

RÖVIDEN A PERT VALÓSZÍNŰSÉGI MEGKÖZELÍTÉSÉRŐL

MONHOR DAVAADORZSÍN

Amerikában az 1950-es években kezdtek el dolgozni a Polaris Program néven ismertté vált rakétafejlesztési projekten. Ennek keretében született meg a PERT (Program Evaluation and Review Technique) modell, amely a bonyolult projektek tervezésének, összehangolásának és irányításának matematikai modellezésére, valamint ezen belül a véletlen tevékenységi idők megfelelő kezelésére és koordinálására szolgál. A „The US Navy Special Projects Office” fejlesztési programjainak tervezésével és a munka folyamatának kiértékelésében alkalmazandó matematikai módszerek tanulmányozásával, illetve fejlesztésével foglalkozó munkacsoport 1958. január 27-én kezdte meg munkáját, ezért ehhez a dátumhoz kötik a PERT-modell kidolgozásának a kezdetét.

A modellről Malcolm, Roseboom, Clark és Fazar [15] 1959-ben tudományos cikket publikált, az azóta eltelt idő alatt pedig a PERT-modell az operációkutatás egyik fontos eszközévé vált. Az elmúlt közel 60 év alatt terjedelmes irodalom foglalkozott a PERT-tel. A tanulmányok túlnyomó része a PERT numerikus, menedzsment és modellműködtetési aspektusával foglalkozott. Azonban a PERT valószínűségi aspektusával viszonylag kevesen foglalkoztak, bár szép számmal akadnak valószínűségelméleti szempontú tanulmányok is. Jelenleg nincs általánosan elfogadott modell vagy egységes elméleti koncepció a PERT valószínűségelméleti tanulmányozásában, vannak azonban különböző hozzáállások és kezdeményezések.

Jelen dolgozat a PERT-modell valószínűségi megközelítését röviden összefoglaló közlemény, valamint néhány megjegyzésben ismerteti a PERT-modell keletkezésének történetét is.

1. Bevezetés

Az 1950-es években az iparilag, gazdaságilag fejlett országokban – mind a hadiiparban, mind a polgári célú ipari-gazdasági tevékenységekben – felvetődött a többkomponensű, bonyolult projektek tervezése, összehangolása és irányítása matematikai modellezésének és azon belül az időoptimalizálási problémák megoldásának kérdése. E problémakör megoldására két modell született: a CPM (Critical Path Method, magyarul *kritikus út módszer*) és a PERT (Program Evaluation and Review Technique, magyarul *projektek kiértékelési és újratervezési módszere*).

Az azóta eltelt 60 év alatt mindkét modell széles körű gyakorlati alkalmazást nyert, a CPM és a PERT az operációkutatás egyik fontos eszközévé vált.

Egy nagy projektet számos kis részprojektre, vagyis tevékenységre lehet felbontani. E tevékenységek között a megelőzési relációkat úgy szemléltetjük, hogy a tevékenységeket egy irányított gráf élével azonosítjuk. Az összes egy csúcsba irányuló tevékenységet be kell fejezni azelőtt, mielőtt bármelyik kifelé irányított tevékenységet elkezdenénk. Ily módon egy projektet alkotó különféle tevékenységek végrehajtásának egymástól való függőségét leíró gráf a következőképpen definiálható.

1.1. Definíció. Az alábbi három tulajdonsággal rendelkező irányított (N, \mathcal{A}) gráfot projektgráfnak nevezünk, ha

- (i) létezik $s \in N$ úgynevezett kezdőpont és $s' \in N$ úgynevezett végpont;
- (ii) az (N, \mathcal{A}) irányított gráf hurokmentes;
- (iii) minden $x \in N - \{s, s'\}$ esetén van s -ből x -be és x -ből s' -be vezető út.

Ha egy (N, \mathcal{A}) projektgráf minden éléhez hozzá van rendelve egy nemnegatív valós szám, akkor a gráfot CPM tervütem hálónak, s e számokat a tevékenységek végrehajtási időinek, vagyis röviden tevékenységi időknak nevezük.

Ha egy (N, \mathcal{A}) projektgráf minden éléhez hozzá van rendelve egy nemnegatív folytonos valószínűségi változó, és a különböző élekhez tartozó valószínűségi változók egymástól függetlenek, akkor a gráfot PERT tervütem hálónak nevezük. E valószínűségi változókat (véletlen) tevékenységi időknak nevezük.

A sztochasztikus programozási problémát Prékopa András általában a következőképpen szokta megfogalmazni: a sztochasztikus programozási problémák megfogalmazásakor determinisztikus problémákból indulunk ki, melyek általában lineáris vagy nem lineáris matematikai programozási feladatok. Észrevesszük, hogy a feladatban szereplő bizonyos mennyiségek a valóságban nem determinisztikusak, hanem valószínűségi változók, és emiatt ebben a már megfogalmazott formában nem megfelelők. Olyan új feladatot (modellt) fogalmazunk meg, amelyben már szerepet játszik a véletlen mennyiségek valószínűségi viselkedését leíró valószínűségeloszlás is. Ez az új feladat általában egy matematikai programozási feladat, amelyet sztochasztikus programozási feladatnak nevezünk. Azt a feladatot pedig, amelyből kiindultunk, determinisztikus alapfeladatnak nevezük (Prékopa és Szántai [25]). Úgy látszik, hogy ez az elv nem csak a sztochasztikus programozási feladatokra korlátozódik, hanem más sztochasztikus optimalizálási modellezésre is, például a PERT-modellre is kiterjeszhető.

A CPM és a PERT tervütem hálókkal kapcsolatos fenti definíciók formailag eltérnek a szokásos megfogalmazásoktól. Az eltérés csupán annyi, hogy a Prékopa-féle gondolkodásmód figyelembevételével a Klafszy [12] által megadott CPM és PERT tervütem hálókra vonatkozó definíciókat kicsit módosítottuk. A definíciókból

látható az is, hogy a CPM-modell felfogható a PERT tervütem hálóra vonatkozó sztochasztikus optimalizálási feladat determinisztikus alapfeladataként.

A Prékopa-féle megfogalmazás egyszerűen és világosan megmutatja a sztochasztikus programozási modellalkotási folyamatot, s így módszertani jelentőséggel bír.

A sztochasztikus PERT-tel sokan foglalkoztak, a tanulmányok túlnyomó része a PERT-probléma számítási, menedzsmenti, szervezési, illetve modellműködési aspektusára és a PERT által generált determinisztikus modellekre vonatkozik, mely területeknek terjedelmes irodalma van. Ezekhez a problémakörökhöz képest a PERT valószínűségi aspektusával viszonylag kevesen foglalkoztak, bár szép számmal vannak valószínűségelméleti szempontú tanulmányok is. Azonban a PERT-modell valószínűségi vonatkozásai még mindig nem tisztázottak kielégítő módon.

Jelen dolgozat a PERT-modell valószínűségelméleti vonatkozásainak rövid áttekintésével foglalkozik, miközben néhány megjegyzés erejéig kitér a modell kialakulásának történetére is.

2. Megjegyzések a PERT-modell keletkezésének történetéhez

A PERT- és a CPM-módszer keletkezésének története általános értelemben többé-kevésbé ismert. Ezzel kapcsolatban a következő megjegyzést szokták említeni. Az 1950-es években, Amerikában a Polaris Program néven ismertté vált rakétafejlesztési projekt megvalósítása során dolgozták ki a PERT-módszert. Ezzel körülbelül egy időben fejlesztettek ki hasonló módszert az E. I. duPont de Nemours-nál (Newark, Delaware, USA) egy kémiai gyár tervezése kapcsán.

Azonban az ilyen típusú megjegyzések túlságosan általánosak, hiányoznak belőlük olyan konkrét, pontos információk, amelyek elősegíthetnék annak megértését, hogy mi volt a modellalkotást alapvetően meghatározó tényező, s egészen konkrétan hogyan is született a PERT-modell és egyéb hasonló modellek.

A Bolyai János Matematikai Társulat *Az operációkutatás matematikai módszerei* című jegyzetsorozata keretén belül 1969-ben jelent meg Klafszyk Emil *Hálózati folyamatok* című könyve [12], amely – tudomásom szerint – az első magyar nyelvű mű, amely a hálózati folyamatokkal foglalkozik. A könyv konkrét példákkal illusztrálva jól tárgyalja a hálózati folyamatok alapvető témaköreit és azok alkalmazásait, s mára már klasszikussá vált. A könyv nyolcadik, *Tervütemezési módszerek* című fejezete alapvetően a CPM-módszerrel foglalkozik, s az utolsó rövid szakasza ad bevezetést a PERT-modellezésbe. Azonban ennek a szakasznak a történelmi megjegyzései nagy részben keveredtek a CPM-módszer keletkezésének történetével. A *Sztochasztikus időtervezési feladat* (PERT) című szakasz végén található rövid megjegyzésben a következő olvasható: „A CPM (*Critical Path Method*) és a PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) modelleket az 1950-es évek első felé-

ben a RAND corporation-nál dolgozták ki. Kezdetben ezeket titkos (*secret*) eredményeként kezelték, így nem hozták nyilvánosságra. Az első publikációk, amelyek a probléma megoldását nyilvánosságra hozták, Ford [6] és Minty [18] dolgozatai voltak.” Mivel ezen megjegyzések kivételével a PERT-ről szóló magyar nyelvű irodalom eddig nem foglalkozott a PERT történetével, azért a későbbiekben is hasznos lehet a történelmi megjegyzések pontosítása, bár valójában csak egy apró észrevételt szeretnék ezzel kapcsolatban megfogalmazni. Ahogyan látni fogjuk a következő szakaszban, a PERT-et nem a RAND Corporationnál dolgozták ki. Ford [6] és Minty [18] dolgozatai nem foglalkoztak a PERT-tel, hanem egyértelműen a CPM-módszerhez kapcsolhatók.

Kall és Wallace [10] könyvében található egy általános megjegyzés: „... *When PERT was introduced in 1959, it was seen as a method for analysing projects with stochastic activity durations. However, the way in which the randomness was treated quite primitive. Therefore, despite historical setting, many people today view PERT as deterministic approach, simply disregarding what the original authors said about randomness.*”

A sztochasztikus programozásban Peter Kall és Stein Wallace ismert, jó szakértők, s tanulságos azon észrevételük, hogy a PERT-re sokan determinisztikus megközelítésként tekintenek. Az alkalmat megragadva megjegyezzük, hogy személyes beszélgetésünk során Prékopa András is úgy vélte, hogy a PERT valószínűségi vonatkozásaiban egyelőre még nincs lényeges eredmény.

Viszont az eredeti PERT valószínűségi megközelítésre vonatkozóan Kall és Wallace „...*was treated quite primitive*”. kritikáját kicsit túlzottnak tartom, mert a PERT alkotói viszonylag jól és gyakorlatiasan oldottak meg igen komplikált és nagyméretű projektekben felmerülő, bonyolult véletlen jelenséget. Az eredeti PERT-tervütemháló 3000 körüli számú tevékenységet tartalmazott. Akkoriban ilyen méretnél a véletlenszerűség modellezése igen nehéz feladat lehetett, hiszen a PERT-modell születési idejében a sztochasztikus optimalizálás még gyerekcipőben járt.

A *The Fleet Ballistic Missile Program* (rövidítve *Polaris* vagy *Polaris program*) nevű hadiipari projekt szervezési és kivételezési munkáit az amerikai haditengerészetben kezdték el, és e munka irányítójává William Francis Raborn (1905-1990), a haditengerészet tisztjét nevezték ki 1955. november 8-án. Raborn admirális szakmailag tapasztalt tengerész, mérnök és műszaki menedzser, ezen túl igen jó szervező egyéniség volt. Ezt követően 1955. november 17-én létrehozták a *The US Navy 'Special Projects Office'*-t (SPO). Az SPO célja a tengeralattjáróról indított ballisztikus rakétarendszer fejlesztése volt. Az ilyen típusú rakétákat nevezik polarisnak, innen ered a *Polaris program* elnevezés. Az 1956. év folyamán az SPO bonyolította a projekt tervezésével, összehangolásával és irányításával kapcsolatos előkészítési, illetve szervezési munkát, és később létrejött egy fejlesztési csoport, amelynek tagjai az SPO tagjaiból, valamint más tanácsadó és fejlesztő cégbeli

munkatársakból álltak, feladatuk a Polaris program tervezése, koordinálása, irányítása és kivételezése volt.

A PERT, *Program Evaluation Research Task*, Summary Report Phase 1 [24] kutatási beszámoló a következő mondatokkal kezdődik: „*This report summarizes the work and results of the first phase of Project PERT (Program Evaluation Research Task). The project began on 27 January 1958 with the purpose of studying the application of statistical and mathematical methods to the planning, evaluation, and control of the program of the Navy Special Projects Office...*” Ebből látható, hogy akkoriban a PERT elnevezés a Program Evaluation Research Task kifejezésből képzett betűszó volt. Ez az elnevezés később a *Project Evaluation and Review Technique*-re módosult, de a PERT betűszó ettől nem változott meg.

3. A PERT eredeti valószínűségi megközelítéséről

A PERT kezdeményezői által javasolt valószínűségi megközelítést és annak modellalkotási hátterét a Special Projects Office, Bureau of Naval Weapons Department of the Navy, Washington, D. C. 1958. júliusi *Program Evaluation Research Task Summary Report Phase 1* című 35 oldalas kutatási beszámolóból és az 1959-ben Malcolm et al. [15] által közzétett tudományos cikkből ismerhetjük meg korrekt módon. A [15] cikkben Malcolm et al. az alábbiakat írják:

The PERT team felt that the most important requirement for project evaluation at SPO[Special Projects Office] was the provision of detailed, well-considered estimates on the time constraints on future activities. Hence it seemed imperative that each planned activity, no matter how far into the future, a carefully considered time estimate must be obtained. The qualifications of a person making such an estimate must include a thorough understanding of the work to be done. Furthermore, the time estimates for some activities such as a research and development, are highly uncertain. This uncertainty must be exposed. Ideally for each activity we should have a probability distribution of the times that the activity might require as explained below, we focused attention on a few parameters of the distribution such as the range.

E szövegkivonat minden egyes mondata egyértelműen leírja azokat a legfontosabb tényezőket, amelyeket mindenképpen figyelembe kellett venniük a modellalkotóknak a PERT tevékenységi idő modellezése során. Azonban a kiegészítés, illetve az elemzés miatt az alábbiakban néhány megjegyzést szeretnék fűzni a szövegkivonathoz. A fentiek alapján némi egyszerűsítéssel elmondható, hogy a PERT-modell eredetileg egy hadiipari kutató és fejlesztő projekt kivételezési idejének optimalizálását célzó sztochasztikus optimalizálási probléma volt, hiszen a valós helyzetből adódóan abból a felismerésből indultak ki, hogy a tevékenységi idők valószínűségi változók. Ezután két alapvető problémát kellett megoldani: (i) a tevékenységi idők modellezésére konkrétan milyen valószínűségi változók a legalkalmasabbak?

(ii) a tevékenységi idők eloszlásának ismeretében hogyan határozzuk meg az egész projekt várható időtartamát?

Azonos körülmények között egymástól függetlenül újra és újra ismétlődő jelenségekben (pl. tömeggyártásban, statisztikai minőség-ellenőrzésben, mérési hibák matematikai feldolgozásában és egyebekben) a statisztikai tesztelés, a paraméterbecslés és egyéb statisztikai döntést támogató statisztikai eljárások jól bevált eszközök. Azonban a kutató-fejlesztő projektek tevékenységei – különösen a Poláris program esetén – nem ilyen ismételhető jelenségek. Éppen ezért, az első probléma megoldásában nem voltak alkalmazhatók az eloszlásfüggvény illesztésére vonatkozó statisztikai módszerek, következésképpen szakértői véleményekre támaszkodva, azaz szubjektív valószínűségi megfontolás alapján döntöttek a béta-eloszlás mellett. Ezt a véleményt támasztják alá a fent említett történelmi tények és a Malcolm et al. [15] azon visszaemlékezése, amely szerint „*this result was derived under the assumption that the beta distribution is an adequate model of the distribution of an activity time. The choice of the beta distribution was dictated by intuition because empirical evidence is lacking.*”

A második problémát, az egész projekt várható időtartamának meghatározását úgynevezett „three-time estimation” bevezetésével oldották meg. Ez a három idő egy tevékenységi időre vonatkozó legrosszabb (leghosszabb) idő, azaz pesszimista időbecslés, a legjobb esetre számító idő (a legrövidebb idő), vagyis optimista időbecslés és a legvalószínűbb idő. Egy adott tevékenység esetén ezt a három időt szakértők véleménye alapján határozták meg. Ha az optimista idő a , a pesszimista idő b , és a legvalószínűbb idő m , akkor a tevékenységi idő eloszlása az $[a, b]$ intervallumon az m móddal rendelkező béta-eloszlás lesz. Ezután a várható tevékenységi időt $E(t) = \frac{a+4m+b}{6}$ képlettel számították. Ily módon a PERT-modellben az egész projekt várható időtartamának becslése egy determinisztikus tervütem feladattá alakult át.

Az $E(t) = \frac{a+4m+b}{6}$ képlet háttére a következőképpen interpretálható.

$$E(t) = \frac{a + 4m + b}{6} = a \frac{1}{6} + m \frac{4}{6} + b \frac{1}{6},$$

ami azt jelenti, hogy az optimista idő, a legvalószínűbb idő és a pesszimista idő rendre $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{6}$ valószínűségi súllyal számított várható értéke megadja a várható tevékenységi időt.

A 2. fejezet végén említettük, hogy a PERT elnevezés eredetileg a *Program Evaluation Research Task* kifejezésből képzett betűszó volt. De eredetileg miért szerepelt a *Research Task* (kutatási feladat) szó a PERT elnevezésben? Már a kezdet kezdetén is, a PERT-módszer nem csak egy nagy kutató-fejlesztő projekt kezelésére, hanem egy teljesen új típusú hadiipari fejlesztés levezénylésére lett létrehozva. Ezért a projekt megvalósításában a tevékenységi idők, illetve időtartamok teljes mértékben előreláthatatlanok, azaz tudományos szakkifejezéssel élve, valószínűségi változók voltak. A projekt új típusú menedzsmentjének modellalkotásában

ezeknek a véletlen időtartamoknak a matematikai kezelése egy kutatási feladatként merült fel. Ily módon a *Research Task* szó használata természetes volt, viszont a kifejlesztett modell alkalmazása során a már felállított PERT-modell adatainak és paramétereinek újbóli és újbóli kiértékelésére, illetve módosítására volt szükség. Valószínűleg ezért cserélődött ki a „*Research Task*” a „*Review Technique*” kifejezésre.

4. PERT valószínűségi megközelítése napjainkban: rövid összefoglaló

A PERT-tel foglalkozó valószínűségelméleti szempontú tanulmányokban vannak különböző hozzáállások, illetve kezdeményezések, azonban jelenleg még nincs általánosan elfogadott modell vagy egységes elméleti koncepció.

Az eredeti PERT általánosításaként a béta-eloszlás helyett más eloszlásokat próbáltak alkalmazni, így például a gamma-eloszlást, az exponenciális eloszlást, a normális eloszlást, a lognormális eloszlást, az egyenletes eloszlást és a háromszög eloszlást is többen javasolták (Charnes, Cooper and Thompson [2], Kamburoski [11], MacCrimmon and Ryavec [14], Mohan, Gopalakrishnan, Balasubramanian and Chandrashekar [19], Martin [16], Monhor [20]). E tanulmányok lényege az volt, hogy a tevékenységi időt reprezentáló valószínűségi változókat valamilyen determinisztikus mennyiségekkel helyettesítették, leggyakrabban a várható értékükkel vagy a legvalószínűbb értékükkel, s ezután determinisztikus időtervezési technikát alkalmaztak. Ennek a hozzáállásnak az az előnye, hogy a CPM-módszer numerikusan jól fejlesztett determinisztikus eljárásai rögtön alkalmazhatóvá válnak. Azonban, a „korai és gyors” determinizálásnak, azaz a tevékenységi idő szintjén történő determinizálásnak az a súlyos ára, hogy a projekt egészében rejlő véletlenszerűséget nem tudjuk kellőképpen figyelembe venni.

Ha egy projekt megvalósítási idejének véletlen létét kellőképpen akarjuk figyelembe venni, akkor a tevékenységi időket nem determinizálhatjuk, hanem az egész projekt megvalósításának idejét modellező valószínűségi változó eloszlását vagy legalább annak fontos paramétereit kellene tudnunk figyelembe venni.

Tegyük fel, hogy az (N, \mathcal{A}) PERT-tervütemháló kezdőpontjából a befejező pontjába vezető összes utat meghatározzuk, s ezt a halmazt Π -vel jelöljük. Jelölje továbbá $\lambda(\pi_k)$, $k = 1, 2, \dots, q$, a π_k út véletlen hosszát, azaz a π_k úthoz tartozó tevékenységi idők összegét. Ez azt jelenti, hogy $\lambda(\pi_k)$ nem más, mint a π_k út megvalósítási idejét leíró valószínűségi változó.

Ekkor a

$$\zeta = \max \{ \lambda(\pi_k) : \pi_k \in \Pi \} \quad (1)$$

valószínűségi változót az (N, \mathcal{A}) PERT-tervütemháló megvalósítási idejének (completion time) szokás nevezni.

A PERT-tervütemháló kezdőpontjából befejező pontjába vezető összes út száma általában nagyon nagy, és az egyes utak közös éleiből (tevékenységeiből)

adódó sztochasztikus függőségek miatt az (1) megvalósítási idő valószínűségi eloszlásának numerikus meghatározása – ha egyáltalán lehetséges – rendkívül nehéz. Egyébként az említett nagy számú út létezésén túl, ha az egyes utakat reprezentáló valószínűségi változók nem függetlenek, azaz sztochasztikus függőségek állnak fent közöttük, akkor csupán csak azok maximumai eloszlásának numerikus meghatározása is nagyon nehéz feladat. Így érthető, hogy a kutatások főiránya a megvalósítási idő várható értékének, valószínűségi eloszlásának approximációja és korlátai meghatározása lett (Birge és Maddox [1], Devroye [3], Dodin [4], Kleindorfer [13], Fulkerson [7], Iida [9], Meilijson és Nádas [17], Monhor [21], Prékopa és Long [26], Prékopa [27], Prékopa, Szántai és Long [28], Robillard és Trahan [29], Szántai [32], Sculli [30]).

Prékopa András és Long [25] kiderítette, hogy ha a tevékenységi idők alulról és felülről korlátos valószínűségi változók, akkor e valószínűségi változók bármilyen relációja esetén viszonylag kevés a kritikus útként a szóba jöhető utak száma. Továbbá közöltek két olyan algoritmust, melyek segítségével a kritikusként szóba nem jöhető utakat eliminálni lehet. Ez az eredmény nemcsak a megvalósítási idő tekintetében, hanem a PERT tanulmányozásának és alkalmazásának több más területén is igen hasznosnak bizonyult (Szántai, Prékopa és Long [27], Szántai [31]).

A PERT megvalósítási idejére vonatkozó különféle közelítések és korlátok hasznos információkkal szolgálnak, azonban ezek nem tudnak azonosítani egy konkrét utat, amely a CPM kritikus út sztochasztikus analógja lenne. E hátrány kiküszöbölésével eddig nemigen foglalkoztak, kivéve egy-két esetet (Elmaghraby [5], Monhor [22]).

Egy rögzített π_k , $k = 1, 2, \dots, q$ esetén a

$$P(\lambda(\pi_k) > \lambda(\pi_{k'}), \quad \forall \pi_{k'} \in \Pi, \pi_k \neq \pi_{k'}) \quad (2)$$

valószínűséget Elmaghraby [5] a π_k út kritikussági indexének (*path criticality index*) nevezte el. Nyilván az az út, amelyre a (2) valószínűség maximális, valószínűségi értelemben kritikus út lenne. Ily módon Elmaghraby a CPM determinisztikus kritikus út PERT-beli sztochasztikus megfelelőjét próbálta meg definiálni, s ebben az értelemben ez a próbálkozás egy figyelemre méltó kezdeményezés volt. Azonban, ez a megközelítés két ok miatt sem járható út. Először is, többdimenziós korrelált valószínűségi változók esetén a (2) valószínűség numerikus meghatározása közismerten igen nehéz feladat. Ezért a nagyon magas dimenzió és a korreláltság miatt a π_k út hosszát az összes többi út hosszával összehasonlító valószínűség, azaz a (2) valószínűség numerikus meghatározása vállalhatatlan feladat. Továbbá, a (2) elméletileg sem tud a kitűzött célnak megfelelő valószínűséget eredményezni, hanem annál sokkal kisebb valószínűséget tudna csak adni, amint ez rögtön látható Prékopa és Long [26] eredményéből. Monhor [22] a CPM kritikus út PERT sztochasztikus megfelelőjének egy lehetséges változatával foglalkozott. A CPM esetén az utak hosszainak halmaza nyilván nemnegatív valós számok halmazaként

fogható fel, viszont a PERT esetén a valószínűségi változók halmazáról van szó. A halmazstruktúra szemszögéből nézve az első esetben, azaz a CPM esetén a valós számok rendezési relációja révén a determinisztikus utak (pontosabban az utak hosszai) egy teljesen rendezett halmaz. Ezzel szemben valószínűségi változók között nincs ilyen természetes rendezési reláció, két valószínűségi változó szokásos maximuma egy új valószínűségi változót eredményez, más szóval a $\max(., .)$ nem egy bináris reláció, hanem egy bináris művelet. Ezért a PERT megvalósítási ideje nem tud egy olyan konkrét utat adni, amelynek hossza a projekt megvalósítási ideje lenne. Erre az észrevételre alapozva Monhor [22] definiált a $\{\lambda(\pi_k) : k \in \Pi\}$ halmazon egy rendezési relációt, azon feltétel mellett, hogy a $\lambda(\pi_k)$, $k \in \Pi$ utak hosszai többdimenziós normális eloszlásúak. A definícióban csak a korrelált kétdimenziós normális eloszlás valószínűsége szerepel, s annak numerikus meghatározása nem annyira nehéz. Továbbá erre alkalmazható egyszerű valószínűségi korlátok is vannak, pl. Monhor [23]. Elfogadható az a feltétel is, hogy a véletlen utak hosszainak együttes eloszlása többdimenziós normális, hiszen ha a tevékenységi idők nem normális eloszlásúak, akkor is a központi határeloszlás tétel alapján az utak hosszait többdimenziós normális eloszlással közelíthetjük.

Szántai [33] a valószínűséggel korlátozott programozásra alapozva a PERT egy új modelljét állította fel. Ebben a modellben a tevékenységi időket nem determinizálta, hanem ezeket a véletlen időket előírt valószínűségi szinten feltételként szerepeltette, és a projekt időtartamát minimalizálandó célfüggvényként kezelte. Szántai [33], Gouda és Szántai [8] numerikusan is tanulmányozták a modellt, illetve a modellt alkalmazták mind többdimenziós normális, mind Dirichlet-eloszlású tevékenységi idők feltételezése mellett, s érdekes, a gyakorlatban is jól értelmezhető eredményeket értek el.

5. Záró megjegyzések

Ahogy a harmadik szakaszban említettük, a PERT-modell megalkotásával foglalkozó kutató-fejlesztő munka hivatalosan 1958. január 27-én kezdődött. Ez azt jelenti, hogy a folyó év a PERT megszületésének 60. évfordulója – többek között ez adta jelen írás elkészítésének gondolatát. Ezen túl, az Alkalmazott Matematikai Lapok e különszáma Prékopa András professzorom tiszteletének van szentelve, aki jelentősen járult hozzá a PERT valószínűségi aspektusai tanulmányozásához.

A sztochasztikus PERT egy sokoldalú, terjedelmes irodalommal rendelkező terület, ily módon e terület összefoglalása meghaladná szerény erőmet. Ezért egy szűkebb részterületre, a PERT valószínűségi megközelítésére, azon belül is tovább szűkítve, a determinisztikus kritikus út sztochasztikus megfelelőjének kereséséhez direkt, vagy indirekt módon sorolható témakörökre szorítkoztam a jelen dolgozatomban.

6. Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönettel tartozik egy anonim bírálónak, aki a jelen dolgozat megfogalmazását nyelvilleg javította néhány helyen.

Hivatkozások

- [1] BIRGE, J. R. MADDOX, M. J.: *Bounds on expected project tardiness*, Operations Research **43** (1995), 838–850.
- [2] CHARNES, A. COOPER, W., THOMPSON, G.: *Critical path analysis via chance constrained and stochastic programming*, Operations Research **12** (1964), 460–470.
- [3] DEVROYE, L. P.: *Inequalities for the Completion Times of Stochastic PERT Networks*, Mathematics of Operations Research **4** (1979), 441–447.
- [4] DODIN, B. M.: *Bounding the Project Completion Times in PERT Networks*, Operations Research **33** (1985), 862–881.
- [5] *Elmaghraby, S. E. E.: On criticality and sensitivity in activity networks*, European Journal of Operational Research **127** (2000), 220–238.
- [6] FORD, L. R.: *Network flow theory*, Rand Corp., 1956.
- [7] FULKERSON, D. R.: *Expected critical path lengths in PERT networks*, Operations Research **10** (1962), 808–817.
- [8] GOUDA, A., SZÁNTAI, T.: *On numerical calculation of probabilities according to Dirichlet distribution*, Annals of Operations Research **177** (2010), 185–200.
- [9] IIDA, T.: *Computing bounds on project duration distributions for stochastic PERT networks*, Naval Research Logistics **47** (2000), 559–580.
- [10] KALL, P., WALLACE, S. W.: *Stochastic Programming*, John Wiley&Sons, Chichester, 1994.
- [11] KAMBUROSKI, J.: *Normal distributed activity durations in PERT networks*, Journal of the Operational Research Society **36** (1985), 1051–1057.
- [12] KLAFSZKY, E.: *Hálózati folyamatok, Az operációkutatás matematikai módszerei c. tanfolyam jegyzete*, szerk. Prékopa András, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1969.
- [13] KLEINDORFER, G. B.: *Bounding distributions for stochastic acyclic networks*, Operations Research **19** (1971), 1586–1601.
- [14] MACCRIMMON, K. R. RYAVEC, C. ,A.: *An Analytical Study of the PERT Assumptions*, Operations Research **12** (1964), 17–37.
- [15] MALCOLM, D. G., ROSEBOOM, J. H., CLARK, C. E., FAZAR, W.: *Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation*, Operations Research **7** (1959), 646–669.
- [16] MARTIN, J.: *Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network, Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network*, Operations Research **13** (1965), 46–66.

- [17] MEILIJSON, I., NÁDAS A.: *Convex Majorization with an Application to the Length of Critical Paths*, Journal of Applied Probability **16** (1979), 671–677.
- [18] MINTY, G. J.: *Comment on the Shortest-Route Problem*, Operations Research **5** (1957), p. 724.
- [19] MOHAN, S., GOPALAKRISHNAN, H. BALASUBRAMANIAN, A. CHANDRASHEKAR M.: *A log-normal approximation of activity duration in PERT*, Journal of the Operational Research Society **58** (2007), 827–831.
- [20] MONHOR, D.: *On the application of concentration function to the PERT*, Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser., Optimization **14** (1983), 237–244.
- [21] MONHOR, D.: *An approach to PERT: Application of Dirichlet Distribution*, Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization **18** (1987) 113–118.
- [22] MONHOR, D.: *A new probabilistic approach to the path criticality in stochastic PERT*, Central European Journal of Operations Research **19** (2011), 615–633.
- [23] MONHOR, D.: *Inequalities for correlated bivariate normal distribution*, Probability in Engineering and Informational Sciences **27** (2012), 115–123.
- [24] *PERT: Program Evaluation Research Task*, Summary Report Phase **1**, Special Projects Office, Bureau of Naval Weapons, Department of the Navy, Washington, D. C. July 1958.
- [25] PRÉKOPA A., SZÁNTAI T.: *Többlépcsős sztochasztikus programozási modell tározórendszer irányítására*, Hidrológiai Közlöny **1** (1980), 7–14.
- [26] PRÉKOPA A., LONG J.: *New Bounds and Approximations for the Probability Distribution of the Length of Critical Path*, RUTCOR Research Report (1992), 16–92.
- [27] PRÉKOPA, A.: *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [28] PRÉKOPA, A., SZANTAI T., LONG. J.: *New bounds and approximations for the probability distribution of the length of the critical path*, in *Dynamic stochastic programming*, ed., by K. Marti., Y. Ermolev and G. Pflug, Springer (2004), 293–320.
- [29] ROBILARD, P., TRAHAN, M.: *The completion time of PERT networks*, Operations Research **25** (1977), 15–29.
- [30] SCULLI, D.: *The Completion Time of PERT Networks*, The Journal of the Operational Research Society **34** (1983), 155–158.
- [31] SHOGAN, A. W.: *Bounding distributions for a stochastic pert network*, Networks **7** (1977), 359–381.
- [32] SZÁNTAI, T.: *PERT alkalmazások*, Aula, Budapest, 2002.
- [33] SZÁNTAI, T.: *A PERT egy új, sztochasztikus programozási modellje*, Alkalmazott Matematikai lapok **22** (2005).
- [34] WILLIAM FRANCIS RABORN: www.wikipedia.org/wiki



Monhor Davaadorzsín mongol születésű magyar matematikus. Egyetemi tanulmányait a Mongol Állami Egyetemen végezte okleveles matematikus, matematikatanárként. Munkahelyei: 1972–1976, 1983–1987: a Mongol Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetében tudományos segédmunkatárs, illetve tudományos munkástárs. 1976–1977: az ELTE Bölcsészettudományi Kar Magyar Nyelvi Lektorátusában magyar nyelvet tanul. 1978–1982: a TMB ösztöndíjasa az MTA SZTAKI-ban. 1988–1991: a KSH SZŰV számítóközpontban matematikus. 1991-től a Soproni Egyetem székesfehérvári Geoinformatikai Karán, illetve az

Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar Geoinformatikai Intézetében Egyetemi docens, tanszékvezető, tudományos főmunkatárs, s onnan nem régen nyugdíjba vonult. Közben, 2004-ben Japánban a Kyoto University-n meghívott vendégkutató, 2007-ben a tokiói Hosei University-n vendégprofesszor. Kutatásai fő területe: sztochasztikus optimalizálás, sztochasztikus PERT, valószínűségi egyenlőtlenségek alacsony dimenziós korrelált eloszlásokra vonatkozólag, földkéregmozgás geodinamikai modellezése, geodéziai mérések hibaelmélete, a geodézia és matematika kapcsolatának története. A matematikai tudomány kandidátusa fokozatot 1983-ban szerezte meg. 2 könyv, 3 egyetemi jegyzet és 65 folyóiratcikk szerzője, illetve társszerzője. Idézetek száma 80.

MONHOR DAVAADORZSÍN

Óbudai Egyetem, Alba Regia Műszaki Kar

Geoinformatikai Intézet

8002 Székesfehérvár, Pirosalma u. 1-3.

email: monhor@ella.hu

A SHORT EXPOSITORY OVERVIEW
ON PROBABILISTIC APPROACH TO STOCHASTIC PERT

DAVAADORJIN MONHOR

On January 27, 1958, under the direction of The US Navy „Special Projects Office” a research team began to develop a mathematical model for the management of planning and evaluating of the Polaris program. The team developed a new model called „Program Evaluation and Review Technique (PERT)”. In 1959 Malcolm et al., [15] published a paper on this model. Since this

publication, PERT has emerged as a successful tool of Operations Research. Over the last 60 years, a voluminous number of papers have been devoted to studies on PERT, and a vast majority of the research has, however, been carried out on the topics of computational, managerial and operational aspects of PERT. The probabilistic nature of the PERT model seems to be still not understood properly, although there has been appeared a number of papers on the topic. The present paper discusses probabilistic aspects of the PERT model in historical setting.