*Alkalmazott Matematikai Lapok* **36** (2019), 51–64.

# KÉTKISZOLGÁLÓS, NEM NÖVEKVŐ, EGYSZERŰ, LINEÁRIS TORLÓDÁSI JÁTÉKOK PUHA KORRELÁLT EGYENSÚLYÁNAK KÉNYSZERÍTÉSI ÉRTÉKÉRŐL

FORGÓ FERENC

*Prékopa András emlékére*

Becslést adunk a puha korrelált egyensúly (Forgó F (2010) Mathematical Social Sciences 60:186-190) kényszerítési értékére (Ashlagi I, Monderer D and Tennenholz M (2008) Journal of Artificial Intelligence 33:575-613) a kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályán. Az alsó korlát 1,125, a felső korlát 1,265625. A felső korlát lényegesen jobb az eddig ismert 1,333-nál.

## 1. Bevezetés

A korrelált egyensúly (correlated equilibrium $CE$) fogalmát Aumann [3] vezette be mint a Nash-egyensúly (Nash equilibrium $NE$ [14], [15]) általánosítását. Véges játékok korrelált egyensúlyát többféleképpen is lehet definiálni, illetve interpretálni. Matematikai precizítással a korrelált egyensúlyt a stratégiaprofilokon adott olyan valószínűségeloszlásként definiáljuk, amely egy lineáris egyenlőtlenségrendszer lehetséges megoldása. Az egyenlőtlenségeket ösztönző feltételeknek nevezzük és a véges játék kifizető függvényéből konstruáljuk. Az ösztönző feltételek megértéséhez az Aumann által megadott interpretáció segít a legjobban, ami tulajdonképpen egy forgatókönyv, amelyet egy játékvezetőnek és a játékosoknak követniük kell, mielőtt a játékot magát lejátsszák. A forgatókönyv szerint a játékvezető egy adott és minden résztvevő által ismert valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy stratégiaprofilt. Utána minden játékosnak külön-külön javasolja, hogy játssza a kisorsolt stratégiaprofilból a saját részét. Minden játékosnak szabad választása van abban, hogy elfogadja-e a javaslatot, vagy pedig valami más stratégiát játszik. A valószínűségeloszlást korrelált egyensúlynak nevezzük, ha abban az esetben, ha mindenki elfogadja a játékvezető ajánlását, akkor senki sem tudja a várható kifizetését (hasznosságát) növelni azzal, hogy nem fogadja meg a játékvezető tanácsát. Ezáltal a társadalmi hasznosság (social welfare $SW$), amit általában a játékosok hasznosságának összegével (vagy ami ezzel ekvivalens, az átlagos hasznossággal) mérünk, nagyobb lehet, mint bármelyik Nash-egyensúlyban. Vannak azonban olyan játékok (pl. a fogoly dilemma), amikor a korrelált egyensúly nem tud nagyobb társadalmi hasznosságot produkálni, mint a legjobb Nash-egyensúly. Aumann adott egy másik interpretációt is [4], amelyben a korrelált egyensúlyt a bayesi racionalitás megtestesülésének tartja.

A korrelált egyensúly általánosításai általában azt a célt tűzik ki, hogy az egyensúly megtartása mellett nagyobb társadalmi hasznosságot lehessen elérni, mint a korrelált egyensúllyal. Ezt a célt a forgatókönyv megváltoztatásával érik el. Ennek azonban ára van. A játékosok részéről erősebb elkötelezettséget követelünk meg. Moulin és Vial [13] vezette be a gyenge korrelált egyensúly fogalmát (coarse correlated equilibrium $CCE$). A játékosoknak el lehet kötelezni magukat arra, hogy vakon követik a játékvezető javaslatát. Ha nem kötelezik el magukat, akkor szabadon választhatnak bármilyen stratégiát. A gyenge korrelált egyensúly egy olyan valószínűségeloszlás, amely mellett senki sem jut nagyobb kifizetéshez az elkötelezettség megtagadásával, feltéve, hogy mindenki más elkötelezte magát. Vannak példák, sőt egész játékosztályok [10],[11],[12],[13], ahol a gyenge korrelált egyensúly jobban „teljesít", mint a korrelált egyensúly. A puha korrelált egyensúly (soft correlated equilibrium $SCE$) [6] egy másik általánosítása a korrelált egyensúlynak. A puha korrelált egyensúly forgatókönyve „kicsit" különbözik a gyenge korrelált egyensúly forgatókönyvétől. Ha egy játékos nem akarja elkötelezni magát, akkor bármelyik stratégiát választhatja, kivéve azt, amelyet a játékvezető javasolt volna neki, ha elkötelezte volna magát. Mind a gyenge, mind a puha korrelált egyensúly a korrelált egyensúly általánosítása, de egyik sem általánosítása a másiknak. Vannak azonban olyan játékosztályok, ahol a puha korrelált egyensúly általánosítása a gyenge korrelált egyensúlynak. Egy fontos példa a bináris játékok osztálya, ahol mindegyik játékos stratégiahalmaza két elemű.

Ebben a dolgozatban a puha korrelált egyensúly „teljesítményét" szeretnénk mérni egy adott $C$ játékosztályban. Ehhez egy olyan mérőszámot használunk, amely azt hivatott megmutatni, hogy milyen mértékben tudja a „legjobb" puha korrelált egyensúly által biztosított társadalmi hasznosság megközelíteni a társadalmi hasznosság maximumát. Erre a célra a kényszerítési értéket (enforcement value $EV$) használjuk. A $G \in C$ játék $EV(G)$ kényszerítési értéke a társadalmi hasznosság maximumának és a puha korrelált egyensúly által biztosítható legnagyobb társadalmi hasznosság értékének a hányadosa. Az egész $C$ osztályon vett kényszerítési értéket pedig az $EV = \sup_{G \in C} EV(G)$ értékkel definiáljuk. A kényszerítési érték közeli rokonságban van a „stabilitás ára" (price of stability, [1],[5]) mutatószámmal. Itt egy költségalapú modell keretében állítják arányba a legjobb Nash-egyensúly (vagy korrelált egyensúly) társadalmi költségét a társadalmi költség minimumával. A költségmodellel nyert eredményeket nem lehet egyszerű eszközökkel átvinni hasznosságalapú modellekre, mint ahogy azt [2]-ben a szerzők megmutatják.

Ebben a dolgozatban a kétkiszolgálós, egyszerű, torlódási játékokkal foglalkozunk. Ezekben a játékokban minden játékos két adott kiszolgáló közül választhat és a kifizetés (hasznosság), amit az egyes játékosok kapnak, csak az adott kiszolgálót választó játékosok számától függ. A torlódási játékok speciális esetként tartalmazzák a legismertebb társadalmi csapdákat (fogoly dilemma, nemek harca, gyáva nyúl, galamb-héja) és azok bizonyos általánosításait több személy (játékos) esetére [8], [9]. Ebben a munkában még azt is feltesszük, hogy mindkét kiszolgáló esetében a kifizetés nem növekszik (általában csökken) a használók számának növekedésével, és a kifizetés változását egy lineáris függvény írja le. Ashlagi et al. [2] részletesen tanulmányozták ezeket a játékokat, és becsléseket adtak a korrelált egyensúly kényszerítési értékére. Mi a következőkben a puha korrelált egyensúly kényszerítési értékével foglalkozunk. Korábban Forgó [6] két, három és négy játékos esetére pontos értéket határozott meg, míg tetszőleges számú játékosra a $\frac{4}{3}$ felső becslést adta. Ebben a dolgozatban meghatározunk egy pontos alsó korlátot, ami $\frac{9}{8}$-dal egyenlő, és a $\frac{4}{3}$-nál lényegesen jobb felső korlátot. Ez a korlát aszimptotikusan (ha a játékosok száma tart a végtelenhez) szintén $\frac{9}{8}$-dal egyenlő. Gyáva nyúl típusú játékokra [9], amelyeknél az egyik kiszogálónál a kifizetés növekszik, a másiknál pedig csökken a használók számának növekedésével, sikerült bizonyítani, hogy a kényszerítési érték pontosan 2.

A cikk szerkezete a következő. A második fejezetben összefoglaljuk a szükséges előzményeket. A harmadik fejezetben meghatározzuk az $SCE$ kényszerítési értékének alsó és felső becsléseit. A negyedik fejezetben további kutatási irányokat vázolunk fel.

## 2. Előzmények

Az $SCE$ definíciójához szükség van néhány játékelméleti jelölésre és definícióra. Jelölje $G = \{S_1, ..., S_n; f_1, ..., f_n\}$ egy $n$-személyes, nem kooperatív játék normál formáját, ahol $S_1, ..., S_n$ a véges stratégiahalmazok, $f_1, ..., f_n$ pedig a kifizetőfüggvények. A korrelált egyensúlyok alapvető meghatározói a különféle ösztönző feltételek. Ezek egy játékosnak a játékvezető tanácsának megfogadásával elérhető várható hasznosságát hasonlítják össze azzal a várható hasznossággal, amit a tanács megfogadása nélkül lehet elérni. Az ösztönző feltételt az $i$ játékosra fogalmazzuk meg, de a könnyebb jelölés miatt az indexet elhagyjuk ott, ahol ez nem okoz félreértést.Vezessük be a következő jelöléseket:

$N = \{1, ..., n\}$: a játékosok halmaza.

$I = \{1, ..., m\}$: az $i$ játékos stratégiahalmaza, az egyes stratégiákat a megfelelő indexszel reprezentáljuk.

$s_-$ az $i$ játékos stratégiáját nem tartalmazó csonka stratégiaprofil.

$S_-$: a csonka stratégiaprofilok halmaza.

$(j, s_-)$, $j \in I, s_- \in S_-$: egy teljes stratégiaprofil.

$S = \{(j, s_-) : j \in I, s_- \in S_-\}$: a teljes stratégiaprofilok halmaza.

$f(j, s_-)$: az $i$ játékos kifizetése (hasznossága), ha ő a $j$ stratégiát játssza, a többiek pedig $s_-$-et.

$p$: egy valószínűségeloszlás $S$-en.

$p(j, s_-)$: az a valószínűség, amelyet $p$ a $(j, s_-)$ stratégiaprofilhoz rendel.

*2.1. Definíció.* A $CE$ egy olyan $p$ valószínűségeloszlás, amely minden $i$ $(i \in N)$ játékos esetében kielégíti az alábbi ösztönző feltételeket

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-) \qquad \text{minden } j, k \in I \text{ -re.}$$

*2.2. Definíció.* A $CCE$ egy olyan $p$ valószínűségeloszlás, amely minden $i$ $(i \in N)$ játékos esetében kielégíti az alábbi ösztönző feltételeket

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-) \qquad \text{minden } k \in I \text{ -re.}$$

A következőkben szükségünk lesz a következő jelölésre. Legyen

$$K = \prod_{j=1}^{m} (I \setminus \{j\}).$$

A $K$ elemeit „megengedett” (index)halmazoknak nevezzük.

*2.3. Definíció.* Az $SCE$ olyan $p$ valószínűségeloszlás, amely minden $i$ $(i \in N)$ játékos esetében kielégíti az alábbi ösztönző feltételeket

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k_j, s_-)p(j, s_-)$$

minden $(k_1, ..., k_m) \in K$ megengedett indexhalmazra.

Az $SCE$ részletes tárgyalása megtalálható [6]-ban.

Röviden foglaljunk össze néhány tudnivalót az $n$-személyes, kétkiszolgálós, egyszerű, torlódási játékokról. Részletesen [2]-ben és [7]-ben olvashatunk róla. Egy $n$-személyes, kétkiszolgálós, egyszerű, torlódási játékot a „torlódási formával” adhatunk meg legkönnyebben. A torlódási forma két $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ nem negatív vektor, amelynek jelentése a következő. Ha az $F1$ kiszolgálót választó játékosok száma $j$, akkor mindegyikük $a_j$ hasznossághoz, ha az $F2$ kiszolgálót választó játékosok száma $k$, akkor mindegyikük $b_k$ hasznossághoz jut. Látható, hogy a hasznosságok csak az adott kiszolgálót igénybe vevők számától függenek. A torlódási formához természetes módon rendelhető hozzá egy $n$-személyes játék (a torlódási játék). Jelöljük a játékosok halmazát $N$-el. Minden játékos stratégiahalmaza $\{F1, F2\}$, amelyet röviden $\{1, 2\}$-vel, a kiszolgálók indexeivel jelölünk, a kifizetéseket pedig az $a$ és $b$ vektorokból határozzuk meg. Egy stratégiaprofil tehát

$(i_1, ..., i_n)$, $i_j \in \{1, 2\}$, $j \in N$. Jelöljük $p_{i_1,...,i_n}$-vel annak a valószínűségét, hogy a játékvezető az $(i_1, ..., i_n)$ stratégiaprofilt választja. Legyen továbbá $t$ azoknak a játékosoknak a száma, akik az $F2$, $t = 0, 1, ..., n$ kiszolgálót választották, továbbá legyen $S_t$ azoknak a stratégiaprofiloknak a halmaza, amelyekben az $F2$-t választó játékosok száma $t$. Figyelembe véve a játék szimmetriáját, feltesszük, hogy minden $p_{i_1,...,i_n}$, $(i_1, ..., i_n) \in S_t$ valószínűség egyenlő. Jelöljük ezt $p_t$-vel.

Ezeknek a jelöléseknek a használatával minden játékos ösztönző feltétele a következő

$$(a_n - b_1)p_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left( \binom{n-1}{t-1}(b_t - a_{n-t+1}) + \binom{n-1}{t}(a_{n-t} - b_{t+1}) \right) p_t + (b_n - a_1)p_n \geq 0, \tag{1}$$

a normalizáló feltételek pedig

$$\sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} p_t = 1 \;, \;\; p_t \geq 0, \quad t = 0, 1, ..., n, \tag{2}$$

valamint az $SW$ (a játékosok hasznosságainak az összege):

$$SW = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} (b_t t + a_{n-t}(n-t))p_t \;. \tag{3}$$

A $q_t = \binom{n}{t} p_t, t = 0, 1, ..., n$ jelölés bevezetésével (1), (2) és (3) az alábbi egyszerűbb alakra hozható:

$$\begin{gathered} \sum_{t=0}^{n} \Big( t(b_t - a_{n-t+1}) + (n-t)(a_{n-t} - b_{t+1}) \Big) q_t \geq 0, \\ \sum_{t=0}^{n} q_t = 1, \qquad q_t \geq 0, \qquad t = 0, 1, ..., n, \end{gathered} \tag{4}$$

$$SW = \sum_{t=0}^{n} \Big( b_t t + a_{n-t}(n-t) \Big) q_t. \tag{5}$$

A maximális $SW$, amit az $SCE$ biztosítani tud, az alábbi $LP$ optimális célfüggvényértéke

$$\begin{gathered} P : \max \sum_{t=0}^{n} \Big( b_t t + a_{n-t}(n-t) \Big) q_t \\ \sum_{t=0}^{n} \Big( t(b_t - a_{n-t+1}) + (n-t)(a_{n-t} - b_{t+1}) \Big) q_t \geq 0 \;, \\ \sum_{t=0}^{n} q_t = 1, \quad q_t \geq 0, \quad t = 0, 1, ..., n \;. \end{gathered}$$

## 3. Kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok puha korrelált egyensúlyának kényszerítési értéke

Ezt a játékosztályt a $CE$ szempontjából Ashlagi et al. [2] vizsgálták, az $SCE$ szempontjából pedig Forgó [7]. Forgó [7] a kényszerítési értékre a $\frac{4}{3}$ felső korlátot adta meg, és azt a sejtést fogalmazta meg, hogy ez a korlát javítható. Mint látni fogjuk, ez tényleg így van. Az $EV$ pontos értékei ismertek egészen $n = 4$-ig. $EV = 1$ az $n = 2, 3$ esetben, és $EV = 1,007478$ az $n = 4$-re, lásd [7]. Így a következőkben feltehetjük, hogy $n \geq 5$. Egy kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játék torlódási formáját az alábbi táblázattal adhatjuk meg, ahol $x, y, z$ a hasznosság változását leíró lineáris függvények paraméterei.

$$
\begin{array}{lcclcc}
 & F1 & & & F2 & \\
a_1 & = & (n-1)x & b_1 & = & y+(n-1)z \\
a_2 & = & (n-2)x & b_2 & = & y+(n-2)z \\
 & & \ldots & & & \ldots \\
a_t & = & (n-t)x & b_t & = & y+(n-t)z \\
 & & \ldots & & & \ldots. \\
a_{n-1} & = & x & b_{n-1} & = & y+z \\
a_n & = & 0 & b_n & = & y
\end{array}
$$

Az általánosságot valamennyire sérti, hogy a legalacsonyabb hasznosságot 0-nak vettük, ugyanakkor az elemzés így lényegesen könnyebb, mert ezzel a paraméterek számát eggyel csökkentettük. A mikroökonómiában egyébként ez egy szokásos feltevés. Feltesszük továbbá, hogy $x > 0$, $y > 0, z \geq 0$. Ha behelyettesítjük a torlódási formát (4)-be és (5)-be, akkor a következőket kapjuk

$$\sum_{t=0}^{n}\Big(t(n+1-2t)x+(2t-n)y+(n-t)(2t-n+1)z\Big)q_t \geq 0,$$

$$SW=\sum_{t=0}^{n}\Big(t(n-t)(x+z)+ty\Big)q_t.$$

Abból a célból, hogy az $x, y, z$ paraméterektől való függést jól láthatóvá tegyük, vezessük be a következő jelöléseket

$$C(n,x,y,z,t)=-\Big[t(n+1-2t)x+(2t-n)y+(n-t)(2t-n+1)z\Big], \qquad (6)$$

$$W(n,x,y,z,t)=t(n-t)(x+z)+ty \qquad (7)$$

minden $t = 0, 1, ..., n, (n \geq 5)$-re. Mint azt a korábbiakban láttuk, a maximálisan elérhető $SW$, amit egy $SCE$ realizálni tud rögzített $n, x, y, z$ esetén, a következő $LP$ optimális célfüggvényértéke:

$$P: \ \max\sum_{t=0}^{n}W(n,x,y,z,t)q_t$$

$$\sum_{t=0}^{n} C(n,x,y,z,t)q_t \le 0,$$

$$\sum_{t=0}^{n} q_t = 1,\ q_t \ge 0, \quad t = 0,1,...,n.$$

Konkretizálva az $EV$ bevezetésben megadott általános definícióját a kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályára**,** az $EV$-t a következő képpen definiáljuk:

*3.1. Definíció.*

$$EV = \sup_{n,x,y,z} \frac{\max_{t=0,1,\dots,n} W(n,x,y,z,t)}{\max_{q\in L_P} \sum_{t=0}^{n} W(n,x,y,z,t)q_t},$$

ahol $L_P$ a $P$ feladat lehetséges tartományát jelöli.

Nyilván a $\max_{0\le t\le n} W(n,x,y,z,t)$ folytonos maximum a számláló felső korlátja, ugyanakkor bármely $q \in L_P$-re $\sum_{t=0}^{n} W(n,x,y,z,t)q_t$ a nevező alsó korlátja. Így a $P$ minden $q = (q_0, q_1, ..., q_n)$ lehetséges megoldására

$$EV \le \sup_{n,x,y,z} \frac{\max_{0\le t\le n} W(n,x,y,z,t)}{\sum_{t=0}^{n} W(n,x,y,z,t)q_t} \ . \tag{8}$$

Ugyanakkor bármely $n, x, y, z$ paraméterre

$$EV \ge \frac{\max_{t=0,1,\dots,n} W(n,x,y,z,t)}{\max_{q\in L_P} \sum_{t=0}^{n} W(n,x,y,z,t)q_t}. \tag{9}$$

Hasznos lesz a következő egyszerű lemma és annak két következménye.

3.1. Lemma. *Minden $n$, $x$, $y$, $z$, $t$-re és $\lambda > 0$-ra,*

$$W(n,\lambda x,\lambda y,\lambda z,t) = \lambda W(n,x,y,z,t)$$

*és*

$$C(n,\lambda x,\lambda y,\lambda z,t) = \lambda\ C(n,x,y,z,t).$$

*Bizonyítás.* A (6) és (7 formulákba való behelyettesítéssel azonnal látható.

□

3.1. Következmény. *$EV$ értékét nem befolyásolja a $\lambda > 0$ faktorral való átskálázás.*

3.2. Következmény. *Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $y = 1$.*

3.1. Tétel. *A kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályán az $SCE$ kényszerítési értéke $EV \leq \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 1,265625$.*

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy $W(n,x,y,z,t)$ a $t$ szerinti folytonos maximumát a

$$t^* = \frac{n}{2} + \frac{y}{2(x+z)} \tag{10}$$

pontban veszi fel. A 3.2. következmény szerint feltehetjük, hogy $y = 1$. Vezessük be az $r = \frac{1}{x+z}$ jelölést. Két esetet különböztetünk meg.

A) $r \leq \frac{n+3}{2}$. Ha $n$ páros, akkor $q_{\frac{n}{2}} = 1$, $q_t = 0, t \neq \frac{n}{2}$ a $P$ lehetséges megoldása. Így a (8) egyenlőtlenség miatt

$$EV \leq \frac{W(n,x,1,z,t^*)}{W(n,x,1,z,\frac{n}{2})}.$$

Belyettesítve (7)-be, és felhasználva az $r = \frac{1}{x+z}$ jelölést, azt kapjuk, hogy

$$EV \leq \frac{W(n,x,1,z,t^*)}{W(n,x,1,z,\frac{n}{2})} = \frac{\left((\frac{n}{2})^2 - (\frac{r}{2})^2\right)(x+z) + (\frac{n}{2} + \frac{r}{2})}{(\frac{n}{2})^2(x+z) + \frac{n}{2}} = \frac{(n+r)^2}{n(n+2r)}\ .$$

A jobboldal $r$ növekvő függvénye, ezért $r \leq \frac{n+3}{2}$ miatt

$$EV \leq \frac{(n+\frac{n+3}{2})^2}{n(n+2\frac{n+3}{2})} = \frac{\frac{1}{4}(3n+3)^2}{n(2n+3)}\ . \tag{11}$$

A jobboldal $n$ csökkenő függvénye, és így, minthogy $n = 6$ a legkisebb páros szám, amely kielégíti az $n \geq 5$ feltételt,

$$EV \leq \frac{\frac{1}{4}(3\cdot 6+3)^2}{6(2\cdot 6+3)} = 1,225.$$

Ha $n$ páratlan, akkor a $P$ feladat $q_{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2}$, $q_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2}, q_t = 0, t \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ lehetséges megoldásával dolgozunk. Behelyettesítésekkel azt kapjuk, hogy

$$EV \leq \frac{\frac{1}{4}(3n+3)^2}{n(2n+3)-1}.$$

A jobboldal most is $n$ csökkenő függvénye, amiből az $n = 5$ behelyettesítéssel az

$$EV \leq \frac{81}{64} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 1,265625$$

becslést kapjuk.

B) $r > \frac{n+3}{2}$. Vegyük a $C(n,x,1,z,t)$ $t$-szerinti minimumát. A minimumpont

$$t' = \frac{(n+1)x + 2 + (3n-1)z}{4(x+z)} = \frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{(n-1)zr}{2}\ . \tag{12}$$

Mivel $r > \frac{n+3}{2}$, és $zr > 0$, ezért

$$t' - \frac{n}{2} = \frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{(n-1)zr}{2} - \frac{n}{2} > 1\ . \tag{13}$$

Jelölje $[a]$ az $a$ valós szám egészrészét. A $C(n,x,1,z,t)$ a $t$-nek konvex kvadratikus függvénye. Tudjuk, hogy $C(n,x,1,z,\frac{n}{2}) < 0$, így $C(n,x,1,z,t') < 0$. Mivel a $t'$ a $C(n,x,1,z,t)$ konvex kvadratikus függvény minimumpontja, ezért (13) miatt $[t'] > \frac{n}{2}$, és így $C(n,x,1,z,[t']) < 0$. A kvadratikus függvény szimmetriája miatt $C(n,x,1,z,t' + (t' - \frac{n}{2}) < 0$. Ugyanakkor (13) miatt $[t'] + 1 < t' + (t' - \frac{n}{2})$, és így $C(n,x,1,z,[t'] + 1) < 0$.

Tekintsük először azt az egyszerű esetet, amikor $[t'] \le t^* < [t']+1$. Az egészrész definíciója miatt $[t'] = [t^*]$, és mivel

$$\max_{t=0,1,\dots,n} W(n,x,y,z,t) = \max\{W(n,x,1,z,[t^*]), W(n,x,1,z,[t^*]+1\},$$

és $q_{[t^*]} = 1$, $q_t = 0, t \ne [t^*]$, valamint $q_{[t^*]+1} = 1$, $q_t = 0, t \ne [t^*]+1$ is lehetséges megoldása $P$-nek, ezért $EV = 1$.

Nézzük most azt az esetet, amikor $t^* \notin [[t'],[t']+1)$. Belátjuk, hogy

$$EV \le \sup_{n,x,z} \frac{W(n,x,1,z,t^*)}{W(n,x,1,z,t')} \le \frac{9}{8}\ . \tag{14}$$

Azt bizonyítjuk, hogy a

$$8W(n,x,z,t^*) - 9W(n,x,z,t') < 0 \tag{15}$$

egyenlőtlenség fennáll a paraméterek minden megengedett értékére, amiből (14) következik. Felhasználva az $r = \frac{1}{x+z}$ jelölést, behelyettesítések után (15) az alábbi formát ölti

$$8\left(\left(\frac{n}{2} + \frac{r}{2}\right)\left(\frac{n}{2} - \frac{r}{2}\right)\frac{1}{r} + \frac{n}{2} + \frac{r}{2}\right) - 9\left(\left(\frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{n-1}{2}rz\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{3n-1}{4} - \frac{r}{2} - \frac{n-1}{2}rz\right)\frac{1}{r} + \frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{n-1}{2}rz\right) < 0.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $r$-el

$$8\left(\frac{n^2}{4} - \frac{r^2}{4} + \frac{n}{2}r + \frac{r^2}{2}\right) - 9\left[\left(\frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{n-1}{2}rz\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{3n-1}{4} - \frac{r}{2} - \frac{n-1}{2}rz\right) + \frac{n+1}{4}r + \frac{r^2}{2} + \frac{n-1}{2}r^2z\right] < 0.$$

A kijelölt szorzások elvégzése, némi átrendezés és egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}\frac{5}{16}n^2 - \frac{9}{8}n + \frac{9}{16} + r\left(-\frac{1}{2}n) + r^2(-\frac{1}{4}\right) + rz \\ \left(-\frac{9}{4}(n-1)^2\right) + (rz)^2\,\frac{9}{4}\,(n-1)^2 < 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Az utolsó két tag $rz$-nek konvex kvadratikus függvénye, $0 \leq rz < 1$, ezért az utolsó két tag összege nem lehet nagyobb 0-nál. Mivel $r$ és $r^2$ együtthatói negatívak, figyelembe véve az $r > \frac{n+3}{2}$ feltételt, ha a (16) fennáll az $r = \frac{n+3}{2}$ helyettesítéssel és az utolsó két tag elhagyásával, akkor a paraméterek minden megengedett értékére is fennáll. Ezek után a kijelölt műveletek elvégzése és egyszerűsítések után a $-\frac{9}{4}n < 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami nyilván fennáll minden $n \geq 1$-re.

Az A és B $r$ minden lehetséges értékét lefedi, és mivel $\frac{9}{8} < \left(\frac{9}{8}\right)^2$, a tétel állítását bebizonyítottuk. □

Megjegyezzük, hogy a (11) becslés $n$ növekedésével javul, és aszimptotikusan

$$EV \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}(3n+3)^2}{n(2n+3)} = \frac{9}{8} = 1,125.$$

3.2. Tétel. *A kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályán az SCE kényszerítési értéke* $EV \geq \frac{9}{8} = 1,125$.

*Bizonyítás.* Tekintsük minden $n \geq 5$-re az $x = \frac{2}{n-3}, y = 1, z = 0$ paraméterekkel megadott kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékokat (vagy ezzel ekvivalensen $r = \frac{n-3}{2}, y = 1, z = 0$). Tegyük fel, hogy $n$ páratlan és $\sqrt{n+1}$ egész. Nevezzük ezeket megengedhető $n$-eknek. A legkisebb megengedhető $n = 15$. A (9) egyenlőtlenségben szereplő tört számlálója meghatározásának érdekében a $W(n,x,y,z,t)$ függvény $t$-szerinti maximumát kell vennünk a $[0,n]$ intervallumban lévő egészekre. A folytonos maximumpont $t^* = \frac{n}{2} + \frac{r}{2} = \frac{3(n-1)}{4}$. Ez vagy egész, vagy két szomszédos egész számtani átlaga. Az első esetben a folytonos és egész értékű maximumpontok egybeesnek. A második esetben, mivel rögzített $n,x,y,z$-re a $W$ a $t$ változónak konkáv kvadratikus függvénye, a $W$ egészértékű maximumpontjai a $t^*$ egészértékű szomszédai. Az egyik $t^* - \frac{1}{2} = \frac{3n-5}{4}$. Így a $W$ egészértékű maximuma

$$\frac{9(n-1)^2}{8(n-3)}, \quad \text{ha } t^* \text{ egész,}$$

$$\frac{(3n-5)(3n-1)}{8(n-3)}, \quad \text{ha } t^* \text{ nem egész.}$$

A (9) egyenlőtlenségben szereplő tört nevezőjének meghatározása céljából emlékeztetünk arra, hogy $C(n,x,y,z,t)$ a $t$ változó konvex kvadratikus függvénye $n,x,y,z$ rögzített értékeire. Határozzuk meg a

$$C(n,x,y,z,t) = C(n, \frac{2}{n-3}, 1, 0, t) = 0$$

másodfokú egyenlet gyökeit. Ezek

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{n-1-\sqrt{n+1}}{2}, \\ t_2 &= \frac{n-1+\sqrt{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Megengedhető $n$-ekre mindkét gyök egész. Azt állítjuk, hogy $q' = (q'_0, q'_1, ..., q'_n)$, $q'_{t_2} = 1, q_t = 0, t \neq t_2$ a $P$ feladat optimális megoldása. A lehetségességről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk. A célfüggvény értéke ebben a lehetséges megoldásban

$$W(t_2) = \frac{1}{2(n-3)}(2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1)\ .$$

A $P$ egy lineáris programozási feladat, amelynek a duálja a következő $LP$

$$\begin{aligned} D \quad &: \quad \min v \\ v \quad &\geq \quad -C(n, \frac{2}{n-3}, 1, 0, t)u + W(n, \frac{2}{n-3}, 1, 0, t) \text{ minden } t = 0, 1, ..., n\text{-re}, \\ u \quad &\geq \quad 0. \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel és némi számolással belátható, hogy

$$u = \frac{1}{4n}\Big((n-1)\sqrt{n+1} - (n+1)\Big),$$

$$v = \frac{1}{2(n-3)}(2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1)$$

a $D$ lehetséges megoldása, a $v$ változó értéke egyúttal a célfüggvényérték is. Mivel $v = W(t_2)$, a lineáris programozás gyenge dualitási tétele értelmében

$$W(t_2) = \max_{q \in L_P} \sum_{t=0}^{t=n} W(n,x,y,z,t) q_t.$$

Így fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek

$$EV \geq \frac{\frac{9(n-1)^2}{8(n-3)}}{\frac{1}{2(n-3)}(2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1)} =$$

$$\frac{9}{4} \frac{(n-1)^2}{2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1}\ , \qquad \text{ha } t^* \text{ egész},$$

$$EV \geq \frac{\dfrac{(3n-5)(3n-1)}{8(n-3)}}{\dfrac{1}{2(n-3)}\left(2n^2-5n+(n-1)\sqrt{n+1}+1\right)} =$$

$$\frac{1}{4}\frac{(3n-5)(3n-1)}{2n^2-5n+(n-1)\sqrt{n+1}+1}\,, \qquad \text{ha } t^* \text{ nem egész.}$$

Mindkét esetben az egyenlőtlenség jobb oldala $n$-nek monoton növekvő függvénye, és $\frac{9}{8}$-hoz tart, ha $n \to \infty$, amiből a tétel állítása következik. □

A 3.1. és 3.2. tételekből következik a

3.3. Következmény. *A kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályán az SCE kényszerítési értékére* $\frac{9}{8} \leq EV \leq \left(\frac{9}{8}\right)^2$.

## 4. Kitekintés

A további kutatások sokféle irányban mehetnek. Néhány lehetőség:

- Meg kellene határozni $EV$ pontos értékét. Szimulációs vizsgálatok azt a sejtést támogatják, hogy $EV = \frac{9}{8}$.
- Másféle társadalmi hasznossággal is dolgozhatunk (mint például az egalitárius).
- Meg lehet vizsgálni, hogy milyen hatása van, ha hasznosságok helyett költségekkel számolunk.
- Mi a helyzet, ha több mint két kiszolgáló van?
- Hogyan lehet kiterjeszteni az elemzést nem egyszerű torlódási játékokra?
- Milyen a puha korrelált egyensúly teljesítménye, ha azt nem a legrosszabb esetre, hanem az átlagos esetre vizsgáljuk?

További konkrét alkalmazások kutatása, ahol a puha korrelált egyensúly növelni tudja a társadalmi hasznosságot, szintén szép feladat.

## Köszönetnyilvánítás

Az elméleti eredmények számítógépes tesztelésében nyújtott segítségéért köszönetet mondok Abaffy Józsefnek, a szerkesztésért pedig Ágoston Kolosnak. A kutatás az NKFI K-119930 projekt keretében folyt.

## Hivatkozások


[1] Anshelevich, E., Dasgupta, A., Jon Kleinberg, E. T., Wexler, T., and Roughgarden, T.: *The price of stability for network design with fair cost allocation*, in: *Proceedings of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pp. 295-304 (2004).

[2] Ashlagi, I., Monderer, D., and Tennenholtz, M.: *On the value of correlation*, Journal of Artificial Intelligence, Vol. **33**, pp. 516-522 (2008).

[3] Aumann, R. J.: *Subjectivity* and *correlation in randomized strategies*, Journal of Mathematical Economics, Vol. **1** No. **1**, pp. 67-96. (1974).

[4] Aumann, R. J.: *Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality*, Econometrica, Vol. **55**, pp. 1-18 (1987).

[5] Christodoulou, G. and Koutsoupias, E.: *On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games*, in: *Proceedings of the 13th Annual European Symposium, ESA*, Vol. **59-70** (2005).

[6] Forgó, F.: *A generalization of correlated equilibrium: A new protocol*, Mathematical Social Sciences, Vol. **60**, pp. 186-190 (2010).

[7] Forgó, F.: *Measuring the power of soft correlated equilibrium in 2-facility simple non-increasing linear congestion games*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **22**, pp. 139–165 (2014).

[8] Forgó, F.: *The prisoners dilemma, congestion games and correlation*, in: Tavadze, A. (Hg.), *Progress in Economics Research*, Vol. **34**, pp. 129-141 (2014).

[9] Forgó, F.: *Korreláció, torlódási játékok, a gyáva nyúl játék*, Szigma, Vol. **XLVIII** No. (**1-2**), pp. 47-68 (2017).

[10] Gerard-Varet, L.-A. and Moulin, H.: *Correlation and duopoly*, Journal of Economic Theory, Vol. **19**, pp. 123-149 (1978).

[11] Moulin, H., Ray, I., and Sen-Gupta, S.: *Coarse correlated equilibria in an abatement game*, Techn. Ber., Cardiff Economics Working Papers No. E2014/24 (2014).

[12] Moulin, H., Ray, I., and Sen-Gupta, S.: *Improving Nash by coarse correlation*, Journal of Economic Theory, Vol. **150**, pp. 852-865 (2014).

[13] Moulin, H. and Vial, J.-P.: *Strategically zero-sum games*: *the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon*, International Journal of Game Theory, Vol. **7**, pp. 201-221 (1978).

[14] Nash, J. F.: *Equilibrium points in n-person games*, in: *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. **36**, pp. 48-49 (1950).

[15] Nash, J. F.: *Non-Cooperative games*, The Annals of Mathematics, Vol. **54**, pp. 286-295 (1951).

Forgó Ferenc 1942-ben született Pécsett. 1965-ben közgazdász diplomát szerzett a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem tervmatematika szakán. Ugyanitt kezdett dolgozni a Matematika Tanszéken. 1991-től egyetemi tanár. 2012-től a Budapesti Corvinus Egyetem professor emeritusa. 1970 és 1994 között az USA-ban összesen négy évig dolgozott az USC és a Rutgers egyetemeken. 1987-1995 között a BCE jogelődjén a Matematikai és Számítástudományi Intézet igazgatója volt, majd 1995 és 2000 között az Operációkutatás Tanszék vezetője. 1998-ban Szent-Györgyi Albert-díjban részesült. 2001-ben Krekó Béla-díjat, 2014-ben Egerváry Jenő emlékplakettet, 2007-ben Magyar Köztársaság Arany Érdemkeresztje kitüntetést kapott. 1997 és 2000 között Széchenyi professzori ösztöndíjas volt, 2011-ben a Budapesti Corvinus Egyetemen Kutatási Kiválóság Ösztöndíjat nyert el. 1974-ben lett a Közgazdaságtudomány kandidátusa, 2015-ben az MTA doktora.

Tudományos tevékenységének fő területei: matematikai programozás, játékelmélet és döntéselmélet. 101 tudományos közleménye van (ezek közül 6 könyv), amelyekre a hivatkozások száma 468.

FORGÓ FERENC
Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
1098 Budapest, Fővám tér 8.
ferenc.forgo@uni-corvinus.hu

## ON THE ENFORCEMENT VALUE OF SOFT CORRELATED EQUILIBRIUM FOR TWO-FACILITY, NON-INCREASING, SIMPLE LINEAR CONGESTION GAMES

Ferenc Forgó

Lower and upper bounds for the enforcement value (Ashlagi I, Monderer D and Tennenholz M (2008) Journal of Artificial Intelligence 33:575-613) of soft correlated equilibrium (Forgó F (2010) Mathematical Social Sciences 60:186-190) are given for the class of two-facility, non-increasing, simple linear congestion games. The lower and upper bounds are 1.125 and 1.265625, respectively. The upper bound is significantly better than the previously known 1.333.

*Keywords*: correlated equilibrium, enforcement value, congestion game