

VESECSEREPROGRAMOK MATEMATIKÁJA

BIRÓ PÉTER

Amennyiben egy vesebetegnek van egy lehetséges élődonorja, de az immunológiai szempontból nem kompatibilis vele, akkor több országban lehetősége van arra, hogy szervezett keretek közt elcserélje a donorját egy számára kompatibilis donorra. A cseréket központilag koordináló párosító alkalmazásokat közgazdászok, számítástudósok és transzplantációs szakemberek egyaránt szervezik és kutatják. Ebben a dolgozatban rövid áttekintést adunk a mögöttes gráfelméleti problémáról és annak megoldási lehetőségeiről egészértékű programozással.

1. Bevezetés

Központilag koordinált párosító programok az élet sok területén kerültek már bevezetésre, diákok allokálása iskolákhoz, egyetemi felvételi, gyakornokok allokálása, tantárgyválasztás, cikkek allokálása bírálókhöz, hogy csak néhány példát említsünk (egy részletes összefoglaló az alkalmazásokról: [5]). A vesebetegek és potenciális élődonorok szervezett egymáshoz párosítása egy új típusú alkalmazás, ami az elmúlt két évtizedben világszerte elterjedt.

A krónikus vesebetegség hagyományos kezelése a dialízis, ami rossz életminőséget és kedvezőtlen életkilátásokat biztosít a betegnek (nagyjából 10 éves, folyamatosan romló életkilátással), ezért az orvostudomány jelenlegi állása szerint a transzplantáció az egyetlen reális gyógyítási lehetőség. Halott donorból kevés van, például az USA-ban 300 000 ember áll dialízises kezelés alatt, amiből 100 000 van rajta a várólistán, de évente csak nagyjából 12 000 halott donor van, ezért az átlagos várakozási idő 8-10 év a vesére. Mivel egy egészséges embernek két veséje van, és eggyel sem romlik lényegesen az életkilátása, ezért az élődonoros transzplantáció a nyugati világban mindenütt előtérbe került. Ha azonban a beteg donorja (tipikusan a házastársa) nem kompatibilis a beteggel, vércsoport vagy antigén (HLA) probléma miatt, akkor a közvetlen donáció nem jöhet létre. Ha viszont van egy másik, hasonló problémával rendelkező pár, és keresztben stimmelnek az immunológiai adatok, akkor a két beteg elcserélheti egymás között a donorjait. Az első ilyen párosítás Európában 1999-ben hajtották végre egy svájci és egy német pár között. 2004-ben indult be az első európai program Hollandiában [8], aminek

keretében a regisztrált beteg-donor párokat háromhavonta összepárosítják. Jelenleg 10 európai országban működik vesecseriprogram, amelyről a COST Action CA15210 (European Network for Collaboration on Kidney Exchange Programmes) keretében nemrég készítettünk egy tanulmányt [6].

A cseréket szinte minden működő programban egyidőben hajtják végre, hiszen lépésenként történő donáció esetén fennállhat a veszély, hogy a cserekör megszakad és az egyik beteg nemcsak kimarad a cseréből, hanem a donorját is elveszíti. Az egyetlen európai program, ahol vállaltan nem szimultán cseréket hajtanak végre (több nap alatt), Csehországban működik, itt hat-, illetve héthosszú cseréket is véghezvittek már. Az általánosan követett egyidejű cserék viszont logisztikai okokból azt eredményezik, hogy csak kis méretű, tipikusan legfeljebb háromhosszú cseréket keresnek a programokban (Hollandiában legfeljebb négyhosszút).

Az Amerikai Egyesült Államokban a New England Kidney Exchange Program volt az első vesecseriprogram, ami 2005-ben kezdte meg működését [18]. Jelenleg három nagy országos program működik egymással átfedésben: United Network for Organ Sharing (UNOS), National Kidney Registry (NKR), és Alliance for Paired Donation (APD) [13] néven, de a cserék többségét a nagyobb transzplantációs központok házon belül oldják meg. Kanadában és Ausztráliában országos programok működnek, melyeket egy tanulmányban nemrég összehasonlítottak a holland és az egyesült királyságbeli programokkal [12]. Végül két összefoglaló cikket javaslunk a vesecseré témakörének áttekintésére: [12], [14].

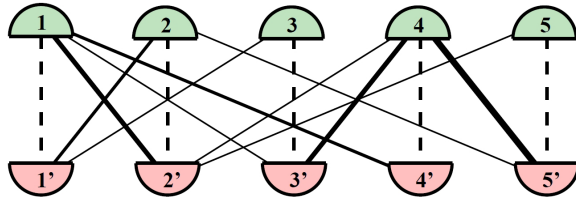
A cikk szerzője az Egyesült Királyság vesecseriprogramjának algoritmusán dolgozott 2007 és 2010 között Glasgowban, ezen alapulnak a cikkben ismertetett első leírások. A program 2007-ben kezdte meg működését az NHS Blood and Transplant szervezésében [15]. Először csak páros cseréket engedtek meg, majd 2008-tól három hosszú cseréket is alkalmaztak. Az általunk implementált első megoldási módszer egy gráfes heurisztikán alapuló egzakt algoritmus volt [7], amelyet a későbbiekben egészértékű programozási módszerre cseréltek [16]. Az elmúlt 10 évben több mint 700 beteg kapott vesét a programon keresztül.

2. A vesecseriprogramok alapfeladata

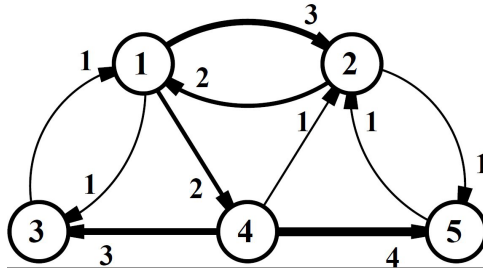
Az Európában és a világ más részein működő programok sajátosságai eltérnek egymástól, melyekről az utolsó fejezetben bővebben is írunk. Az alapfeladat viszont minden országban ugyanaz: a donációk számának maximalizálása rövid cserekörök segítségével. Ezt a feladatot fogjuk a következőkben először két gráfelméleti modell segítségével leírni, majd két egészértékű programozási leírást adni rá.

2.1. Gráfelméleti leírás, komplexitás

Amennyiben a donorokat és betegeket egy-egy csúccsal reprezentáljuk, akkor a kompatibilitási gráf egy *páros gráf* lesz, ahol egy donor akkor van összekötve egy



1. ábra. Egy öt párból álló probléma leírása a páros gráfes modellben.



2. ábra. Az előző probléma leírása az irányított gráfes modellben.

beteggel, ha az kompatibilis vele. Amennyiben a donációk minőségét is tekintjük, ahogy azt minden európai országban teszik, akkor ezt az élekre írt súlyokkal reprezentálhatjuk. A rövid cserékből álló megoldás egy olyan párosításnak felel meg ezen a gráfon, ahol egy donor akkor és csakis akkor lehet fedve, ha a párja is fedve van. Az 1. ábrán egy öt donorból és öt betegből álló problémát illusztrálunk.

A feladat másik természetes gráfes leírása az *irányított gráfes* modell, ahol a csúcsok beteg-donor párokat reprezentálnak, és egy csúcsból akkor fut irányított él egy másik csúcsba, ha az első donor kompatibilis a második beteggel. Ebben a modellben a megoldás diszjunkt körök halmaza, vagyis egy ún. körpakolás. A fenti példa átírata az irányított gráfes modellben a 2. ábrán látható.

A maximális méretű vagy súlyú megoldás problémája eltérő komplexitású attól függően, hogy milyen felső korlát van adva a cserekörök hosszára nézve. Amennyiben csak kettőhosszú cseréket engedünk (ahogy jelenleg Franciaországban és Svédországban teszik), akkor a feladat egy maximális méretű/súlyú párosítás feladatra redukálódik egy nempáros gráfon, amely Edmonds algoritmusával hatékonyan megoldható [11].

Amennyiben nincs megkötés a cserekörök hosszára nézve, ahogy Csehországban tekintenek a problémára, akkor szintén polinomiális időben megoldható a feladat. A maximális méretű cserék problémája esetén ezt a páros gráf egyszerű módosításával tudjuk megtenni: kössünk össze minden beteget a donorjával egy 0 súlyú éllel, a többi kompatibilis pár között futó él súlya pedig legyen 1. Az eredeti

feladatban egy maximális méretű cserének a módosított páros gráfban egy teljes maximális súlyú párosítás felel meg, melyet a magyar módszerrel gyorsan kiszámíthatunk. Amennyiben maximális súlyú megoldást keresünk (ahol a súly a donáció minőségének felel meg), akkor ugyanígy kell eljárunk, a betegek és eredeti donorjaik között 0 súlyú élt kell bevezetnünk a páros gráfban és maximális súlyú teljes párosítást találni. A konstrukció lényege, hogy amennyiben egy donor nem a saját betegével kerül párosításra, akkor az ő betege is egy kompatibilis donorral lesz párosítva, vagyis szerepelni fognak egy cserekörben, ha viszont egymással vannak párosítva, akkor nem vesznek részt cserében [1].

Sajnálatos módon a valóságban leggyakoribb eset, amikor kettőnél hosszabb, de korlátos cseréket engedünk meg, NP-nehéz feladatra vezet [1], amelyet hatékonyan közelíteni sem lehet [7]. A gyakorlatban viszont a feladatot leíró gráfok viszonylag ritkák, és emiatt exponenciális idejű egzakt algoritmus is megfelelően működött a 100-150 párból álló feladatokra az Egyesült Királyságban 2007-2010 között [7]. Ez a gráfos heurisztika azonban nem feltétlenül működik nagyobb feladatokra, illetve komplikált az átírása speciális optimalitási feltételek esetén, ezért tértek át a legtöbb országban egészértékű programozási módszerekre.

2.2. Egészértékű programozás használata

Az egészértékű programozás használatát vesecseriprogramokban először Roth és társai javasolták [17], majd Abraham és társai [1] fejlesztették ki az első szofisztikált formalizációkat az alapfeladatra, amelyek rendkívül hatékonynak bizonyultak véletlenül generált adatokon. A ma már klasszikusnak tekinthető cikkben két alapformalizációt adtak, amelyeket itt leírunk.

Elsőként az ún. *körformalizációt* írjuk le. Itt a változóink a megengedett körökön lesznek, és feltételként csupán azt fogjuk megkövetelni, hogy a kiválasztott körök ne érintsék ugyanazon beteg-donor párt egynél többször. Formálisan, jelölje $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a beteg-donor párokat, és jelölje $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ a lehetséges köröket, ahol minden C_j körhöz hozzárendelünk egy c_j bináris (0, 1) változót, továbbá jelölje w_j a C_j kör méretét (vagy súlyát). Amennyiben C_j tartalmazza a v_i párt, azt $v_i \in C_j$ -vel jelöljük. Feladatunk a következő:

$$\max \sum_{j=1}^m w_j c_j$$

$$f.h. \quad \sum_{j: v_i \in C_j} c_j \leq 1 \quad \text{minden } v_i \text{ csúcsra.}$$

A második leírást *élformalizációnak* nevezi a szakirodalom, mert itt a változók az irányított gráf élein vannak. Jelölje $v_i v_j$ a v_i csúcsból v_j csúcsba futó élt, és a hozzá tartozó bináris (0, 1) változó legyen $x(v_i v_j)$, illetve az él súlyát jelölje $w_e(v_i v_j)$. A feladat a következő.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i,j} w_e(v_i v_j) x(v_i v_j) \\ f.h. \quad & \sum_j x(v_i v_j) - \sum_j x(v_j v_i) = 0 \quad \text{minden } v_i \text{ csúcsra, és} \\ & \sum_j x(v_i v_j) \leq 1 \quad \text{minden } v_i \text{ csúcsra, valamint} \\ & x(v_{i_1} v_{i_2}) + x(v_{i_2} v_{i_3}) + \cdots + x(v_{i_{L-1}} v_{i_L}) \leq L \quad \text{minden } L \text{ hosszú útra,} \end{aligned}$$

ahol L a körök hosszának felső korlátját jelöli, és az utak valódi utak, vagyis diszjunkt csúcsokból állnak, így körök sem lehetnek.

Mindkét alapformalizáció egyszerű, és könnyű igazolni a helyességüket. Azt viszont láthatjuk, hogy egyik egészértékű program sem kompakt, a körformalizációnál a változók száma lehet exponenciális (a feltételek száma lineáris a gráf csúcsainak számában), míg az élformalizációnál a feltételek száma lehet exponenciális (a változók száma lineáris a gráf éleinek számában). Megfelelő implementáció esetén mégis jól működhetnek, ahogy azt Abraham és társai bemutatják [1], például az oszloggenerálás technikája döntő fontosságú a körformalizációs megoldásában.

Vannak azonban újabb leírások is, amelyek kompaktak (vagyis a változók és a feltételek száma is polinomiális a gráf paramétereiben), ezek áttekintésére Dickerson és társai cikkét javasoljuk az olvasónak [9].

3. Új kihívások a vesecsereprogramokban

Ebben a fejezetben összefoglaljuk az elmúlt évek legfontosabb fejlesztéseit és kihívásait, amelyek újfajta matematikai kérdésekhez vezetnek.

3.1. Altruisztikus donorok által indított láncok

Altruisztikus donorok azok a donorok, akik nincsenek senkivel kapcsolatban, csak önzetlenül felajánlják a veséjüket, hogy ezzel megmentsenek egy ismeretlent. Az ilyen donorok száma nagyjából 2-5 minden három hónapban az Egyesült Királyságban. Eredetileg az ilyen önzetlen donorok veséit a kadaver (halott donorból származó szervekre történő) várólistán szereplő betegeknek adták, de később felismerték, hogy nagy segítséget jelenthetnek a vesecsereprogramokban is, hiszen láncot lehet létrehozni egy ilyen kezdeti donorral. Az altruisztikus láncok nagy előnye, hogy a donációkat nem kell egyidőben végrehajtani, mert először minden beteg megkaphatja a vesét, és csak utána kell a donorjának tovább adnia az övét. Az ilyen láncokat az európai országokban viszonylag röviden futtatják, abból a megfontolásból, hogy az utolsó vese hamar kerüljön egy várólistán lévő beteghez, bár Spanyolországban, Olaszországban és Csehországban egyaránt előfordult már

hathosszú lánc. Az Egyesült Államokban viszont *végtelen* altruisztikus láncokat is kezdeményeztek, ahol egyes esetekben már 60 felett jár a donációk száma [19].

A feladat matematikai oldalát ez a lehetőség nagyban befolyásolja, hiszen most már nem csak rövid köröket, de egyúttal hosszú utakat is kereshetünk az irányított gráfban. Végtelen hosszú láncok esetén a vegyes problémára adtak egészértékű programozási leírást Anderson és társai [2], ahol a *díjgyűjtő utazóügynök* probléma egy variánsát használták a megoldásban. Rövid körök és hosszabb utak esetén Dickerson és társai adtak új egészértékű programokat [9].

3.2. Deszenzitizáció mint alternatív kezelés

Az inkompatibilis beteg-donor párok között bizonyos esetekben mégis végrehajtható az átültetés, ha a beteg keresztülmegy egy költséges és időigényes deszenzitizálási procedúrán. Habár az eredmények a beültetett vese funkcióit tekintve elmaradnak a kompatibilis cserétől, ezt az eljárást sok országban (Olaszország, Franciaország, Svédország) mégis alapeljárásként használják, ami a vesecseriprogramok sikerességének is gátja, hiszen kevés inkompatibilis pár jelentkezik. A fejlett programokban először mindig a vesecseriprogramban történő részvételt javasolják a pároknak, és csak egy-két sikertelen párosítási forduló után támogatják a deszenzitizációs eljárást. Több programban, így a most induló skandináv közös programban is, a deszenzitizáció lehetőségét megengedik ismeretlen beteg-donor párok között is, amennyiben a várható eredmény jobb, mint az eredeti beteg-donor pár esetén. Hasonló kérdés merül fel kompatibilis pároknál is, akiknek több ország programjában is felajánlják a részvételt, egyrészt, hogy immunológiailag alkalmasabb donort találjanak a betegnek, másrészt pedig, hogy a részvételükkel másokon segítsenek.

Amennyiben a deszenzitizáció egy lehetséges cserén belüli eljárás bármelyik donor és beteg között, akkor nem feltétlenül csak a donációk számát igyekeznek maximalizálni a programokban, hanem az ezen kezelésre utalt betegek számát is minimalizálják. Ezen két cél jól definiált módon, egyszerre jelenik meg a skandináv programban [3].

3.3. Laboratóriumi tesztelelés utáni újraoptimalizálás

A kompatibilitási gráfokat a donorok és betegek külön-külön elemzett vérmintái alapján hozzák létre. Ezek a gráfok azonban nem mindig pontosak – főleg, ha nem egységes az immunológiai vizsgálat –, és emiatt az operációk előtt végrehajtott laboratóriumi vizsgálatnál (amikor a donor és beteg vérének ténylegesen összekeverik) gyakoriak a pozitív keresztpróbák. Ez az egyik fő oka a cserék meghiúsulásának. Amerikában a meghiúsult cserében szereplő párokat egyszerűen visszateszik a feladatba, és új cseréket keresnek, mert ott naponta-hetente történnek a futtatások. Európában viszont tipikusan háromhavonta vannak a futtatások, ezért a laboratóriumi tesztek után sok programban rögtön igyekeznek javított megoldást találni.

A javítás szempontjából a legnagyobb európai program, az Egyesült Királyság programja, a leginkább kötött: ott csak egyfajta javítást engedélyeznek. Amennyiben a $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k \rightarrow v_i$ háromhosszú cserében van egy ún. *viSSzaél*, például $v_j v_i$, és a $v_j v_k$ vagy $v_k v_i$ élek valamelyike sérül, akkor még megpróbálják a beágyazott $v_i \leftrightarrow v_j$ kettő hosszú cserét végrehajtani. Ezért is alakítják úgy az eredeti optimalizálási feladatot, hogy az ilyen beágyazott kettőhosszú köröket tartalmazó háromhosszú köröket találják meg nagy számban.

A kisebb programok esetén egyrészt a megoldás is kisebb, és általában a tesztelés is gyorsabban működik, ezért sokkal rugalmasabb módon tudják javítani a megoldást. Hollandiában például iteratív tesztelést végeznek: először az első cserékort tesztelik, ha ez rendben van, akkor folytatják a második cserekörrel, ha viszont probléma akad, akkor a teljes megoldást újraszámolják. Matematikai értelemben a robosztus párosítások kérdésköre áll a legközelebb a feladatkörhöz, de égisértékű programozással is kereshető várható értékben jó megoldás [10].

3.4. Stratégiai kérdések kórházaknál és nemzetközi együttműködésben

Az amerikai vesecseriprogramok egyik legnagyobb problémája, hogy a transzplantációs központok gyakran nem jelentik a könnyen párosítható beteg-donor párjaikat, mert ezeknek házon belül keresnek párt [4]. Az országos programokban ezért túlsúlyba kerülnek a nehezen párosítható beteg-donor párok, és emiatt nehéz cseréket találni. Több megoldási javaslat közül az egyik programban krediteket kezdtek el osztani a jól párosítható párokat regisztráló kórházaknak, amelyek révén a későbbiekben előnyben részesítik ezen kórház betegeit a nehezen párosítható betegek kiválasztásakor.

Hasonló kérdések merülnek fel a nemzetközi programokban is. Európában a cseh és osztrák program lényegében már egybeolvadt, amihez esetleg hazánk is csatlakozhat majd a jövőben, és a skandináv országokban is rögtön egy svéd-norvég-dán közös programban kezdték meg a működést. Itt is felmerül a kérdés, hogy az országok vajon a könnyen létrehozható cseréket nem fogják-e országon belül végrehajtani, illetve nem vétóznak-e meg egy olyan közös optimális megoldást, amelyet országon belül javítani tudnának. Ezen kérdések vizsgálatában a matematikai megközelítés mellett a játékelméleti modellek is a segítségünkre lehetnek.

Köszönetnyilvánítás

Biró Péter kutatását az MTA Lendület Programja (LP2016-3/2017), az MTA Kiválósági Együttműködési Programja (KEP-6/2018) és az NKFIH (OTKA) K129086 pályázata támogatta.

Hivatkozások

- [1] ABRAHAM, D. J., BLUM, A., AND SANDHOLM, T.: *Clearing algorithms for barter exchange markets: Enabling nationwide kidney exchanges*, in: *Proceedings of the 8th ACM conference on Electronic commerce*, pp. 295-304, ACM (2007).
- [2] ANDERSON, R., ASHLAGI, I., GAMARNIK, D., AND ROTH, A. E.: *Finding long chains in kidney exchange using the traveling salesman problem*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. **112** No. **3**, pp. 663-668 (2015).
- [3] ANDERSSON, T., KRATZ, J., *et al.*: *Kidney exchange over the blood group barrier*, Department of Economics, Lund Universtiy Working Papers, Vol. **11** (2015).
- [4] ASHLAGI, I. AND ROTH, A. E.: *New challenges in multihospital kidney exchange*, *The American Economic Review*, Vol. **102** No. **3**, pp. 354-359 (2012).
- [5] BIRÓ, P.: *Applications of Matching Models under Preferences*, in: ENDRISS, U. (Hg.), *Trends in Computational Social Choice*, chap. **18**, pp. 345-373, AI Access (2017).
- [6] BIRÓ, P., BURNAPP, L., HAASE, B., HEMKE, A., JOHNSON, R., VAN DE KLUNDERT, J., MANLOVE, D., BÁŠHMIG, G., BOND, G., KUYPERS, D., SMEULDERS, B., SPIEKMA, F., FRONEK, J., SALONEN, M., JACQUELINET, C., MACHER, M.-A., MENOUDAKOU, G., ÁSGEIRSSON, E. I., WILSON, N., DI CIACCIO, P., SPARACINO, V., KIESZEK, R., BOLOTINHA, C., BALTISOVÁ, T., CECHLÁROVÁ, K., VALENTÁN MUNOZ, M. D. L. O., ANDERSSON, T., HADAYA, K., AND LEISHMAN, R.: *Kidney Exchange Practices in Europe: First Handbook of the COST Action CA15210: European Network for Collaboration on Kidney Exchange Programmes (ENCKEP)*, http://www.enckep-cost.eu/assets/content/57/handbook1_28july2017-20170731121404-57.pdf (2017).
- [7] BIRO, P., MANLOVE, D. F., AND RIZZI, R.: *Maximum weight cycle packing in directed graphs, with application to kidney exchange programs*, *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. **1** No. **04**, pp. 499-517 (2009).
- [8] DE KLERK, M., WITVLIET, M. D., HAASE-KROMWIJK, B., WEIMAR, W., AND CLAAS, F.: *A flexible national living donor kidney exchange program taking advantage of a central histocompatibility laboratory: the Dutch model*, *Clinical Transplantation*, Vol. **8**, pp. 69-73 (2008).
- [9] DICKERSON, J. P., MANLOVE, D. F., PLAUT, B., SANDHOLM, T., AND TRIMBLE, J.: *Position-indexed formulations for kidney exchange*, in: *Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation*, pp. 25-42, ACM (2016).
- [10] DICKERSON, J. P., PROCACCIA, A. D., AND SANDHOLM, T.: *Failure-aware kidney exchange*, in: *Proceedings of the fourteenth ACM conference on Electronic commerce*, pp. 323-340, ACM (2013).
- [11] EDMONDS, J.: *Paths, trees, and flowers*, *Canadian Journal of mathematics*, Vol. **17** No. **3**, pp. 449-467 (1965).
- [12] FERRARI, P., WEIMAR, W., JOHNSON, R. J., LIM, W. H., AND TINCKAM, K. J.: *Kidney paired donation: principles, protocols and programs*, *Nephrology Dialysis Transplantation*, Vol. **30** No. **8**, pp. 1276-1285 (2015).
- [13] FUMO, D., KAPOOR, V., REECE, L., STEPKOWSKI, S., KOPKE, J., REES, S., SMITH, C., ROTH, A., LEICHTMAN, A., AND REES, M.: *Historical Matching Strategies in Kidney Paired Donation: The 7-Year Evolution of a Web-Based Virtual Matching System*, *American Journal of Transplantation*, Vol. **15** No. **10**, pp. 2646-2654 (2015).

- [14] GLORIE, K., HAASE-KROMWIJK, B., KLUNDERT, J., WAGELMANS, A., AND WEIMAR, W.: *Allocation and matching in kidney exchange programs*, *Transplant International*, Vol. **27** No. **4**, pp. 333-343 (2014).
- [15] JOHNSON, R. J., ALLEN, J. E., FUGGLE, S. V., BRADLEY, J. A., AND RUDGE, C.: *Early experience of paired living kidney donation in the United Kingdom*, *Transplantation*, Vol. **86** No. **12**, pp. 1672-1677 (2008).
- [16] MANLOVE, D. F. AND O'MALLEY, G.: *Paired and altruistic kidney donation in the UK: Algorithms and experimentation*, *Journal of Experimental Algorithmics (JEA)*, Vol. **19**, pp. 2-6 (2014).
- [17] ROTH, A. E., SÖNMEZ, T., AND ÜNVER, M.: *Efficient kidney exchange: Coincidence of wants in markets with compatibility-based preferences*, *The American Economic Review*, Vol. **97** No. **3**, pp. 828-851 (2007).
- [18] ROTH, A. E., SÖNMEZ, T., AND ÜNVER, M. U.: *A kidney exchange clearinghouse in New England*, *American Economic Review*, Vol. **95** No. **2**, pp. 376-380 (2005). DOI: 10.1257/000282805774669989
- [19] STEPKOWSKI, S., FUMO, D. E., REESE, L. J., KOPKE, J. E., ROTH, A. E., LEICHTMAN, A. B., AND REES, M. A.: *Advantages Of Chains Vs. Cycles In A Kidney Paired Donation Program: A 7-year Analysis*, *Transplant International*, Vol. **28**, p. 18 (2015).

Biró Péter fényképe és rövid életrajza az előző cikk (melynek szintén szerzője) végén található.

BIRÓ PÉTER

Magyar Tudományos Akadémia
Közgazdaságtudományi Intézet
1112 Budapest, Budaörsi út 45.
Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 8.
peter.biro@krtk.mta.hu

MATHEMATICS OF KIDNEY EXCHANGE PROGRAMMES

PÉTER BIRÓ

When a patient with end stage renal disease has a willing, but immunologically incompatible donor, then she can try to exchange her donor with another patient of the same situation. Centrally coordinated kidney exchange programmes are operating in many countries across the world, designed and studied by economists, computer scientists, and mathematicians. In this writing we give a short summary on the graph theoretical model behind this application, its computational complexity, and solution by integer programming.

Keywords: matching, exchange problems, cycle packing, integer programming.

Mathematics Subject Classification (2000): 90C10, 91B68, 05C70.