Alkalmazott Matematikai Lapok **36** (2019), 25–31.

ERŐSEN NÉPSZERŰ PÁROSÍTÁS KERESÉSE BIZONYOS PÁROS PREFERENCIARENDSZEREKBEN

KIRÁLY TAMÁS, MÉSZÁROS-KARKUS ZSUZSA

A népszerű párosítás probléma bonyolultsága döntetlenes páros preferencia-rendszerekben nagyban függ a döntetlenek struktúrájától. Ha az egyik oldalon a csúcsok szigorú preferenciájúak, míg a másik oldalon indifferensek (de jobban szeretnek párosítva lenni, mint páratlanul maradni), akkor polinom időben tudunk népszerű párosítást keresni (Cseh, Huang és Kavitha [2]). Másrészt ugyanebben a cikkben azt is belátták, hogy a probléma NP-teljessé válik, ha szigorú preferenciájú csúcsok mindkét oldalon lehetnek, míg indifferens csúcsok csak az egyik oldalon. Megmutatjuk, hogy az *erősen* népszerű párosítás keresésének problémája megoldható polinom időben az utóbbi esetben is.

1. Bevezetés

Egy $(G = (V, E), \preceq)$ *preferenciarendszer* egy $G = (V, E)$ gráfból és minden $v \in V$-re a v-re illeszkedő élek egy $\preceq_v$ részbenrendezéséből áll. Egy $v \in V$ csúcs egy adott preferenciarendszerben *jobban szereti* az M_1 párosítást, mint az M_2-t, ha M_1-ben párosítva van, de M_2-ben nem, vagy ha M_1-ben jobb élen van párosítva, mint M_2-ben. Egy M_1 párosítás *népszerűbb*, mint egy M_2 párosítás, ha azon csúcsok száma, amelyek jobban szeretik M_1-et, mint M_2-t, szigorúan nagyobb, mint azon csúcsok száma, amelyek jobban szeretik M_2-t, mint M_1-et. Egy M párosítás *népszerű*, ha nincs olyan párosítás, ami népszerűbb nála, és *erősen népszerű*, ha M népszerűbb bármely másik párosításnál. Ezeket a fogalmakat Gärdenfors [6] vezette be, aki megmutatta, hogy szigorú preferenciák esetén minden stabil párosítás népszerű, és minden erősen népszerű párosítás stabil.

Egy preferenciarendszerben nyilván nem lehet két különböző erősen népszerű párosítás, mivel ekkor mindkettő népszerűbb lenne a másiknál, ami lehetetlen. Sőt, egy erősen népszerű párosítás szükségképp az egyetlen népszerű párosítás – viszont létezik olyan preferenciarendszer, ahol ugyan egyetlen népszerű párosítás van, de az nem erősen népszerű (erre [1] technical report változatában található példa).

Az utóbbi időben nagy érdeklődés övezi a népszerű párosításokkal kapcsolatos algoritmikus kérdéseket; a nemrégiben született eredmények egy rövid összefoglalóját lásd az 1.1. fejezetben. Itt csak megemlítjük, hogy bármely döntetlenes preferenciarendszer esetén polinom időben eldönthető, hogy egy adott párosítás népszerű vagy erősen népszerű-e (a probléma visszavezethető egy maximális súlyú teljes párosítás feladatra egy élsúlyozott segédgráfban [1]). Ez azt jelenti, hogy a népszerű párosítások döntési problémája az NP bonyolultsági osztályban van, míg az erősen népszerű párosítások döntési problémája a kevésbé ismert UP (Unambiguous Polynomial-time) bonyolultsági osztályba esik. Az utóbbi osztály, melyet Valiant [11] vezetett be, azokból a döntési problémákból áll, melyek megoldhatók egy NP-géppel úgy, hogy a feladat egy „nem" példányában egyik tanút sem fogadja el, míg a feladat egy „igen" példányában pontosan egy tanút fogad el. Az erősen népszerű párosítás probléma ebbe az osztályba tartozik, mivel a feladat egy „igen" példányában van egy egyértelmű erősen népszerű párosítás, és ez polinom időben ellenőrizhető.

Ebben a cikkben olyan páros preferenciarendszerekkel foglalkozunk, amelyekben a következő két típusú csúcs fordul elő: *szigorú preferenciájú* csúcsok, ahol a $\preceq_v$ preferencia-sorrend egy lineáris rendezés, és *indifferens* csúcsok, ahol a csúcs minden rá illeszkedő élt egyformán szeret (de jobban szeret párosítva lenni). Ha minden csúcs szigorú preferenciájú, akkor minden stabil párosítás népszerű. Ebből viszont következik, hogy mindig létezik népszerű párosítás, és találhatunk egyet a jól ismert Gale–Shapley-algoritmussal [5]. Másrészt el tudjuk dönteni, hogy létezik-e erősen népszerű párosítás, úgy, hogy találunk egy tetszőleges népszerű párosítást, és leellenőrizzük, hogy erősen népszerű-e (ez működik nem páros, szigorú preferenciarendszerek esetén is [1]).

A problémák nehezebbé válnak, ha az egyik oldalon megengedünk indifferens csúcsokat is. Abban az esetben, ha az egyik oldalon minden csúcs szigorú preferenciájú, míg a másik oldalon minden csúcs indifferens, Cseh, Huang és Kavitha [2] adott egy polinom idejű algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e népszerű párosítás. Azonban ha szigorú preferenciájú csúcsokat mindkét oldalon megengedünk, míg indifferens csúcsokat csak az egyiken, a probléma NP-teljessé válik [2, 3].

Ennek a cikknek a fő eredménye, hogy az *erősen* népszerű párosítás létezése polinom időben eldönthető az utóbbi esetben is.

1.1. Tétel. *Adott $(G = (S, T; E), \preceq)$ páros preferenciarendszer esetén, ahol az S-beli csúcsok szigorú preferenciájúak, míg minden T-beli csúcs vagy szigorú preferenciájú, vagy indifferens, polinom időben eldönthető, hogy van-e erősen népszerű párosítás.*

1.1. Kapcsolódó eredmények

Az utóbbi időben több eredmény is született a népszerű párosítás probléma bonyolultságáról. Szigorú páros preferenciarendszerek esetén Huang és Kavitha [7] megmutatta, hogy tudunk polinom időben maximális méretű népszerű párosítást keresni, míg Cseh és Kavitha [4] annak eldöntésére adott algoritmust, hogy egy adott él benne van-e népszerű párosításban. Nyitott kérdés viszont annak a döntési problémának a bonyolultsága, hogy egy adott szigorú, nem páros preferenciarendszerben van-e népszerű párosítás. Huang és Kavitha [8] bevezette a népszerűtlenségi faktor fogalmát, és megmutatta, hogy minden pozitív ε esetén NP-teljes megadni egy olyan párosítást, amelynek népszerűtlenségi faktora legfeljebb $\frac{4}{3} - \varepsilon$-szorosa az optimálisnak.

2. Az algoritmus

Ebben a fejezetben ismertetjük az 1.1. tételt bizonyító algoritmust. Adott egy $G = (S, T; E)$ páros multigráf, ahol a T csúcshalmaz két részre, T_P-re és T_I-re van osztva. Az $S \cup T_P$-beli csúcsok szigorú preferenciájúak, míg a T_I-beli csúcsok indifferensek (de jobban szeretnek párosítva lenni). Adunk egy polinom idejű algoritmust, ami eldönti, hogy a feladat egy adott példányában van-e erősen népszerű párosítás (röviden ENP).

Az algoritmus során módosításokat hajtunk végre az aktuális preferenciarendszeren a következő két *redukáló műveletet* használva:

1. Törlünk éleket, amelyek nem szerepelhetnek az aktuális preferenciarendszer ENP-jében, vagyis *törölhetők*, és törlünk minden keletkező izolált csúcsot.
2. Rögzítünk éleket, amelyeknek mindenképpen szerepelniük kell az aktuális preferenciarendszer ENP-jében (feltéve hogy az létezik), vagyis *rögzíthetők*. A rögzített élek halmazát F-fel jelöljük. A rögzített éleket töröljük a végpontjaikkal együtt, és töröljük a keletkező izolált csúcsokat.

Legyen $G^k = (S^k, T^k; E^k)$ az aktuális preferenciarendszer k fenti művelet elvégzése után, és legyen F az eddig rögzített élek halmaza. Az algoritmus helyességének kulcsa az alábbi lemma, amit itt bizonyítás nélkül közlünk.

2.1. Segédtétel. *Ha az eredeti preferenciarendszerben van egy M ENP, akkor $F \subseteq M$, és $M \setminus F$ is ENP-je G^k-nak.*

Lehetséges, hogy G^k-ban van ENP, holott G-ben nincs, de ez nem probléma, mivel ha redukáló műveletekkel eljutunk az üres gráfhoz, akkor a lemma szerint F az egyetlen lehetséges jelölt ENP-re, és polinom időben ellenőrizhetjük, hogy ez G-nek ENP-je, vagy sem. Ugyanakkor ha G^k-ban nincs ENP, akkor a lemma szerint G-ben sincs.

Összefoglalva, az a stratégiánk, hogy addig hajtunk végre redukáló műveleteket, amíg eljutunk az üres gráfhoz, vagy bizonyítékot találunk rá, hogy nincs ENP. A redukálási műveletek leírásához szükségünk van az aktuális gráf következő megirányítására.

Irányítás: Minden $v \in S \cup T_P$ csúcsnak megirányítjuk a kedvenc élét a másik végpontja felé. Az irányítást újra végrehajtjuk minden redukció után.

Az alábbi pontokban részletezzük, hogy mely élek törölhetők, illetve rögzíthetők. Ezek a műveletek konstruktívak olyan szempontból, hogy a nevezett éleket meg is tudjuk találni lineáris időben. Az algoritmus sorban törli, illetve rögzíti a pontok szerint törölhető, illetve rögzíthető éleket, úgy, hogy mindig feltesszük, hogy az aktuális preferenciarendszer nem redukálható tovább a korábbi pontok alapján.

Azon T_I-beli csúcsok halmazát, amelyekbe több mint egy irányított él lép, jelöljük T_1-gyel, és legyen $T_2 := T_I \setminus T_1$.

- Ha egy $v \in S \cup T_P$ csúcsba lép egy uv irányított él, akkor a v szerint uv-nél rosszabb élek nem szerepelhetnek ENP-ben, vagyis törölhetők.
- Ha valamikor egyetlen st irányított él lép egy T_I-beli csúcsba, akkor ha van ENP, akkor st benne van, vagyis st rögzíthető. Következésképp ez után a redukció után a T_2-beli csúcsokba nem lép irányított él.
- Tegyük fel, hogy az st él benne van az aktuális gráfban, ahol $s \in S$, $t \in T_2$. Ekkor st-nél s szerint rosszabb él nem lehet ENP-ben, vagyis ezek törölhetők.
- Ha egy $G[S \cup T_P \cup T_1]$-beli él nem irányított, akkor nem szerepelhet ENP-ben, vagyis törölhető.
- Ha egy S-beli s csúcsba nem lép irányított él, és s-ből nem megy (irányítatlan) él T_2-be, akkor az s-ből kilépő irányított él benne van az ENP-ben (ha létezik), vagyis rögzíthető.

2.2. Segédtétel. *Ha a fentiek alapján végrehajtott redukciókkal nem az üres gráfhoz jutunk, akkor G-ben nincs ENP.*

A lemma bizonyítása megtalálható a cikk technical report változatában [10]. A bizonyítás azon alapszik, hogy ha nem az üres gráfhoz jutunk, akkor a redukált gráf tartalmaz egy olyan kört, ami mentén cserélve ugyanolyan népszerű párosítást kapunk.

Mivel minden redukáló művelet csökkenti az élek számát, az algoritmus legfeljebb élszámnyi redukció után véget ér. Ha az üres gráfhoz jutunk, az egyetlen jelölt ENP-re F, és polinom időben ellenőrizhetjük, hogy ez ENP-je-e G-nek.

Megjegyzés. Az 1.1. tételre adott algoritmus kis módosításokkal működik arra az esetre is, amikor az egyik oldal szigorú preferenciájú, a másik oldalon pedig csak a preferencialisták végén lehet döntetlen. Ebben az esetben az algoritmus során azokat a csúcsokat, amelyek nem indifferensek, szigorú preferenciájúnak tekintjük mindaddig, míg nem töröltünk annyi élt a listájukról, hogy indifferensekké váltak.

3. Konklúzió

A cikkben leírt módszerrel olyan páros preferenciarendszerekben lehet eldönteni erősen népszerű párosítás létezését, ahol az egyik osztályban csak szigorú preferenciák vannak. Nyitott kérdés, hogy polinom időben megoldható-e a feladat, ha mindkét oldalon lehetnek indifferens csúcsok is. További kérdés, hogy az eredmény kiterjeszthető-e olyan preferenciákra, ahol nem csak a lista végén lehetnek döntetlenek.

Alkalmazások szempontjából érdekes lehet a feladatnak az az általánosítása, ahol az egyes csúcsok szavazatának különböző a súlya. Erről a változatról nagyon keveset tudni, mind a népszerű párosítások, mind az erősen népszerű párosítások vonatkozásában. Nyitott, hogy utóbbinak a bonyolultsága a legáltalánosabb változatban (nem páros gráf, tetszőleges preferenciák) hogy viszonyul egyes nehéznek gondolt UP-beli problémák bonyolultságához.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal - NKFIH 120254 számú pályázata és az MTA KEP-6/2017 projektje támogatta.

Hivatkozások

[1] P. Biró, R. W. Irving, and D. F. Manlove, *Popular matchings in the marriage and roommates problems*, In Proceedings of CIAC '10: the 7th International Conference on Algorithms and Complexity, volume 6078 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 97-108 (2010). Technical Report: http://eprints.gla.ac.uk/39469/

[2] Á. Cseh, C.-C. Huang, and T. Kavitha, *Popular matchings with two-sided preferences and one-sided ties*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. **31** No. **4**, pp. 2348-2377 (2017).

[3] Á. Cseh, *Complexity and algorithms in matching problems under preferences*, Ph.D. Thesis, TU Berlin (2016).

[4] Á. Cseh, T. Kavitha, *Popular Edges and Dominant Matchings*, Mathematical Programming (2017), `https://doi.org/10.1007/s10107-017-1183-y`

[5] D. Gale, L.S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, American Mathematical Monthly, Vol. **69**, pp. 9-15 (1962).

[6] P. Gärdenfors, *Match making: assignments based on bilateral preferences*, Behavioural Science, Vol. **20**, pp. 166-173 (1975).

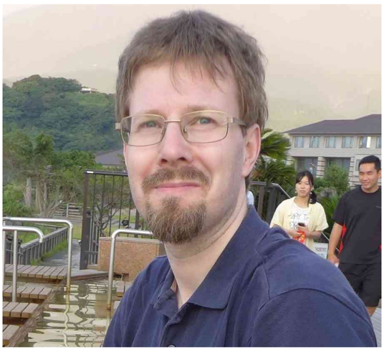
[7] C.-C. Huang, T. Kavitha, *Popular Matchings in the Stable Marriage Problem*, Automata, Languages and Programming, Volume 6755 of the series Lecture Notes in Computer Science, pp. 666-677 (2011).

[8] C.-C. Huang, T. Kavitha, *Near-Popular Matchings in the Roommates Problem*, SIAM J. Discrete Math., Vol. **27**, pp. 43-62 (2013).

[9] R.W. Irving, *An efficient algorithm for the "stable roommates" problem*, Journal of Algorithms, Vol. **6**, pp. 577-595 (1985).

[10] T. Király, Zs. Mészáros-Karkus, *Finding strongly popular matchings in certain bipartite preference systems*, EGRES Technical Report 2016-16. `http://bolyai.cs.elte.hu/egres/tr/egres-16-16.pdf`.

[11] L. G. Valiant, *Relative complexity of checking and evaluating*, Information Processing Letters, Vol. **5**, pp. 20-23 (1976).



Király Tamás 1975-ben született. 2004-ben szerzett matematikus PhD fokozatot, és 2013-ban habilitált az ELTE Matematikai Intézetében. Jelenleg az ELTE TTK Operációkutatási Tanszékén docens, valamint tagja az MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoportnak. 2004-ben Grünwald Géza Emlékérmet, 2009-ben Akadémiai Ifjúsági Díjat kapott. 27 folyóiratcikke és egy könyvfejezete jelent meg, független idézeteinek száma 240.

Mészáros-Karkus Zsuzsa 1990-ben született. Az ELTE matematikus mesterszakján végzett 2015-ben. Jelenleg az ELTE alkalmazott doktori programjának hallgatója, témája a stabil párosítások általánosításai. Két cikke jelent meg.

KIRÁLY TAMÁS
MÉSZÁROS-KARKUS ZSUZSA

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Operációkutatási Tanszék
MTA–ELTE Egerváry Kutatócsoport
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C
tkiraly@cs.elte.hu, karkuszsuzsi@gmail.com

FINDING STRONGLY POPULAR MATCHINGS IN CERTAIN BIPARTITE PREFERENCE SYSTEMS

Tamás Király, Zsuzsa Mészáros-Karkus

A *bipartite preference system with ties* consists of a bipartite multigraph $G = (S, T; E)$ and partial orders $\preceq_v$ on the edges incident to v, for every node $v \in S \cup T$. Given a bipartite preference system with ties, a node *prefers* a matching M_1 to a matching M_2 if either it is matched in M_1 but not in M_2, or it is matched by a better edge in M_1 than in M_2. A matching M_1 is *more popular* than matching M_2 if the number of nodes preferring M_1 to M_2 is strictly larger than the number of nodes preferring M_2 to M_1. A matching M is *popular* if no matching is more popular than M, and it is *strongly popular* if M is more popular than any other matching.

In this paper we consider bipartite preference systems with two types of nodes: *nodes with strict preferences*, where the preference order $\preceq_v$ is a linear order, and *indifferent nodes*, where every incident edge is equally good (but who still prefer to be matched). If all nodes have strict preferences, then every stable matching is popular. On one hand, this implies that there always exists a popular matching and one can be found using the well-known Gale–Shapley-algorithm. On the other hand, we can decide if a strongly popular matching exists by finding an arbitrary stable matching and checking whether it is strongly popular.

The problems become more difficult if indifferent nodes are allowed on one side. For the case when nodes on one side have strict preferences while those on the other side are all indifferent, Cseh, Huang, and Kavitha [2] gave a polynomial-time algorithm for deciding if a popular matching exists. However, if one side has strict preferences while the other side may feature both indifferent nodes and nodes with strict preferences, then the problem becomes NP-complete[2, 3].

The main result of the present paper is that the existence of a *strongly* popular matching can be decided in polynomial time even in the latter case.

Theorem. Given a bipartite preference system $(G = (S, T; E), \preceq)$ where nodes in S have strict preferences and each node in T is either indifferent or has strict preferences, it can be decided in polynomial time if there is a strongly popular matching.

Keywords: bipartite matching, social choice, efficient algorithms, popular matching.

Mathematics Subject Classification (2000): 05C70, 91B14, 91B68.