Alkalmazott Matematikai Lapok **36** (2019), 3–13.

EGÉSZÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS HASZNÁLATA KÖZÖS KVÓTÁS EGYETEMI FELVÉTELI FELADATOKRA

ÁGOSTON KOLOS CSABA, BIRÓ PÉTER

Felvételi feladatok elemzése a matematikai, közgazdasági és számítástudományi szakirodalomban egyaránt prosperáló területté vált az elmúlt 55 évben. Ezeket a kétoldali párosítási feladatokat jellemzően az ún. Gale-Shapley (késleltetett elfogadási) algoritmussal, vagy annak valamely továbbfejlesztett változatával oldják meg. Ebben a cikkben alternatívát adunk: a felvételi feladatokat egészértékű programozási feladatként (IP) kezeljük. Arra a speciális esetre adunk meg három különböző IP-modellt, amikor az egyetemekre (vagy a magyar alkalmazásban a szakokra) közös felső kvóták vonatkoznak. Ez alapvetően egy NP-nehéz feladat, de az általunk bemutatott IP-modellel a szimulációink szerint nagyméretű feladatok is megoldhatóak.

1. Bevezetés

A felsőoktatási jelentkezéseket a világ több országában központosított rendszerek kezelik [5]. Ezekben a rendszerekben a diákok jelentkezéskor sorrendet állítanak fel azon képzések között, amelyeken el tudják képzelni továbbtanulásukat. A jelentkezőket az egyetemek a felvételi pontszám alapján rangsorolják, amely jellemzően a középiskolai érdemjegyeken és a felvételi vizsgán elért eredményen alapul. A szakok esetén a kvóta meghatározza a maximális felvehető létszámot. A feladat az, hogy megadjunk egy hozzárendelést a jelentkezők és a képzések között, azaz megadjuk, hogy melyik diák melyik szakon fog továbbtanulni.

A felvételi feladatok megoldásában mérföldkő Gale és Shapley [10] által javasolt késleltetett elfogadási algoritmus, amely a jelentkezések számával arányosan növő futásidőben (lineáris időben) megad egy ún. *stabil megoldást.* A megoldás akkor stabil, ha nem létezik ún. *blokkoló pár*; azaz semelyik diákot sem lehet a preferencia listájában egy jobb helyre felvenni, ugyanis ott már telítve van a kvóta nálánál jobb diákokkal.

Konkrét felsőoktatási rendszerekben előfordulnak olyan specialitások, amelyek megnehezítik (vagy lehetetlenné teszik) a Gale–Shapley-algoritmus alkalmazását.

Ilyen specialitás a holtversenyek kezelése: könnyen elképzelhető, hogy kettő (vagy több) diák azonos pontot ér el egy adott szakon. Ha ez a pontszám pont a

„határon” van, akkor mindegyikük felvételével túllépnénk a kvótát. Ilyen esetben többféle megoldás is elképzelhető: a) valamilyen módon felbontják a holtversenyt, azaz meghatároznak egy mesterséges sorrendet a jelentkezők között, mondjuk véletlen szám generálásával (ahogy Írországban teszik), vagy demográfiai változók segítségével (pl. a török rendszerben); b) egyenlő bánásmódot alkalmaznak, mint például Magyarországon vagy Chilében. Ez utóbbi esetben az azonos pontszámú diákokat egyformán kell kezelni: mindenkit fel kell venni, vagy mindenkit vissza kell utasítani. Magyarországon a kvóta nem sérülhet, tehát itt könnyen előfordulhat, hogy egy képzés nem lesz tele, még ha lennének is hallgatók, akik szeretnének ott továbbtanulni. Chilében a döntés a diákoknak kedvez: az utolsó csoportot még akkor is felveszik, ha velük már túlcsordul a kvóta. Holtversenyek esetén módosított Gale–Shapley-algoritmust tudunk használni, amely hatékonyan megoldja a problémát, bár az eljárás néhány jó tulajdonsága sérül, pl. az igazmondásra ösztönzés (bővebben lásd [1], [7] és [9]).

Magyarországon egy másik specialitás az alsó kvóták használata, amellyel gazdaságos méretű képzések indítását érhetjük el. Egy szak csak akkor indul, ha legalább minimális létszámú diákot oda tudunk rendelni. Az alsó kvóták használata esetén a stabil megoldás létezése nem garantált, és a feladat NP-nehéz [6]. Ügyes heurisztikákkal és egészértékű programozási módszerrel azonban kezelhető a probléma [2].

Egy újabb specialitás az ún. közös kvóta, amellyel ebben az írásban foglalkozunk. Magyarországon sok képzés esetén van államilag támogatott és önköltséges finanszírozási forma is. Az egyetemek 2008 óta szakonként egy keretszámmal adják meg a hozzájuk felvehető diákok maximális létszámát, ezen túlmenően rendszerszinten számukra közömbös a finanszírozási forma (azaz, nem osztják meg a kvótát). A kormányzat oktatáspolitikai megfontolások miatt szakonként szab keretet az államilag finanszírozott helyekre (de csak ezekre, a költségtérítéses helyekre nem), és ezt a keretszámot nem osztja szét az egyetemek között. Erre a feladatra nem mindig adható stabil megoldás, és a probléma NP-nehéz [6]. Jelen cikkben három IP-modellt adunk meg a közös kvótás feladatra; és bár mindhárom ugyanazt a párosítást adja, futási időben jelentős a különbség.

IP-feladatok használata felvételi feladatok (vagy egyéb kétoldali stabil párosítási feladatok) esetén egy új irány a szakirodalomban. Az eddigi mellőzöttségnek részben az az oka, hogy a gyakorlatban nagyok a feladatok és a Gale–Shapley-típusú heurisztikák elég jól működnek. Az egészértékű programozás újkeletű vizsgálatát viszont az indokolja, hogy a konkrét alkalmazások során egyre több a specialitás, amelyek sokszor NP-nehézzé teszik a problémát. Emellett a szofisztikált szolverek és az erős gépek egyre nagyobb feladatok megoldását teszik lehetővé egészértékű programozási technikával. Továbbá ez a módszer robosztus, vagyis könnyen bővíthető új feltételekkel, illetve a döntéshozók szempontjai megjeleníthetőek a célfüggvényekben. A következő szakirodalmi forrásokat ajánljuk az érdeklőknek a témakörben: [2], [3], [8], [11], [12].

2. Egészértékű programozási feladat

2.1. Jelölések

Jelölje A a jelentkezők halmazát, amelynek elemei: $a_i \in A$, és C a szakok halmazát, amelynek elemei: $c_j \in C$. Legyen r_{ij} a j szak rangsorszáma i jelentkező esetén, s_{ij} pedig az i jelentkező felvételi pontszáma j szak esetén. Egy diáknak eltérhet a pontszáma szakonként: pl. közgazdasági képzés esetén az angol nyelvvizsgáért jár pluszpont, angol szak esetén nem; illetve közgazdász szakra a történelem jegyek számítanak, míg informatikus szakra a fizika. Cikkünk további részében feltesszük, hogy semelyik két diáknak nem egyezik meg a pontszáma egyik szakon sem (ez a helyzet például Írországban, ahol sorsolással bontják fel a holtversenyeket, diákonként különböző kis véletlen számot adva a pontszámokhoz). A képzések esetén u_j jelöli a (felső) kvótát, ennél több diákot nem lehet felvenni az adott szakra. A jelentkezések halmazát E jelöli, ahol $E \subseteq A \times C$.

2.2. Alap felvételi feladat

A jelentkezések egy halmazát *párosításnak* nevezzük, ha minden jelentkező csak maximum egy szakra kerül felvételre, és minden szak esetén a felvett diákok száma legfeljebb annyi, mint a kvóta. Egy párosítás *stabil*, ha minden nem kiválasztott (a_i, c_j) esetén vagy a_i diák fel lett véve egy számára kedvezőbb helyre, vagy c_j szakon a kvóta telítve van a_i-nél jobb jelentkezőkkel. Felvételi feladatok esetén a legismertebb LP-modell Baïou és Balinski ([4]) nevéhez fűződik.

$$\sum_{j:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall a_i \in A, \tag{1}$$

$$\sum_{i:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \leq u_j \qquad \forall c_j \in C, \tag{2}$$

$$\left(\sum_{k:r_{ik}\leq r_{ij}} x_{ik}\right) u_j + \sum_{h:(a_h,c_j)\in E,\ s_{hj}>s_{ij}} x_{hj} \geq u_j \qquad \forall (a_i, c_j) \in E, \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (a_i, c_j) \in E\ .$$

Az (1) és (2) korlátok ún. *megvalósíthatósági korlátok*: (1) korlát biztosítja, hogy egy diákot csak maximum egy helyre lehet felvenni, (2) pedig azt, hogy egy szakra maximum u_j diákot lehet felvenni. A (3) korlát az ún. *stabilitási korlát.* Minden jelentkezés esetén van egy ilyen stabilitási korlát. Ha az a_i jelentkezőt felvették a c_j szakra, vagy egy ennél preferáltabb szakra, akkor $(\sum_{k:r_{ik}\leq r_{ij}} x_{ik})u_j$ tag legalább u_j, tehát a stabilitási korlát teljesül. Ha a_i jelentkezőt nem vették fel sem erre a szakra, sem egy ennél számára kedvezőbb szakra, akkor a $(\sum_{k:r_{ik}\leq r_{ij}} x_{ik})u_j$

kifejezés 0, ebből következően a $\sum_{h:(a_h,c_j)\in E, s_{hj}>s_{ij}} x_{hj}$ kifejezés legalább u_j, tehát van kvótányi diák, akiket felvettek a c_j szakra, és több pontjuk van, mint a_i-nek.

Közös kvóták esetén szakhalmazokra adhatunk meg felső korlátot. Ha $C_p \subseteq C$ egy szakhalmaz, akkor jelölje u_p a rá vonatkozó közös kvótát. A párosítás megengedett, ha ezeket a közös kvótákat is teljesíti. Közös kvótákat csak olyan szakokra van értelme meghatározni, ahol a diákoknak ugyanannyi pontjuk van a közös kvóta minden szakja esetén. A megoldás stabilitása úgy módosul, hogy ha egy (a_i, c_j) jelentkezés nincs benne a párosításban, akkor a korábbi két indokon kívül egy harmadik oka is lehet, mégpedig, hogy c_j benne van egy olyan C_p szakhalmazban, aminek az u_p közös kvótája a_i-nél magasabb pontszámú diákokkal lett feltöltve.

Az egyetemi felvételi közös kvótás változatát Biró és szerzőtársai definiálták és vizsgálták meg először [6]. Megmutatták, hogy ha *egymásba ágyazottak* a közös kvótával rendelkező szakhalmazok (vagyis ha bármely C_p és C_q szakhalmazokban van egy közös szak, akkor vagy $C_p \subset C_q$, vagy $C_p \supset C_q$ fennáll), akkor a Gale–Shapley-algoritmus általánosított változataival mindig hatékonyan található stabil megoldás. Ha viszont ez a tulajdonság nem áll fenn a szakhalmazok rendszerére, akkor nem garantált a stabil párosítás létezése, és a feladat NP-nehéz. Sajnálatos módon a hazai rendszer egymásba ágyazottsága egy kormányzati döntés után megszűnt 2008-ban, vagyis a hazai feladat nem mindig megoldható, és NP-nehéz.

Az egészértékű programozási feladatot tekintve, amennyiben közös kvóták vannak, úgy (1) korlátot kicseréljük a

$$\sum_{(a_i,c_j)\in E; c_j\in C_p} x_{ij} \le u_p \qquad \forall C_p \subseteq C \tag{4}$$

korlátra, tehát van a szakoknak egy részhalmaza (C_p), amely szakokon tanuló diákok összes száma nem lehet több, mint u_p. Az egyszerűség kedvéért az egyedi korlátokat is (ha vannak) közös kvótaként fogalmazzuk meg. Ebben az esetben C_p részhalmaz csak egy szakot tartalmaz.

Közös kvóták esetén egy diákot csak akkor lehet hozzárendelni egy szakhoz, ha belefér az összes kvótába. Pl.: c_1 szak esetén a kvóta 20, c_1 és c_2 szak együttesére a közös kvóta 10. Ekkor c_1 szakhoz biztosan nem fogunk tudni hozzárendelni 20 diákot, még akkor sem, ha lenne 20 diák, aki szeretne itt tanulni. Tehát közös kvóták esetén nem biztosítható a (3) stabilitási korlát teljesülése, módosítanunk kell ezen korláton:

$$\left(\sum_{k:r_{ik}\le r_{ij}} x_{ik}\right) u_p + \sum_{\substack{(a_h,c_k)\in E:\\ c_k\in C_p, s_{hk}>s_{ij}}} x_{hk} + u_p(1-b_{pj}) \ge u_p \tag{5}$$
$$\forall C_p, (a_i,c_j)\in E, c_j\in C_p$$

Látható, hogy ha a b_{pj} bináris segédváltozó 0, akkor az (5) stabilitási korlát teljesül. Minden szak esetén legalább egy kvótára teljesülnie kell a stabilitási korlátnak az eredeti formájában is, azaz:

$$\sum_{p:c_j \in C_p} b_{pj} \geq 1 \qquad \forall c_j \in C_p \ . \tag{6}$$

Tehát stabil megoldást kapunk, ha egy tetszőleges célfüggvényt maximalizálunk az (1), (4), (5) és (6) korlátok mellett. Minden döntési változó (x és b változók) bináris. Nevezzük ezt a modellt AFFF-nek (alap felvételi feladat felírás). Fontos hangsúlyozni, hogy ezen modell esetén a nemnulla elemek száma kvadratikusan nő a jelentkezések számával.

2.3. Stabil felvételi feladat ponthatárokkal

Az egyetemi felvételi feladat (közös kvóták esetén is) leírható a pontszámhatárokkal. Minden kvótához meghatározunk egy felvételi pontszámot. Egy diák felvehető egy szakra, ha a szakot tartalmazó összes kvóta pontszámát eléri vagy meghaladja. A ponthatárok alapján természetes módon generálhatunk egy párosítást: minden diákot felvesszük a preferencia listájában az első olyan szakra, ahol a szakhoz tartózó összes ponthatárt eléri vagy meghaladja.

Ponthatárok által megadott párosítás akkor lehetséges, ha egyik kvóta sem sérül. Egy ilyen lehetséges allokációt *irigységmentes* allokációnak (envy-free allocation) hív a szakirodalom (lásd pl.:[13]). Kérdés, hogy egy lehetséges ponthatárvektor mikor fog stabil allokációt eredményezni. Egy irígységmentes allokáció esetén a rendszerben lehet „pazarlás”. Pazarlás alatt azt értjük, hogy egy diákot elutasítanak egy olyan szakról, ahova ha felvennénk, semilyen feltétel sem sérülne. Erre a pazarlásra a legegyszerűbb példa, ha kellően magasra állítjuk be a ponthatárokat: ekkor egy diák sem kerül be egyetlen szakra sem. Tehát a stabilitáshoz azt kell elérni, hogy ne legyen pazarlás egy irigységmentes párosításban.

Első megközelítés az lehetne, hogy egy ponthatárvektor akkor lesz stabil, ha bármelyik ponthatárt is csökkentjük, akkor valamelyik kvóta túltelítődik. Ez a klasszikus egyetemi felvételi problémára működik, de sajnos közös kvóták esetén nem vezet eredményre. Közös kvóták esetén ugyanis elképzelhető, hogy nincs stabil allokáció, pedig ebben az esetben is meg tudunk adni ponthatárokat, hogy ha bármelyik ponthatárt csökkentjük, akkor szükségképpen túltelítődik egy kvóta. Ilyen ponthatároknak az lesz a tulajdonságuk, hogy ha bizonyos ponthatárok csökkenése esetén túltelítődik egy kvóta, akkor az nem feltétlenül a sajátjuk. Azt kell elérni, hogy bármelyik ponthatár csökkentésével a saját kvótájuk telítődjön túl. Ez a megközelítés oda vezet, hogy a nem telített kvóták esetén le tudjuk vinni a ponthatárt 0-ig. Tehát egy ponthatár együttes stabil elosztást eredményez, ha az elosztás lehetséges, és nem telített kvóták esetén a ponthatár 0 (bővebben lásd [2]).

A közös kvótás egészértékű programozási modellt most pontszámok segítségével írjuk le: jelölje t_p a C_p kvóta esetén a felvételi ponthatárt. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a pontszámok csak egész értékek lehetnek, t_p változó is egészértékű döntési változó lesz.

Először egy irigységmentes hozzárendelést adunk meg alkalmas korlátokkal. Az x_{ij} változó ugyanazt jelenti, mint korábban, és szükségünk van az (1) és (4) korlátokra. A stabilitási korlátok helyett más korlátaink lesznek. Nézzük először a klasszikus esetet, amikor nincsenek közös kvóták, csak a szakokra vannak egyedi kvóták. Jelölje $\bar{s}$ a lehetséges legnagyobb pontszámot. Ekkor:

$$t_j \leq (1 - x_{ij}) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \qquad \forall (a_i, c_j) \in E, \tag{7}$$

és

$$s_{ij} + 1 \leq t_j + \left(\sum_{k: r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} \right) \cdot (\bar{s} + 1) \qquad \forall (a_i, c_j) \in E \tag{8}$$

korlátok megteremtik a kapcsolatot a ponthatárok és a párosítás között, vagyis megadnak egy irigységmentes hozzárendelést. A (7) korlát semmitmondó, ha $x_{ij} = 0$. Ha $x_{ij} = 1$ (tehát az a_i jelentkezőt felveszik a c_j szakra), akkor viszont a korlát előírja, hogy a c_j szak esetén a ponthatár nem lehet nagyobb, mint amennyi pontja van az a_i diáknak. Nézzük a (8) korlátot. Amennyiben egy jelentkezés esetén a $\sum_{k: r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik}$ összeg 1 (tehát az a_i jelentkezőt felvették vagy a j szakra, vagy egy ennél preferáltabb szakra), akkor a korlát semmitmondó megint. Ellenben ha a $\sum_{k: r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik}$ összeg 0 (tehát az a_i jelentkezőt nem vették fel sem a c_j szakra, sem egy ennél preferáltabb szakra), akkor a korlát előírja, hogy a c_j szak esetén a ponthatár nagyobb, mint amennyi pontja az a_i jelentkezőnek van.

Nézzük, hogyan változnak a korlátok közös kvótás modell esetén. Ekkor a ponthatárok nem a szakokhoz tartoznak, hanem a (közös) kvótákhoz, és egy diákot csak akkor lehet felvenni egy szakra, ha a hozzá tartozó összes kvótára felveszik. A (7) korlát

$$t_p \leq (1 - x_{ij}) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \qquad \forall (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \tag{9}$$

alakra módosul, a (8) korlátot pedig helyettesítjük a

$$s_{ij} + 1 \leq t_p + \left(\sum_{k: r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} + (1 - b_{pj}) \right) \cdot (\bar{s} + 1) \qquad \forall (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \tag{10}$$

korláttal, és természetesen most is szükségünk van a (6) korlátra.

A (10) és (6) korlátok együttesen biztosítják, hogy ha valakit nem vesznek fel egy adott szakra, akkor van egy olyan kvóta, ahol a ponthatár nagyobb, mint amennyi pontja az a_i diáknak van.

Ha azt szeretnénk elérni, hogy az eredményül adódó irigységmentes párosítás stabil is legyen, akkor elő kell írni, hogy a nem telített szakok esetén a ponthatár 0. Ennek biztosítására bevezetünk egy f_p bináris változót, ami azt fogja mutatni, hogy a C_p kvóta telített-e.

$$f_p \cdot u_p \leq \sum_{(a_i,c_j)\in E: c_j \in C_p} x_{ij} \qquad \forall C_p \subseteq C, \tag{11}$$

és

$$t_p \leq f_p(\bar{s}+1) \qquad \forall C_p \subseteq C. \tag{12}$$

Összességében egy tetszőleges célfüggvényt maximalizálunk az (1), (4), (9), (10), (6), (11) és (12) korlátok mellett. Az x_{ij}, b_{pj} és f_p döntési változók binárisak, a t_p döntési változók pedig egészértékűek. Nevezzük ezt a modellt SFPF-nek (stabil felvételi ponthatárok felírás). Lehet látni, hogy az AFFF-modellhez képest több a döntési változó. Viszont a nemnulla elemek száma csak lineárisan növekszik a jelentkezések számával. Mivel az SFPF-modell vegyes egészértékű feladat, ezért numerikus szempontból nem feltétlenül a legjobb (akár nagyon hosszú futási időkkel is szembesülhetünk).

2.4. Stabil felvételi feladat bináris ponthatárokkal

Lehetséges azonban tiszta bináris modellé átformálni az SFPF felírást. Ekkor a ponthatárokat bináris változókká alakítjuk. Szerencsére a ponthatárok csak ténylegesen előforduló pontok lehetnek, ezért nem szükséges minden lehetséges pontszámhoz bináris változót bevezetni. Tekintsünk egy $(a_i, c_j) \in E$ jelentkezést, vagyis az a_i diák jelentkezését a c_j szakra. Ekkor az összes C_p kvóta esetén, ami tartalmazza a c_j szakot, bevezetünk egy t_{pi} bináris változót. Ezen változó 1 értéke azt jelenti, hogy a C_p kvóta esetén a ponthatár s_{ij}, vagy ennél alacsonyabb (tehát az a_i diákot a C_p kvótába felvehetjük). A t_{pi} változó 0 értéke azt jelenti, hogy a C_p kvótába s_{ij} pontnál kevesebbel nem lehet bekerülni (s_{ij} ponttal nem eldöntött, hogy egy diák bekerül-e vagy sem). Nézzünk tehát ezt a konkrét (a_i, c_j) jelentkezést. Az a_i diákot fel kell venni a c_j szakra, vagy egy ennél preferáltabb szakra, ha minden, a szakhoz tartozó kvóta ponthatárát eléri. Ekkor:

$$\sum_{k: r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ij} \geq \sum_{p: c_j \in C_p} t_{pi} - (q_j - 1) \qquad \forall (a_i, c_j) \in E, \tag{13}$$

ahol q_j jelöli azon kvóták számát, ami tartalmazza a j szakot.

Ha egy diákot nem veszünk fel egy kvótába, akkor nála rosszabbat sem vehetünk fel ide. Ezt a relációt viszont nem írjuk fel az összes viszonylatban, csak a pontszámok tekintetében a soron következő esetén:

$$x_{ij} \leq t_{pi'} \qquad \forall (a_i, c_j), (a_{i'}, c_{j'}) \in E; c_j, c_{j'} \in C_p; n(p, s_{ij}) = s_{i'j'}, \tag{14}$$

ahol $n(p, s_{ij})$ megadja a C_p kvóta esetén a rangsorban s_{ij} pontszám után következő (magasabb) pontszámot.

Szükségünk van még a ponthatárok közötti koherenciára:

$$t_{pi} \leq t_{pi'} \qquad \forall (a_i, c_j), (a_{i'}, c_{j'}) \in E; c_j, c_{j'} \in C_p; n(p, s_{ij}) = s_{i'j'}. \tag{15}$$

Eljutottunk megint egy irigységmentes hozzárendeléshez. Ha azt akarjuk, hogy a párosítás stabil legyen, akkor elő kell megint írni, hogy egy adott kvóta vagy tele van, vagy 0 a ponthatár. A 0 ponthatár azt is jelenti, hogy mindenkit felvettünk az adott szakra, aki ott szeretett volna tanulni:

$$u_p - u_p t_{pi} \leq \sum_{(a_i,c_j)\in E: c_j \in C_p} x_{ij} \qquad \forall C_p \subseteq C; a_i : a_i = m(p), \tag{16}$$

ahol $m(p)$ megadja azt a jelentkezőt, akinek legkisebb a felvételi pontszáma a C_p kvóta esetén.

Maximalizálunk egy tetszőleges célfüggvényt az (1), (4), (13), (14), (15) és (16) korlátok mellett. Ez a modell az SBFPF (stabil bináris felvételi ponthatárok felírás), ezen megközelítés esetén minden döntési változó (x_{ij} és t_{pi}) bináris. Most is lineáris a viszony a jelentkezések száma és a nemnulla elemek között. További fontos megjegyzés, hogy a t_{pi} változó esetén nem kell egészértékűségi kikötés, csak a legalsó pontszámok esetén. Ha a legmagasabb pontszámokhoz tartozó t_{pi} változókhoz előírjuk, hogy értékük 1-nél nem lehet nagyobb, akkor a többi t_{pi} változó esetén a $t_{pi} \leq 1$ kiköketéseket is el lehet hagyni.

Numerikus vizsgálatok során azt tapasztaltuk, hogy az SBFPF-modell segítségével viszonylag nagyméretű feladatokat is meg lehet oldani. Generált adatokon 300 000 jelentkezést tartalmazó mintát is meg tudtunk oldani, kb. ennyi jelentkezés van (évente) a magyar felsőoktatási jelentkezési rendszerben (nem közös kvótás modellekhez numerikus eredmények elérhetőek [1]-ben és [2]-ben; a közös kvótás modellek tesztelésén jelenleg is dolgozunk, amelynek eredményét egy későbbi tanulmányban fogjuk ismertetni). Az eredmény azért is különösen hangsúlyos, mert a közös kvótás modell NP-nehéz feladat, ezért hatékony algoritmus létezése gyakorlatilag kizárt ebben az esetben. Természetesen nem biztos, hogy tetszőleges minta esetén ilyen kedvezőek a futási eredmények, de úgy tűnik, hogy az alkalmazásokban előforduló minták esetén az SBFPF-modell hatékony módszer az egzakt megoldás kiszámítására.

3. Összefoglalás

A cikkben ismertettük a felvételi feladatot. Felvételi feladatokat jellemzően az ún. Gale–Shapley-algoritmussal szokás megoldani. A ténylegesen megvalósuló felvételi rendszerekben számos specialitás van, ami lehetetlenné teszi a Gale–Shaley-algoritmus használatát. Az egyik ilyen specialitás a közös kvóták jelenléte.

A cikkben bemutatásra került három különböző egyészértékű programozási feladat a közös kvóták esetére. Az ún. stabil bináris felvételi ponthatárok modell segítségével generált mintákon meg tudtunk oldani akkora méretű feladatokat, mint amilyen nagy a magyar felsőoktatási rendszer. Ráadásul ezen modellek robosztusak, tovább bővíthetőek lineáris korlátok hozzáadásával, illetve a célfüggvényük is szabadon választható, ami a további előnyöket jelent a Gale–Shapley-algoritmuson alapuló heurisztikákkal szemben.

Köszönetnyilvánítás

Biró Péter kutatását az MTA Lendület Programja (LP2016-3/2017), az MTA Kiválósági Együttműködési Programja (KEP-6/2018) és az NKFIH (OTKA) K128611 programja támogatta.

Ágoston Kolos Csaba kutatását az MTA Kiválósági Együttműködési Programja (KEP-6/2018) támogatta.

Hivatkozások

[1] Ágoston, K. C. and Biró, P.: *Modelling Preference Ties and Equal Treatment Policy*, In Proceedings of ECMS 2017: 31st European Conference on Modelling and Simulation, pp. 516-522.

[2] Ágoston, K. C., Biró, P., and McBride, I.: *Integer programming methods for special college admissions problems*, Journal of Combinatorial Optimization, Vol. **32** No. **4**, pp. 1371-1399 (2016).

[3] Ágoston, K. C., Biró, P., and Szántó, R.: *Stable project allocation under distributional constraints*, In Proceedings proceedings of the 10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and its Applications, pp. 43-52.

[4] Baïou, M. and Balinski, M.: *The stable admissions polytope*, Mathematical Programming, Vol. **87** No. **3**, pp. 427-439 (2000).

[5] Biró, P.: *Applications of Matching Models under Preferences*, Trends in Computational Social Choice, chapter **18**, pp. 345-373 AI Access, (2017).

[6] Biró, P., Fleiner, T., Irving, R. W., and Manlove, D. F.: *The College Admissions problem with lower and common quotas*, Theoretical Computer Science, Vol. **411**, pp. 3136-3153 (2010).

[7] Biró, P. and Kiselgof, S.: *College admissions with stable score-limits*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **23** No. **4**, pp. 727-741 (2015).

[8] Biró, P., Manlove, D. F., and McBride, I.: *The hospitals/residents problem with couples: Complexity and integer programming models*, in: *International Symposium on Experimental Algorithms*, Springer, pp. 10-21, (2014).

[9] Fleiner, T. and Jankó, Z.: *Choice Function-Based Two-Sided Markets: Stability, Lattice Property, Path Independence and Algorithms*, Algorithms, Vol. **7** No. **1**, pp. 32-59 (2014).

[10] Gale, D. and Shapley, L. S.: *College Admissions and the Stability of Marriage*, American Mathematical Monthly, Vol. **69** No. **1**, pp. 9-15 (1962).

[11] Kwanashie, A. and Manlove, D. F.: *An integer programming approach to the hospitals/residents problem with ties*, in: *Operations Research Proceedings 2013*, Springer, pp. 263-269 (2014).

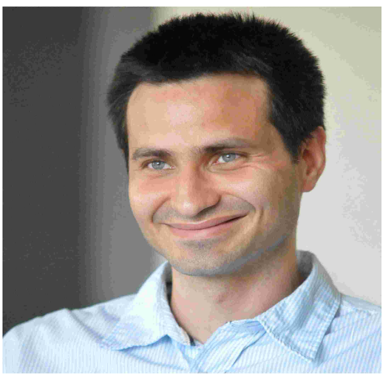
[12] Vande Vate, J. H.: *Linear programming brings marital bliss*, Operations Research Letters, Vol. **8** No. **3**, pp. 147-153 (1989).

[13] Wu, Q. and Roth, A. E.: *The lattice of envy-free matchings*, mimeo.

Ágoston Kolos Csaba 1973-ban született Orosházán. A szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium speciális matematika tagozatán tanult, itt is érettségizett 1992-ben. Diplomát a Budapesti Corvinus Egyetem jogelődjén kapott. 2006-ban védte meg a doktori értekezését szintén a Budapesti Corvinus Egyetemen. A doktori cím megszerzése után az egyetemen maradt, itt oktatott és kutatott. Kutatói területe eleinte a biztosítási piacok közgazdasági modellezése volt (ideértve a nyugdíjrendszereket is), mostanában inkább az operációkutatás, azon belül is az LP-modellezés. 40 tudományos közlemény szerzője. 2008-ban Bod Péter-emlékdíjjal tüntették ki. Gyakorló katolikus, 4 gyermek édesapja.

ÁGOSTON KOLOS CSABA

Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 8.
Magyar Tudományos Akadémia
Közgazdaságtudományi Intézet
1097 Budapest, Tóth Kálmán u. 4.
kolos.agoston@uni-corvinus.hu



Biró Péter matematikusként végzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen (2003), majd ugyanitt lett a matematika és számítástudományok doktora (2007). Ezzel egyidejűleg közgazdaságtant tanult a Budapesti Corvinus Egyetemen, ahol az EU szakirányt végezte el (2007). Kutatási területe a kooperatív játékelmélet, algoritmikus mechanizmustervezés, és ezeken belül is a párosítások elmélete. 2007-től három és fél éven keresztül volt a University of Glasgow kutatója, majd 2010 októberében csatlakozott a Közgazdaságtudományi Intézet játékelméleti kutatócsoportjához. 2014-ben egy évet Stanfordban töltött vendégprofesszorként, Al Roth meghívására. 2016. július 1-én indult a Lendület Program által támogatott Piactervezés kutatócsoportja. Az elméleti kutatások mellett gyakorlati alkalmazásokban is közreműködött, így például az Egyesült Királyság vesecsere-programjában, a skóciai rezidensek allokációs programjában, vagy a magyar felsőoktatási felvételi rendszer pontszámítási eljárásában. Ezekről és további alkalmazásokról bővebb információ az általa szerkesztett online gyűjteményben található. További információkat a kutatói weblapján érhetők el.

BIRÓ PÉTER
Magyar Tudományos Akadémia
Közgazdaságtudományi Intézet
1112 Budapest, Budaörsi út 45.
Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
1097 Budapest, Tóth Kálman u. 4.
peter.biro@krtk.mta.hu

INTEGER PROGRAMMING TECHNIQUES FOR COLLEGE ADMISSION PROBLEM WITH COMMON QUOTAS

Kolos Csaba Ágoston and Péter Biró

College admission problems have been intensively studied in the past 55 years in the mathematics, economics and computer science literatures. The standard method for solving these two-sided matching problems is by the deferred-acceptance algorithm of Gale and Shapley, or by its variants. In this paper we study the alternative method of integer programming (IP). We give three different IP formulations for the special case of college admission problems, where the common upper quotas are present. This is an NP-hard problem, but our simulations show that one of our formulations can be solved for large instances as well.

Keywords: college admissions, stable matching, integer programming, common quotas.

Mathematics Subject Classification (2000): 90C10, 91B68, 05C70.