	5,21	31,88
3	27,39	41,50	25,06	6,65	14,30	31,39	12,56	5,85	28,28
4	<u>9,77</u>	24,58	21,49	5,30	5,71	28,74	10,37	9,90	22,38
5	14,64	18,95	26,74	13,33	13,24	20,51	8,89	4,65	20,40
6	22,50	20,60	10,38	12,79	6,53	21,00	9,60	<u>4,35</u>	19,19
7	14,93	16,78	16,81	16,00	8,24	20,33	13,32	12,91	26,02
8	17,59	22,36	33,58	11,17	15,05	25,69	19,84	15,08	29,04
9	18,60	12,54	20,73	9,91	5,63	30,06	<u>7,03</u>	10,64	32,64
10	40,88	16,28	28,19	8,60	<u>5,59</u>	27,76	12,40	18,82	31,31
11	32,82	7,70	20,34	17,81	8,25	25,50	14,45	17,84	34,86

15. táblázat. *Egy-egy modell-változat átlagos futási ideje (másodperc)*

	Gurobi			MOSEK		
	túlkéréslet	egyenletes	túlkínálat	túlkéréslet	egyenletes	túlkínálat
ref	394,31	60,95	2 481,61	817,04	203,15	5 349,53
1	1 523,81	145,57	16 206,43	2 122,66	461,99	13 311,69
2	1 591,15	163,32	16 183,00	2 092,51	453,53	13 602,79
3	1 592,43	165,20	15 128,01	1 947,76	375,94	12 222,58
4	843,34	115,57	9 923,46	705,88	<u>51,08</u>	6 089,69
5	869,00	116,17	10 694,17	761,24	105,33	6 132,51
6	811,11	113,42	9 557,88	756,02	125,49	6 114,82
7	759,65	113,03	9 389,50	668,76	57,55	6 267,42
8	399,35	56,07	<u>2 010,80</u>	768,83	162,93	5 382,91
9	426,72	56,06	2 215,91	772,56	193,83	5 341,95
10	400,28	61,44	2 145,46	787,46	208,86	<u>5 240,41</u>
11	446,61	<u>54,56</u>	2 365,85	801,81	162,48	5 289,54

- A mesterséges változókra vonatkozó kezdőértékadás (3.4. alszakasz) hatása az alkalmazott megoldótól és a feladat típusától függően változott, az összes teszt átlagában $+1,01\%$ volt.
- A bináris változókra vonatkozó kezdőértékadás (3.3. alszakasz) hatása az alkalmazott megoldótól és a feladat típusától függően változott, az összes teszt átlagában elenyésző, mindössze $+0,06\%$ volt.
- A 3.1. alszakaszban leírt fix alsó korlát hozzáadása az alkalmazott megoldótól és a feladat típusától függően eltérő hatást gyakorolt, az összes teszt átlagában $+0,66\%$ javulást eredményezett a megoldás sebességében.
- A cikkben szereplő modellátírások közül a 3.5. alszakaszban bemutatott előmegoldó hatása a legkedvezőbb, az összes teszt átlagában $+9,75\%$ javulást eredményezett.
- Nem volt olyan algoritmusvariáns, amely minden teszthalmaz esetén egyértelműen a legjobb lett volna, még azonos megoldó esetében sem.

6. Összefoglalás

Jelen cikkben egy komplex, nagyméretű lineáris és vegyes-egészértékű nemlineáris optimalizálási feladatokat is felvonultató probléma kapcsán elemeztük a matematikai modellezés során felmerülő átírási lehetőségek hatásait. Kiterjedt numerikus tesztelést végeztünk tizenkét modellváltozat, huszonhét teszteset és kettő professzionális megoldó minden lehetséges kombinációjával.

Az elvégzett kísérletek számos érdekes eredménnyel szolgáltak. Egyrészt megállapíthatjuk, hogy nem találtunk olyan modellváltozatot, amely minden esetben a leggyorsabban oldotta meg a feladatot. Láttuk továbbá, hogy a tesztelt korszerű megoldók számára nem jelentett problémát a bilineáris felírás hatékony megoldása. Végül ismét kiemelendő az előmegoldó (presolve) technikák használatának jelentős előnye.

Tovább lépésként tervezzük megvizsgálni a modellek hálózati folyam alakú felírásának hatásvizsgálatát, amelyre az AMPL-nyelv lehetőséget ad. Ezután pedig az elvégzett kísérletek egyfajta megfordítása következhet, amelyben a bemenetként megadott gráfok szerkezetének mélyebb elemzésével kimutatjuk, hogy az egyes algoritmus variánsoknak mely gráfok a legkedvezőbbek a megoldás hatékonyságának szempontjából.

Köszönetnyilvánítás

Vinkó Tamást az MTA Bolyai-ösztöndíja támogatta.

Hivatkozások

- [1] ANTAL, E., AND VINKÓ, T.: *Modeling max-min fair bandwidth allocation in BitTorrent communities*, Computational Optimization and Applications **66:2** (2017), 383–400.
- [2] BONAMI, P., KILINÇ, M., AND LINDEROTH, J.: *Algorithms and Software for Convex Mixed Integer Nonlinear Programs*, vol. **154** of The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer (2012), 1–39.
- [3] CAPOTĂ, M., ANDRADE, N., VINKÓ, T., SANTOS, F., POUWELSE, J., AND EPEMA, D.: *Inter-swarm resource allocation in BitTorrent communities*, In Proceedings of IEEE International Conference on Peer-to-Peer Computing (P2P 2011) (2011), 300–309.
- [4] COHEN, B.: *The BitTorrent Protocol Specification*, http://bittorrent.org/beps/bep_0003.html. Utolsó letöltés: 2017. április 24.
- [5] COHEN, B.: *Incentives build robustness in BitTorrent*, In Workshop on Economics of Peer-to-Peer systems (2003), Vol. **6**, 68–72.
- [6] DANA, C., LI, D., HARRISON, D., AND N. CHUAH, C.: *BASS: BitTorrent Assisted Streaming System for Video-on-Demand*, In 2005 IEEE 7th Workshop on Multimedia Signal Processing (2005 okt.), 1–4.
- [7] DO, T. T., HUA, K. A., AND TANTAOU, M. A.: *P2VoD: providing fault tolerant video-on-demand streaming in peer-to-peer environment*, In Communications, 2004 IEEE International Conference on (2004 jún.), Vol. **3**, 1467–1472.
- [8] FAN, B., LUI, J.-S., AND CHIU, D.-M.: *The Design Trade-Offs of BitTorrent-Like File Sharing Protocols*, IEEE/ACM Transactions on Networking **17:2** (2009 ápr.), 365–376.
- [9] FOURER, R., AND GAY, D. M.: *Experience with a Primal Presolve Algorithm*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994), 135–154.
- [10] GAY, D. M.: *Symbolic-Algebraic Computations in a Modeling Language for Mathematical Programming*, Springer-Verlag (2001), 99–106.
- [11] GUPTA, A., AHMED, S., CHEON, M., AND DEY, S.: *Solving Mixed Integer Bilinear Problems Using MILP Formulations*, SIAM J. Optim. **23:2** (2013), 721–744.
- [12] LI, B., WANG, Z., LIU, J., AND ZHU, W.: *Two Decades of Internet Video Streaming: A Retrospective View*, ACM Trans. Multimedia Comput. Commun. Appl. **9:1s** (2013 okt.), **33:1–33:20** o.
- [13] PARIS, J. F., AND SHAH, P.: *Peer-to-Peer Multimedia Streaming Using BitTorrent*, In 2007 IEEE International Performance, Computing, and Communications Conference (2007 ápr.), 340–347.
- [14] RADUNOVIĆ, B., AND LE BOUDEC, J.-Y.: *A Unified Framework for Max-Min and Min-Max Fairness With Applications*, IEEE/ACM Transactions on Networking **15:5** (2007), 1073–1083.
- [15] VLAVIANOS, A., ILIOFOTOU, M., AND FALOUTSOS, M.: *BiToS: Enhancing BitTorrent for Supporting Streaming Applications*, In Proceedings IEEE INFOCOM 2006. 25TH IEEE International Conference on Computer Communications (2006 ápr.), 1–6.

(Beérkezett: 2016. november 28.)



Dobjáné Antal Elvira a Szegedi Tudományegyetemen végzett közgazdasági programozó matematikusként 2010-ben, jelenleg a Neumann János Egyetemen főiskolai adjunktus.

2012-ben 5 hónapot az Almeriai Egyetemen vendégeskedett Erasmus-ösztöndíjjal. 2013-ban SZTE Talent ösztöndíjas, 2016-ban az MTA Szegedi Akadémiai Bizottság ifjúsági pályázatán III. díjat nyert. PhD fokozatát 2017-ben szerezte informatikatudományból a Szegedi Tudományegyetemen.

Kutatásait a globális, illetve nemlineáris optimalizálás területén folytatja.



Vinkó Tamás programtervező matematikus, habilitált egyetemi docens. Diplomáját és fokozatait a Szegedi Tudományegyetemen szerezte.

Posztdoktori kutatóként több mint 6 évet töltött Hollandiában az Európai Űrügynökségnél és a Delfti Műszaki Egyetemen.

Kutatómunkájában a hálózattudomány és a globális optimalizálás határterületeit vizsgálja.

Összesen 30 nemzetközi tudományos cikk szerzője, vagy társszerzője, ezekre a Scopus szerint több mint 220 független hivatkozást kapott.

DOBJÁNNÉ ANTAL ELVIRA

Neumann János Egyetem, Természet- és Műszaki Alaptudományi Tanszék

6000 Kecskemét, Izsáki út 10.

antal.elvira@gamf.uni-neumann.hu

VINKÓ TAMÁS

Szegedi Tudományegyetem, Számítógépes Optimalizálás Tanszék

6701 Szeged, P.O. Box 652

tvinko@inf.u-szeged.hu

Alkalmazott Matematikai Lapok (2017)

COMPARATIVE ANALYSIS OF SEVERAL MODELS OF THE SAME
SAME MIXED-INTEGER NONLINEAR PROGRAMING PROBLEM

ELVIRA D. ANTAL AND TAMÁS VINKÓ

Our study was inspired by modeling questions emerging in connection to computing max-min fair bandwidth allocation in BitTorrent communities.

We analyze several reformulation and solution techniques, including the McCormick reformulation of a MINLP, and a standard LP presolve technique, in point of running time and reached optimum value. Our extensive numerical investigation involves twelve different models of the same problem, twenty-seven test cases, and two professional solvers.