Alkalmazott Matematikai Lapok **36** (2019), 107–130.

ALKUHALMAZOK ÉS A MAG EGYBEESÉSE

SOLYMOSI TAMÁS

A kooperatív játékok legtöbbet vizsgált halmazértékű megoldása a mag, ami azt az alapvető stabilitási követelményt fogalmazza meg, hogy a nagykoalíció értékét mindegyik koalíció számára elfogadható módon kell szétosztani. Mivel sok játékban nem létezik ennyire stabil elosztás, olyan megoldási koncepciókra is szükség van, amelyek akkor sem üresek, amikor a mag üres. A szakirodalomban található számos magkiterjesztés közül itt csak az alkuhalmazok kerülnek terítékre, azok közül is csak a legismertebbek. A különféle alkuhalmazok közös jellemzője, hogy a magbelieken kívül olyan, a magon kívüli elosztásokat is megengednek, amelyeknél egy koalíció kiválását az ellenérdekelt játékosok meg tudják hiúsítani néhány kiválni szándékozó játékos kifizetésének megemelésével. A dolgozat bevezető jellegű áttekintést kíván nyújtani a klasszikus, a reaktív, a szemireaktív és a Mas-Colell-féle alkuhalmaz és a mag egybeesésére vonatkozó ismert eredményekről, kiegészítve néhány új észrevétellel.

1. Bevezetés

A *játékelmélet* tárgya a többszereplős interaktív döntési helyzetek matematikai modellezése és vizsgálata. A szereplők (játékosok) szuverén döntéshozók, akik a számukra adott cselekvési lehetőségek közüli választással valamilyen mértékben befolyásolni tudják a döntési helyzet (játék) kimenetelét, s ezáltal nemcsak a saját magukra, hanem a többi résztvevőre vonatkozó következményeket is. Ez a szereplők között fennálló kölcsönös függőség szinte valamennyi gazdasági, társadalmi döntési helyzet alapvető jellemzője, ezért érthető, hogy az ilyen szituációk absztrakt vizsgálatának fő motiváló forrása, illetve alkalmazási területe a közgazdaság-tudomány, illetve tágabban a társadalomtudományok. A formalizált modellek elemzése ugyanakkor matematikai eszközökkel történik.

A játékelméletet szokás két fő, egymástól szigorúan el nem választható területre osztani. A legegyszerűbb, a két racionális döntéshozó közötti antagonisztikus konfliktust leíró nemkooperatív modell elemzése mellett a terület alapvetésének és névadójának számító könyvükben Neumann és Morgenstern [26] elsősorban a hatékonyságnövelés által motivált döntéshozók közötti együttműködés kérdéseit vizsgálták. Egy játékot kooperatívnak tekintünk, követve a Nobel-díjas Harsányi János meghatározását [14], ha a játékosok közötti egyeztetések után a felek számára kötelező érvényű megállapodások (binding agreement) szület(het)nek. Ilyenkor a játék lefolyásának részleteit és az egyes játékosok stratégiai megfontolásait háttérbe szorítják az egyes koalíciók által elérhető kimenetelek meghatározására, illetve az együttműködés hozadékának szétosztására vonatkozó kérdések.

A *kooperatív modellek* több alapkategóriába sorolhatók. Az első választóvonal az, hogy az adott szituációban létezik-e, vagy sem, egy olyan „pénzszerű termék” (side-payment) aminek átadásával az egyéni hasznosságok egymás között átruházhatók. Például a klasszikus párosítási modellekben a szereplőknek csak sorrendi preferenciáik vannak, mert a vizsgált helyzetek (felvételi, vesecsere) esetleg kimondottan tiltják a játékosok közötti bármiféle pénzbeli kompenzációt. Az átruházható hasznosságokat feltételező modellek tovább bonthatók aszerint, hogy az átadott „pénzszerű termék” minden résztvevő számára minden esetben azonos értéket jelent-e. Amennyiben az egyéni hasznosságskála-egységek azonosak, *átváltható hasznosságú* (transferable utility) kooperatív játékról beszélünk. Ilyenkor az egyéni hasznosságok összehasonlíthatók, sőt összeadhatók, így értelmezhető az egyes koalíciók „értéke” is. Neumann és Morgenstern [26] óta az átváltható hasznosságú kooperatív alapmodellben egy koalíció értékének a tagjai által (a koalícióban részt nem vevő játékosok döntéseitől függetlenül) elérhető legnagyobb összhasznosságot szokás tekinteni. A központi kérdés pedig a koalíció által elért összhaszonnak a tagok közötti újraelosztása.

Itt csak átváltható hasznosságú kooperatív játékok megoldásaival foglalkozunk, ezért a továbbiakban (kooperatív) játék alatt mindig ilyen játékot értünk. A címben jelzett halmazértékű megoldások egybeesésének körülményeit vizsgáljuk. A mag (core), illetve a különféle alkuhalmazok (bargaining sets) mindegyike valamilyen stabilitási követelményt testesít meg. Amikor tehát ezen megoldások kapcsolatát vizsgáljuk, tulajdonképpen a mögöttes stabilitási tulajdonságok viszonyát elemezzük.

2. Alapok

Egy *kooperatív játék* alatt az (N, v) párt értjük, ahol N a játékosok véges, nemüres halmaza, és $v : 2^N \to \mathbb{R}$ a koalíciós függvény, ami mindegyik $S \subseteq N$ koalícióra megadja annak $v(S)$ értékét (a tagjai együttműködése által elérhető maximális összhasznosságot). Definíció szerint $v(\varnothing) = 0$. Az (N, v) játék *szuperadditív*, ha tetszőleges $S \cap T = \varnothing$ koalíciókra $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ teljesül, és *gyengén szuperadditív*, ha az egyenlőtlenséget csak egyelemű T-vel követeljük meg. A szuperadditív játékok az olyan kooperatív helyzetek modelljei, ahol a közös tagot nem tartalmazó koalíciók együttműködése csak előnnyel járhat. Amennyiben ez a „pozitív szinergia” csak a nagykoalíciót eredményező együttműködéseknél jön biztosan létre, azaz ha tetszőleges $N = N_1 \cup \ldots \cup N_k$ partícióra

$$v(N_1) + \ldots + v(N_k) \leq v(N)$$

teljesül, a játékot *kohézív*nek hívjuk. Amikor ezt a kohéziós egyenlőtlenséget a nagykoalíciónak csak az olyan partícióitól várjuk el, amelyekben legfeljebb egy koalíció nem egyelemű, azaz ha tetszőleges $S \subseteq N$-re $v(S) + \sum_{j \in N \setminus S} v(j) \leq v(N)$ teljesül, a játékot *gyengén kohézív*nek mondjuk. Egy szuperadditív játék nyilván kohézív is, egy gyengén szuperadditív játék pedig gyengén kohézív is.

Az (N, v) játék egy *megoldás*án a játékosok egyéni részesedését tartalmazó $\boldsymbol{x} = (x_i : i \in N) \in \mathbb{R}^N$ kifizetés-vektort értjük, amire azt mondjuk, hogy

– *szétosztás*, ha $x(N) = v(N)$;

– *elosztás*, ha szétosztás, és $x_i \geq v(i)$ minden $i \in N$-re;

– *mag-elosztás*, ha szétosztás, és $x(S) \geq v(S)$ minden $S \subset N$-re,

ahol $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$ jelöli az $S \subseteq N$ koalíció összkifizetését. Azt mondjuk, hogy az y kifizetésvektor az S koalíció által *dominálja* az x kifizetés-vektort, ha $y(S) \leq v(S)$, és $y_i > x_i$ minden $i \in S$-re. Nyilvánvaló, hogy az x csak akkor dominálható az S-en keresztül, ha az $e_x(S) = v(S) - x(S)$ *többlet* pozitív, és minél nagyobb ez a többlet, az S annál „elégedetlenebb" az x megoldással.

Vizsgálatainkban szinte kizárólag elosztásokra szorítkozunk, halmazukat Im jelöli (imputations). Könnyen adódik, hogy tetszőleges (N, v) játékra,

$$\mathrm{Im}(v) \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad v(N) \geq \sum_{i \in N} v(i). \tag{1}$$

Szuperadditív (gyengén szuperadditív / kohézív / gyengén kohézív) játékokban ez az egyenlőtlenség nyilván teljesül, az elosztások halmaza ilyenkor tehát nem üres.

2.1. A mag

A mag elosztások halmaza a *mag*, jelölése Co (core). Belátható, hogy szuperadditív (gyengén szuperadditív / kohézív / gyengén kohézív) játékokban a mag azonos a semmilyen elosztás által sem dominált elosztások halmazával. Nyilván minden játékban Co $\subseteq$ Im. A mag nemürессége is eldönthető az (1)-ben szereplőhöz hasonló lineáris egyenlőtlenségek ellenőrzésével, de ehhez sokkal több és jóval összetettebb egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. A részletek tárgyalása nélkül azt mondjuk, hogy egy játék *kiegyensúlyozott*, ha a magja nem üres, és *teljesen kiegyensúlyozott*, ha bármelyik koalícióhoz tartozó részjátéka is kiegyensúlyozott. Rögtön adódik, hogy minden teljesen kiegyensúlyozott játék szuperadditív, és minden kiegyensúlyozott játék kohézív.

Kétszemélyes játékokban Co = Im, hiszen a nagykoalíción kívül csak egyszemélyes koalíciók vannak, az elosztások és a mag elosztások tehát ugyanazok.

Az (1) alatti jellemzés tükrében kapjuk, hogy a (gyengén) kohézív / szuperadditív esetben $\mathrm{Co} = \mathrm{Im} \neq \varnothing$, egyébként viszont $\mathrm{Co} = \mathrm{Im} = \varnothing$.

A legalább háromszemélyes játékok halmazán a szuperadditivitás se nem szükséges, se nem elégséges feltétele a kiegyensúlyozottságnak. Ismeretes például, hogy egy *háromszemélyes szuperadditív játékban* (sőt gyengén szuperadditív / kohézív / gyengén kohézív játékban is)

$$\mathrm{Co}(v) \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v(ij) + v(ik) + v(jk)}{2} \leq v(ijk). \tag{2}$$

Másrészt nyilván kiegyensúlyozott (tehát (gyengén) kohézív), de nem (gyengén) szuperadditív az a háromszereplős játék, amelyben minden koalíció értéke 0, kivéve egy kétszemélyes koalíciót, aminek viszont negatív az értéke.

A mag a kooperatív játékok legtöbbet vizsgált halmazértékű megoldása. Azt a nagyon intuitív stabilitási követelményt fogalmazza meg, hogy a játék megoldásának olyan módon kell a nagykoalíció értékét szétosztania, ami mindegyik koalíció számára elfogadható, másképpen, ami egyetlen koalíción keresztül sem dominálható. Mivel sok játékban nem létezik ennyire stabil elosztás, szükség van olyan megoldási koncepciókra is, amelyek akkor sem üresek, amikor a mag üres. A Neumann és Morgenstern [26] által leginkább vizsgált ún. konstans összegű játékokban például a mag csak a kooperáció szempontjából érdektelen (additív) esetben nem üres, ezért ők a stabil halmazokat tekintették a modell megoldásának. Az irodalomban fellelhető számtalan egyéb magkiterjesztés közül mi itt csak az egyik legelsőt, az Aumann és Maschler [2] által javasolt alkuhalmazokat tárgyaljuk.

2.2. A klasszikus alkuhalmaz

Az alkuhalmazok közös jellemzője, hogy olyan dominált (magon kívüli) elosztásokat is megengednek, amelyeknél egy koalíció kiválási szándékát az ellenérdekelt játékosok meg tudják hiúsítani néhány kiválni szándékozó játékos kifizetésének megemelésével. A mögöttes alkufolyamat részletei, s így az azt túlélő elosztáshalmazok is nagyon sokfélék lehetnek. Az Aumann és Maschler [2] által felvetett számos változat közül az a típus került a vizsgálatok fókuszába, amelyről Davis és Maschler [5], [6] bebizonyították, hogy amennyiben a játékban vannak elosztások, ez az alkuhalmaz nem üres. Írásunkban, az utolsó fejezetig, alkuhalmaz alatt mi is ezt a „klasszikus" alkuhalmazt értjük.

Legyen (N, v) egy nemüres elosztáshalmazzal rendelkező játék (lásd (1)). Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathrm{Im}$ elosztásnál az (S, y) pár az i játékosnak a j $(\neq i)$ játékossal szembeni *kontrája* (objection), ha

$$S \subset N, \quad i \in S \not\ni j, \quad y \in \mathbb{R}^S, \quad y(S) = v(S), \quad y_k > x_k \quad \forall k \in S\text{-re.}$$

Az i játékos j-vel szembeni (S, y) kontrájára a j játékos *rekontrája* (counter-objection) a (T, z) pár, ha

$$T \subset N, \quad j \in T \not\ni i, \qquad z \in \mathbb{R}^T, \quad z(T) = v(T),$$
$$z_k \geq y_k \quad \forall k \in T \cap S\text{-re}, \quad z_k \geq x_k \quad \forall k \in T \setminus S\text{-re} .$$

Az *alkuhalmaz*, jelölje M, a játék azon elosztásainak halmaza, amelyeknél minden kontrára van rekontra. Másképpen, azok az elosztások nem tartoznak az alkuhalmazba, amelyeknél van *megalapozott kontra* (justified objection), azaz egy „támadó” játékosnak egy olyan kontrája, amire a „védekező” játékosnak nincsen rekontrája.

A továbbiakban szükségünk lesz a következő, könnyen belátható észrevételekre.

2.1. Állítás. *Tetszőleges gyengén kohézív játékban egy elosztásnál:*

1. *Egy koalíció csak akkor szerepelhet egy kontrában, ha a többlete pozitív. Következésképpen, a nagykoalíción és az egyszemélyes koalíciókon keresztül nem lehet kontrázni.*

2. *Egy koalíció csak akkor szerepelhet egy rekontrában, ha a többlete nemnegatív, és amennyiben van közös tagja a kontrában szereplő koalícióval, akkor a többlete pozitív. Következésképpen, egy játékos a saját egyszemélyes koalícióján keresztül csak akkor tud rekontrázni, ha a többlete nulla.*

3. *Az $i \in N$ játékosnak a $j \in N$ játékossal szemben csak egy olyan koalíción keresztül lehet megalapozott kontrája, amelynek a (pozitív) többlete szigorúan több, mint bármelyik az i-t nem, de a j-t tartalmazó koalíció többlete.*

Davis és Maschler [6] bizonyították, hogy az M alkuhalmaz nem üres, ha a játékban az elosztások Im halmaza nem üres. Mivel pontosan azok az elosztások a magbeliek, amelyeknél egyetlen játékosnak sincs kontrája, tehát megalapozott kontrája sem lehet, adódik, hogy

– bármilyen játékban $\mathrm{Co} \subseteq M \subseteq \mathrm{Im}$.

Kétszemélyes játékokban, mint láttuk, $\mathrm{Co} = \mathrm{Im}$, következésképpen,

$$\mathrm{Co} = M = \mathrm{Im},$$

mégpedig a szuperadditív (vagy ami ilyenkor ugyanaz, gyengén szuperadditív / kohézív / gyengén kohézív) esetben $\mathrm{Co} = M = \mathrm{Im} \neq \varnothing$, egyébként viszont $\mathrm{Co} = M = \mathrm{Im} = \varnothing$.

Az alkuhalmaz még a *háromszemélyes játékokban* is könnyen meghatározható, legalábbis a nagyon enyhe feltételt jelentő gyengén kohézív esetben.

2.2. Állítás. *Legyen $(N = \{i, j, k\}, v)$ egy háromszereplős játék.*

1. *Ha v kiegyensúlyozott (tehát gyengén kohézív is), akkor $\mathrm{Co}(v) = M(v)$.*
2. *Ha v nem kiegyensúlyozott, de gyengén kohézív, akkor $M(v)$ azt az egyetlen x elosztást tartalmazza, amelyre $e_x(ij) = e_x(ik) = e_x(jk)$.*
3. *Ha v egy nemüres elosztáshalmazzal rendelkező, de nem gyengén kohézív játék, akkor $M(v)$ egy (esetleg egyetlen pontból álló) egyenes szakasz.*

Bizonyítás. Terjedelmi okokból csak az első két állítást bizonyítjuk. A nem gyengén kohézív esettel kapcsolatban Tchantcho, Moyouwou és Andjiga [41] cikkére utalunk, akik megadták tetszőleges háromszereplős játékra az alkuhalmaz (ami a kiegyensúlyozott esetben a mag) pontos szerkezetét. Az alkalmazásokban csak kivételesen előforduló nem gyengén kohézív esetet a 2.2. példával szemléltetjük.

Legyen v egy tetszőleges gyengén kohézív játék (tehát nemüres elosztáshalmazzal rendelkező) háromszereplős játék, és legyen $x \in \mathrm{Im} \setminus \mathrm{Co}$ egy tetszőleges, magon kívüli elosztás (ha a mag üres, akkor persze ez a kitétel semmis). Címkézzük úgy a három játékost, hogy $e_x(ij) \geq e_x(ik) \geq e_x(jk)$ legyen. Mivel $e_x(ij) > 0$, ezen a maximális (pozitív) többletű koalíción keresztül az i és a j is kontrázhatja a komplementerbeli k játékost. Mivel v gyengén kohézív, $v(ijk) \geq v(ij) + v(k)$, amiből $0 = e_x(ijk) \geq e_x(ij) + e_x(k)$, innen pedig $e_x(k) < 0$ következik. Tehát a k játékos a saját egyszemélyes koalícióján keresztül nem tud rekontrázni, csak a kontrázó ij koalícióval átfedő ik, illetve jk koalíciókon keresztül, de ezekkel is csak akkor, ha pozitív a többletük (2.1. állítás 2. pont).

Amennyiben $e_x(ij) > e_x(jk) > 0$, az i játékos megalapozottan tudja kontrázni k-t az $S = ij$ koalíción keresztül az $y_i = x_i + \dfrac{e_x(ij) - e_x(jk)}{2}$ és $y_j = x_j + \dfrac{e_x(ij) + e_x(jk)}{2}$ kifizetésekkel. A k játékos ezzel szemben ugyanis csak a $T = jk$ koalíción keresztül tudna védekezni, de egy rekontrához kettőjüknek összesen legalább $y_j + x_k = x_j + \dfrac{e_x(ij) + e_x(jk)}{2} + x_k > x(jk) + e_x(jk) = v(jk)$ kifizetés kellene, ami viszont elérhetetlen a jk koalíció számára. Magon kívüli elosztás (akár üres a mag, akár nem) tehát csak akkor lehet az alkuhalmaz eleme, ha $e_x(ij) = e_x(ik) = e_x(jk) > 0$.

Ha a v kiegyensúlyozott, akkor $v(ijk) \geq \dfrac{v(ij) + v(ik) + v(jk)}{2}$, amiből $0 = e_x(ijk) \geq \dfrac{e_x(ij) + e_x(ik) + e_x(jk)}{2}$ következik tetszőleges x elosztásra. Az előbbi megállapítás tükrében ez azt jelenti, hogy magon kívüli elosztás nem tartozhat az alkuhalmazba, hiszen $x \in M \setminus \mathrm{Co}$ esetén a számlálóban szereplő mindhárom többlet pozitív lenne. Következésképpen, ha a mag nemüres, akkor $\mathrm{Co}(v) = M(v)$. Ezzel az állítás 1. pontját beláttuk.

Ha a v nem kiegyensúlyozott, akkor minden elosztás magon kívüli, tehát mindegyik kétszemélyes koalíció többlete pozitív. Ezek közül, mint megállapítottuk, csak azok az elosztások tartozhatnak az alkuhalmazba, amelyeknél a kétszemélyes koalíciók többlete azonos. A $v(ij) - x_i - x_j = v(ik) - x_i - x_k = v(jk) - x_j - x_k$ lineáris egyenletrendszernek viszont egyetlen megoldása van, mégpedig

$$x_i = \frac{v(ijk) + v(ij) + v(ik) - 2v(jk)}{3},$$

és a megfelelő módon permutált változatok a másik két játékosra. Az alkuhalmaz tehát ebből az egyetlen elosztásból áll. Ezzel az állítás 2. pontját is beláttuk. □

A fenti második állítás szemléltetésére nézzük a következő példát.

2.1. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, a koalíciós függvény pedig

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	30	30	30

A játék szuperadditív, de nem kiegyensúlyozott, mag elosztás csak $v(123) \geq 45$ esetén létezne (lásd (2)). Az alkuhalmaz viszont $M = \{(10; 10; 10)\}$, ugyanis csak ennél az elosztásnál nincsen megalapozott kontra. Egyrészt a $(10; 10; 10)$ elosztásnál egy i-nek egy k-val szembeni kontrája csak

$$(S = ij; y_i = 10 + \alpha, y_j = 20 - \alpha)$$

alakú lehet, ahol $0 < \alpha < 10$, erre viszont tud válaszolni k, például a

$$(T = jk; z_j = 20, z_k = 10)$$

rekontrával. Másrészt, ha az x elosztásban van két különböző kifizetés, mondjuk $x_i \leq x_j \leq x_k$, de $x_i < x_k$, akkor nyilván $x_i < 10 < x_k$, és $x_j \leq 15$, vagyis az $(S = ij; y_i = 10, y_j = 20)$ az i-nek egy olyan kontrája a k-val szemben, amire k-nak nincsen rekontrája, sem egyéni (az x elosztás), sem a $T = jk$-n keresztül, ahhoz ugyanis legalább $z_j + z_k \geq 20 + x_k > 30 = v(jk)$ kifizetés kellene, ami kettőjük számára elérhetetlen.

A 2.1. állítás 3. pontja szerint egy nem gyengén kohézív, háromszereplős játékban az alkuhalmaz lehet egy szakasz is. Ennek az esetnek a szemléltetésére nézzük a következő példát.

2.2. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, a koalíciós függvény pedig

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	4	1	1	3

A játék nem gyengén kohézív, hiszen $v(12) + v(3) > v(123)$, a mag tehát üres. Az alkuhalmaz mégis több pontból áll, $M = \{x^\alpha = (x_1 = 2 - \alpha;\ x_2 = 1 + \alpha;\ x_3 = 0) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

Egyrészt, az x^α elosztásoknál a koalíciónkénti összkifizetések, illetve többletek az alábbiak:

S	1	2	3	12	13	23	123
$x^\alpha(S)$	$2-\alpha$	$1+\alpha$	0	3	$2-\alpha$	$1+\alpha$	3
$e_{x^\alpha}(S)$	$-2+\alpha$	$-1-\alpha$	0	1	$-1+\alpha$	$-\alpha$	0

Mivel akármelyik x^α $(0 \le \alpha \le 1)$ elosztásnál csak az $S = 12$ koalíció többlete pozitív, csak $1 \to 3$ és $2 \to 3$ kontrák keletkezhetnek, de ezeket a 3-as játékos egyedül is képes rekontrázni a $(T = 3; z_3 = 0)$ párral.

Másrészt, bármelyik x^α $(-1 \le \alpha < 0)$ elosztásnál a 2-es játékos kontrázhatja az 1-est az $(S = 23; y_2 = 1 + \frac{\alpha}{2}; y_3 = 0 - \frac{\alpha}{2})$ párral, amire viszont nincs az 1-esnek rekontrája, sem önállóan, sem a $T = 13$ koalíción keresztül, ahhoz ugyanis legalább $z_1 + z_3 \ge 2 - \frac{3\alpha}{2} > 1 = v(13)$ kifizetés kellene, ami kettőjük számára elérhetetlen. Hasonlóképpen, bármelyik x^α $(0 < \alpha \le 1)$ elosztásnál az 1-es játékosnak van megalapozott kontrája a 2-sel szemben. Végül, minden olyan x elosztásnál, amiben $x_3 > 0$, a 3-as játékos önállóan nem képes rekontrára, tehát az

$$(S = 12; y_1 = x_1 + \frac{x_3}{2}; y_2 = x_2 + \frac{x_3}{2})$$

egy megalapozott kontra a 3-assal szemben (például az 1-esé).

3. Az alkuhalmaz és a mag egybeesése

Mivel bármilyen játékban a mag (akár üres, akár nem) részhalmaza az alkuhalmaznak, az elosztásokkal (tehát nemüres alkuhalmazzal is) rendelkező játékokban a $\mathrm{Co} = M$ egyenlőséghez elengedhetetlen a játék kiegyensúlyozottsága. Ugyanakkor Maschler [20] ötszereplős, teljesen kiegyensúlyozott példája is mutatja, hogy a magelosztások létezése messze nem zárja ki az alkuhalmaz értelmében stabil elosztások létezését. Ismertek ugyanakkor olyan speciális játékosztályok, ahol az alkuhalmaz nem bővebb, mint a nemüres mag. Ilyen például a konvex játékok osztálya (Maschler et al. [22]), a vétó játékossal rendelkező (vagyis a kiegyensúlyozott) monoton egyszerű játékok osztálya (Einy, Wettstein [7]), a szuperadditív egyszerű folyamjátékok osztálya (Reijnierse et al. [32]), vagy az alkalmazásokban ugyancsak gyakran előforduló faösszefüggő additív játékok osztálya (Potters, Reijnierse [31]). Az ezekre az egybeesési eredményekre adott bizonyítások egységes keretbe helyezhetők és általánosíthatók az alábbi fogalom segítségével.

Kiindulva az (N, v) játékból, definiáljuk az $x \in \mathbb{R}^N$-hez tartozó (N, w_x) *maximális többlet játék*ot a

$$w_x(S) := \max_{T \subseteq S} e_x(T) \qquad \text{minden } S \subseteq N\text{-re}$$

koalíciós függvénnyel. Nyilván $w_x(\varnothing) = 0$, tehát w_x valóban egy játék.

Könnyen adódnak a következő észrevételek.

3.1. Állítás. *Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^N$-re*

1. *w_x monoton (azaz $w_x(S) \leq w_x(T)$ minden $S \subseteq T$-re);*
2. *$w_x(S) \geq \max\{e_x(S), 0\}$ minden $S \subseteq N$-re;*
3. *w_x a minimális olyan monoton koalíciós függvény, ami teljesíti az előző pontbeli tulajdonságot (a w_x az e_x többlet játék monoton fedőjátéka);*
4. *$x \in Im \iff w_x$ 0-normalizált (azaz $w_x(i) = 0$ minden $i \in N$-re);*
5. *$x \in Co \iff w_x$ a nulla-játék (azaz $w_x(S) = 0$ minden $S \subseteq N$-re);*
6. *ha a v játék szuperadditív / gyengén szuperadditív, akkor az e_x többlet játék, illetve a w_x maximális többlet játék is szuperadditív / gyengén szuperadditív.*
7. *ha a v játék konvex (azaz $v(S)+v(T) \leq v(S\cup T)+v(S\cap T)$ minden $S, T \subseteq N$-re), akkor az e_x többlet játék, illetve a w_x maximális többlet játék is konvex.*

A fentiekből következik, hogy amennyiben $x \in \mathrm{Im}$, a w_x maximális többlet játék tetszőleges játék esetén gyengén szuperadditív, hiszen az 1. pont szerint mindig monoton és a 4. pont szerint elosztásnál 0-normalizált is.

A maximális többlet játék jól használható a megalapozott kontrák létezésének eldöntésére. Az S koalíció ugyanis nyilván csak akkor szerepelhet egy kontrában az x elosztásnál, ha $e_x(S) > 0$, és annál nehezebb erre rekontrázni, minél magasabb ez a többlet (lásd az 2.1. állítás 3. pontját).

3.1. Tétel. (Solymosi [35])
Legyen v egy szuperadditív játék és $x \in Im(v) \setminus Co(v)$ egy magon kívüli elosztás. Ha a w_x maximális többlet játék kiegyensúlyozott, akkor az x elosztásnál van megalapozott kontra, tehát $x \notin M(v)$.

Bizonyítás. Legyen v egy szuperadditív játék, és $x \in \mathrm{Im}(v) \setminus \mathrm{Co}(v)$ egy olyan magon kívüli elosztás, amelynél a w_x kiegyensúlyozott. Vegyünk egy $u \in \mathrm{Co}(w_x)$ vektort. Mivel $u \geq 0$ (hiszen w_x 0-normalizált), és $u(N) = w_x(N) > 0$, az u pozitív komponenseinek $P := \{i \in N : u_i > 0\}$ halmaza nem üres.

Legyen $S \subset N$ egy tartalmazásra nézve maximális olyan koalíció, amire $e_x(S) = w_x(N)$. Nyilván $\varnothing \neq S \neq N$. Továbbá $P \subseteq S$, és $e_x(S) = u(S)$, hiszen

$$e_x(S) \leq w_x(S) \leq u(S) \leq u(S) + u(N \setminus S) = u(N) = w_x(N) = e_x(S)$$

miatt $u_j = 0$ minden $j \in N \setminus S$ játékosra.

Legyen $i \in P \subseteq S$, és $j \in N \setminus S$. Definiáljuk az $y \in \mathbb{R}^S$ vektort a következőképpen:

$$y_i := x_i + \frac{u_i}{|S|}, \text{ és } y_k := x_k + u_k + \frac{u_i}{|S|}, \text{ ha } k \neq i,\ k \in S.$$

Mivel $u_i > 0$, és $u_k \geq 0$ minden $k \in S$-re, $y_k > x_k$ minden $k \in S$ játékosra. Mivel $y(S) = x(S)+u(S) = x(S)+e_x(S) = v(S)$, az (S, y) konfiguráció az i egy kontrája a j-vel szemben az x-nél. Sőt, egy megalapozott kontrája.

A j játékosnak ugyanis nincs rekontrája az (S, y) kontrára. Egyrészt, mivel az S tartalmazásra nézve maximális, és az e_x szuperadditív (3.1. állítás 6. pont), bármely $T \neq \varnothing$ és $T \cap S = \varnothing$ koalíció többlete negatív, hiszen

$$e_x(S) > e_x(S \cup T) \geq e_x(S) + e_x(T).$$

Vagyis az S-től diszjunkt koalícióval a j nem tud rekontrázni (2.1. állítás 2. pont). Másrészt, vegyünk egy olyan $T \cap S \neq \varnothing$ koalíciót, amire $j \in T \not\ni i$, és egy $z \in \mathbb{R}^T$ vektort. A (T, z) akkor lenne egy rekontra az (S, y) kontrára, ha

$$\begin{aligned}
z(T) &\geq x(T \setminus S) + y(T \cap S), \\
&= x(T \setminus S) + x(T \cap S) + u(T \cap S) + \tfrac{|T \cap S|}{|S|} u_i, \\
&> x(T) + u(T), \text{ mivel } u(T \setminus S) = 0,\ u_i > 0, \\
&\geq x(T) + e_x(T), \text{mivel } u(T) \geq w_x(T) \geq e_x(T), \\
&= v(T) \geq z(T)
\end{aligned}$$

teljesülne, de ez lehetetlen. Következésképpen, az (S, y) egy megalapozott kontra az x-nél, tehát $x \notin M(v)$. □

Mielőtt rátérnénk a tétel alkalmazhatóságának szemléltetésére, pár fontos megjegyzést teszünk.

3.1. Megjegyzés. A maximális többlet játék kiegyensúlyozottsága csak elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy az adott elosztásnál legyen megalapozott kontra.

Vegyük például a 2.1. példabeli háromszereplős szuperadditív (de nem kiegyensúlyozott) játékot és az $x = (12; 9; 9)$ elosztást. Itt a koalíciónkénti összkifizetések, a többletek, illetve a maximális többletek az alábbiak:

S	1	2	3	12	13	23	123
$x(S)$	12	9	9	21	21	18	30
$e_x(S)$	-12	-9	-9	9	9	12	0
$w_x(S)$	0	0	0	9	9	12	12

Az x elosztásnál például a 3-as kontrázhatja az 1-est az $(S = 23; y_2 = 19; y_3 = 11)$ konfigurációval, amire viszont az 1-esnek nincs rekontrája, sem önállóan, sem a

$T = 12$ koalíción keresztül, ahhoz ugyanis legalább $z_1 + z_2 \geq 12 + 19 = 31 > 30 = v(12)$ kifizetés kellene, ami kettőjük számára elérhetetlen. Ugyanakkor az x elosztásnál a w_x maximális többlet játék nem kiegyensúlyozott, hiszen szuperadditív (3.1. állítás 6. pont), de $12 < 15 = \frac{1}{2}(9 + 9 + 12)$, a (2) feltétel szerint tehát a w_x magja üres.

3.2. Megjegyzés. A legalább ötszereplős játékok esetén a 3.1. tételben a játék szuperadditivitása nem gyengíthető le sem a gyengén szuperadditivitásra, sem a kohézivitásra.

Vegyük például azt az ötszereplős játékot, amelyben $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a koalíciós függvény pedig

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| \leq 1, \\ 2|S| + 1, & \text{ha } S = 12, \\ 2|S| - 1, & \text{ha } S = 345, \\ 2|S| & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy v gyengén szuperadditív és kohézív is. Megjegyezzük ugyanakkor, hogy v nem kiegyensúlyozott, hiszen egy y mag elosztásra teljesülniük kellene az $y_1 + y_2 \geq 5 = v(12)$, $y_1 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 8 = v(1345)$ és $y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 8 = v(2345)$ egyenlőtlenségeknek, viszont ezeket összeadva a $20 = 2v(N) = 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) \geq 5 + 8 + 8 = 21 > 20$ ellentmondást kapnánk, a mag tehát üres.

Az $x = (2; 2; 2; 2; 2)$ elosztásnál a többletek, illetve a maximális többletek:

$$e_x(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 0, \\ -2, & \text{ha } |S| = 1, \\ +1, & \text{ha } S = 12, \\ -1, & \text{ha } S = 345, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad w_x(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } S \supseteq 12, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A w_x maximális többlet játék kiegyensúlyozott, például $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; 0) \in \mathrm{Co}(w_x)$, mégsincs az x-nél megalapozott kontra, tehát $x \in M$. Valóban, az x-nél kontrája csak az $i = 1, 2$ játékosok egyikének lehet az egyetlen pozitív többletű $S = 12$ koalíción keresztül a $j = 3, 4, 5$ játékosok valamelyikével szemben, aki viszont egy $k \neq j$, $k \in \{3, 4, 5\}$ társával együttműködve rekontrázni tud bármilyen $i \to j$ kontrát a $(T = jk; z_j = 2; z_k = 2)$ konfigurációval.

3.3. Megjegyzés. A négyszereplős játékok esetén a 3.1. tételben a játék szuperadditivitása nem gyengíthető le a gyengén szuperadditivitásra. Solymosi [35] közöl ugyanis egy olyan négyszereplős gyengén szuperadditív, de nem szuperadditív (tehát nem is kohézív, így nem is kiegyensúlyozott) játékot, amelyben van olyan $x \in M$ elosztás, amelynél w_x kiegyensúlyozott.

A legfeljebb háromszereplős játékok között hasonló ellenpélda nem létezhet, mivel a szuperadditivitás és a gyengén szuperadditivitás ilyenkor ekvivalens tulajdonságok.

A fenti megjegyzések tükrében viszont adódik a kérdés, hogy

$\boxed{?}$ a négyszereplős játékok esetén a 3.1. tételben a játék szuperadditivitása legyengíthető-e a kohézivitásra?

Sejtésünk szerint igen. Másképpen fogalmazva a kérdés az, hogy

$\boxed{?}$ adható-e olyan négyszereplős kohézív játék, és abban egy olyan $x \in \mathrm{Im} \setminus \mathrm{Co}$ elosztás, hogy a w_x kiegyensúlyozott, de az x-nél mégsincs megalapozott kontra?

Az alábbi, 3.2. tétel szerint, ha a négyszereplős játék kiegyensúlyozott (akár szuperadditív, akár nem), akkor csak a magbeli elosztásoknál nincsen megalapozott kontra, tehát ilyen ellenpélda nem létezhet. Vagyis csak egy kohézív, de nem kiegyensúlyozott és nem szuperadditív négyszereplős játékban fordulhatna esetleg elő egy olyan x elosztás, hogy a w_x kiegyensúlyozott, de az x-nél mégsincs megalapozott kontra. Sejtésünk szerint viszont nem található ilyen ellenpélda.

A teljesség kedvéért vegyük észre, hogy háromszereplős ilyen példa biztosan nincs, hiszen a 2.2. állítás szerint vagy csak a magbeli elosztásoknál nincsen megalapozott kontra (1. eset), vagy csak az egyetlen olyan (az üres magon kívüli) x elosztásnál, amelynél $w_x(ijk) = w_x(ij) = w_x(ik) = w_x(jk) > 0$ (2. eset), ekkor viszont a w_x nem kiegyensúlyozott (lásd a (2) feltételt).

A 3.1. tétel diszkussziója után térjünk vissza az alkuhalmaz és a mag egybeesésének kérdéséhez. A 2.2. állítás 1. pontja szerint ha egy háromszereplős játék kiegyensúlyozott (akár szuperadditív, akár nem), akkor az alkuhalmaz és a mag egybeesnek. Ugyanakkor, Maschler [20] vizsgált egy olyan ötszemélyes teljesen kiegyensúlyozott (tehát szuperadditív) játékot, amelyben a mag az alkuhalmaz szigorú része, vagyis több mint négy szereplő esetén az egybeeséshez a játék valamilyen további specialitása is szükséges. Az alábbi eredmény szerint (a háromszereplős játékokhoz hasonlóan) a négyszereplős játékokban a nyilvánvalóan szükséges kiegyensúlyozottság önmagában is elégséges feltétele az alkuhalmaz és a mag egybeesésének.

3.2. Tétel. (Solymosi [36])
Ha egy négyszereplős kooperatív játékban a mag nem üres, akkor azonos az alkuhalmazzal.

Fontos hangsúlyozni, hogy a játékosok kis száma miatt itt nincs szükség a játék szuperadditivitására. A 3.2. tétel tehát teljessé teszi a kisméretű játékokban a klasszikus alkuhalmaz és a mag viszonyára vonatkozó tudásunkat.

Nyitott kérdés viszont, hogy

$\boxed{?}$ milyen szerkezetű az alkuhalmaz a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékokban?

Nincsen tudomásunk olyan eredményről, ami az alkuhalmaz pontos leírását adná, még a szuperadditív esetben sem. Maschler [19] ugyan megmutatta, hogy egy (elosztásokkal rendelkező) általános négyszereplős játék alkuhalmaza leírható 150^{12} darab, egyenként 41 lineáris egyenlőtlenségből, illetve egyenlőségből álló rendszer megoldáshalmazának uniójaként, de még részleges válaszok sem ismertek a Maschler [19] által is feltett kutatási kérdésre:

$\boxed{?}$ Csökkenthető-e, és ha igen mennyire, az alkuhalmazt alkotó véges sok konvex poliéder számára a négyszereplős esetben adott felső korlát?

A 3.2. tétel mutatja, hogy a kiegyensúlyozott esetben az alkuhalmaz egyetlen lineáris feltételrendszerrel leírható. A konkrét esetekben szerzett tapasztalatok mellett ez is azt sejteti, hogy a négyszereplős játékok alkuhalmazának leírásához szükséges lineáris rendszerek számára a mag üressége esetén is adható az említett 150^{12}-nél nagyságrendekkel kisebb felső korlát is.

4. Néhány speciális szuperadditív játéktípus

A 3.1. tétel segítségével könnyen igazolhatjuk az alkuhalmaz és a mag egybeesését a szuperadditív játékok bizonyos részosztályaira. Amennyiben ugyanis egy speciális típusú szuperadditív játékról megmutatható, hogy az ilyen játékok bármelyik elosztása kiegyensúlyozott maximális többlet játékot indukál (a magbeli elosztásokra ez mindig igaz, hiszen a konstans 0 játékot indukálják), akkor az alkuhalmaznak nem lehet a maghoz nem tartozó eleme, a két megoldáshalmaz tehát egybeesik. Ezen gondolatmenet mentén bizonyíthatók az alább ismertetett ekvivalencia eredmények is. Az egyes játéktípusok pontos definícióját a rövidség kedvéért itt nem adjuk meg, csak utalunk a vonatkozó cikkekre.

A *konvex játékok*ra Maschler, Peleg és Shapley [22] bizonyították a mag és az alkuhalmaz azonosságát (egyébként bizonyításuk általánosíthatósága vezetett a 3.1. tételhez). Mivel minden konvex játék szuperadditív és kiegyensúlyozott (Shapley [33]), az 3.1. állítás 7. pontja alapján a 3.1. tételből rögtön következik a két megoldás egybeesése.

A *vétó kontrollált monoton játékok*ra a mag és az alkuhalmaz azonossága szintén könnyen bizonyítható (Solymosi [35]). Egy nemnegatív v játékban az $i \in N$ egy *vétó játékos*, ha $v(S) = 0$, valahányszor $S \not\ni i$. A nemnegatív v játék egy i-vétó játék, ha az $i \in N$ vétó játékos v-ben, és azt mondjuk, hogy *vétó kontrollált*, ha van benne vétó játékos. Könnyen belátható, hogy

– minden vétó kontrollált monoton játék szuperadditív és kiegyensúlyozott;

– ha v egy monoton i-vétó játék, akkor tetszőleges $x \in \mathrm{Im}$ elosztás által indukált w_x maximális többlet játék is egy monoton i-vétó játék.

Ezen két megállapítás alapján a 3.1. tételből rögtön következik a két megoldás ekvivalenciája ezen a játékosztályon. Speciális esetként egy új bizonyítást kapunk a következő ismert eredményekre: a mag és az alkuhalmaz egybeesnek

– a vétó kontrollált monoton egyszerű játékokban (Einy, Wettstein [7]);

– a klán (clan) játékokban (Potters et al. [30]), speciális esetként, a nagyfőnök (big boss) játékokban (Potters et al. [29]).

A *hozzárendelési játékok*at Shapley és Shubik [34] használták először oszthatatlan termékek kétoldalú piacainak alapmodelljeként. Igazolták, hogy minden hozzárendelési játék teljesen kiegyensúlyozott, tehát szuperadditív is. A 3.1. tételre támaszkodva Solymosi [35] állapította meg, hogy

– hozzárendelési játékokban a mag egybeesik az alkuhalmazzal,

mivel korábban Granot és Granot [11] már igazolták, hogy egy hozzárendelési játék bármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy hozzárendelési játék, tehát kiegyensúlyozott.

A *permutációs játékok*at Tijs et al. [42] vezették be bizonyos többszereplős feladat ütemezési (scheduling, sequencing) helyzetekben felmerülő költség elosztási problémák modelljeként. Megmutatták, hogy minden permutációs játék teljesen kiegyensúlyozott, tehát szuperadditív is. A 3.1. tételt alkalmazva Solymosi, Raghavan és Tijs [37] bizonyították, hogy

– permutációs játékokban a mag egybeesik az alkuhalmazzal,

mivel igazolták, hogy egy permutációs játék bármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy permutációs játék, tehát kiegyensúlyozott. A permutációs játékok egyébként tekinthetők a hozzárendelési játékok egyfajta általánosításának is, mivel az utóbbiak beágyazhatók az előbbiek halmazába (Curiel, Tijs [4]).

A *partíciós játékok* (Kaneko, Wooders [17]) a hozzárendelési játékok más jellegű általánosításai. Ez a játéktípus két szempontból is érdekes. Egyrészt modellkeretet ad a valamilyen külső tényező (például a közvetlen kommunikációs csatornák hiánya) miatt csak korlátozott együttműködési lehetőségekkel rendelkező döntési helyzetek vizsgálatának (Myerson [25], Owen [27]). Másrészt számos teljes kooperációs, de speciális struktúrájú játéktípus tekinthető partíciós játéknak, amennyiben előre megadható a koalícióknak egy $\mathcal{B}$ részhalmaza úgy, hogy a teljes játék felépíthető az ezekből a *bázis-koalíciók*ból álló maximális értékű partíciókon keresztül. A hozzárendelési játékokon kívül speciális partíciós játékok, például a faösszefüggő additív játékok is (Potters, Reijnierse [31]), speciálisan, a nagyfőnök (big boss) játékok (a fa egy csillag), illetve az egykiszolgálós ütemezési játékok (a fa egy lánc) (Curiel, Pederzoli, Tijs [3]) is.

Minden partíciós játék szuperadditív. A $\mathcal{B}$ báziskollekcióra (és bármelyik belőle generált $\mathcal{B}$-partíciós játékra) azt mondjuk, hogy *erősen kiegyensúlyozott*, ha a $\mathcal{B}$-partíciós játékok mindegyikének nem üres a magja, függetlenül a báziskoalíciók értékétől. Ennek a tulajdonságnak egyébként a kombinatorikus optimalizálásban számos ekvivalens jellemzése ismert. A 3.1. tételt alkalmazva Solymosi [38] igazolta, hogy

– erősen kiegyensúlyozott partíciós játékokban a mag és az alkuhalmaz egybeesnek.

A bizonyítás lényege itt is az adott játékosztály zártsága a maximális többlet játék képzésére nézve. Solymosi [38] megmutatta, hogy ha rögzítünk egy $\mathcal{B}$ báziskollekciót, az ebből generált bármelyik $\mathcal{B}$-partíciós játék akármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy $\mathcal{B}$-partíciós játék lesz. Speciálisan, ha $\mathcal{B}$ erősen kiegyensúlyozott, akkor bármelyik $\mathcal{B}$-partíciós játék akármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is (erősen) kiegyensúlyozott lesz. Innen pedig a 3.1. tételből következik a mag és az alkuhalmaz azonossága. Mivel a hozzárendelési játékok, illetve a faösszefüggő additív játékok báziskollekciója is erősen kiegyensúlyozott (Kaneko, Wooders [17], Le Breton et al. [18]), speciális esetként egy újabb bizonyítást kapunk az alkuhalmaz és a mag korábbról már ismert azonosságára ebben a két játékosztályban (Solymosi [35], Potters, Reijnierse [31]).

Az *egyszerű hálózati játékok* (Kalai, Zemel [16]) is partíciós játékok, de nem tartoznak az erősen kiegyensúlyozott típusba, mert a báziskoalícióknak nem minden elképzelhető, hanem csak bizonyos, az adott játékosztály előállításához szükséges (például az additív) értékelései mellett lesznek a generált játékok kiegyensúlyozottak. Kalai és Zemel [16] igazolták, hogy az egyszerű hálózati játékok teljesen kiegyensúlyozottak, tehát szuperadditívak is. A 3.1. tételre támaszkodva Solymosi [38] bizonyította, hogy

– egyszerű hálózati játékokban a mag egybeesik az alkuhalmazzal,

felhasználva Granot, Granot és Zhou [12] egy korábbi eredményét, miszerint egy egyszerű hálózati játék bármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy egyszerű hálózati játék, tehát kiegyensúlyozott.

Az *eladó-cég-vevő játékok*, vagy általánosabban a lokálisan additív többoldalú hozzárendelési játékok szintén teljesen kiegyensúlyozott (de nem erősen kiegyensúlyozott) partíciós játékok, tehát szuperadditívak is (Stuart [39]). A 3.1. tételt alkalmazva Atay és Solymosi [1] bizonyították, hogy

– eladó-cég-vevő játékokban a mag egybeesik az alkuhalmazzal,

mivel igazolták, hogy egy eladó-cég-vevő játék bármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy eladó-cég-vevő játék, tehát kiegyensúlyozott.

5. Néhány egyéb alkuhalmaz

Az eddig tárgyalt (klasszikus) alkuhalmaz mellett számtalan egyéb kontrákra és rekontrákra épülő (halmazértékű) megoldási koncepció található a szakirodalomban. Bőséges listát közöl Maschler [21], de ez a kitűnő áttekintő dolgozat már csak a keletkezési ideje miatt sem lehet teljeskörű. Mi itt kísérletet sem teszünk az összes alkuhalmaz változat számbavételére, csupán három másik variánst említünk.

A *reaktív alkuhalmaz* (Granot [9], [10]) abban hasonlít a klasszikus alkuhalmazra, hogy itt is egyéni játékosok kontráznak, illetve rekontráznak egyéni játékosokat. A különbség abban van közöttük, hogy a modellezni kívánt alkufolyamatban a „támadó" játékos először a kontrájának milyen részleteit fedi fel a „védekező" játékos számára. A klasszikus alkuhalmaz esetében rögtön a teljes kontrát, a koalíciót és a megemelt új kifizetéseket is. A reaktív alkuhalmaz esetében viszont először csak a kontra tényét közli, sem a koalíciót, sem az új kifizetéseket nem árulja el. A védekező játékosnak viszont válaszában meg kell adnia, hogy melyik koalíción keresztül fog védekezni. A támadó játékos erre reagálva (innen az elnevezés), már ennek ismeretében határozhatja meg a kontrája részleteit. A védekező játékos pedig vagy képes úgy csoportosítani a meghirdetett koalíciója által elérhető kifizetéseket, hogy az rekontra legyen, vagy sem. Ilymódon nyilván könnyebb megalapozott kontrákkal előállni, a reaktív alkuhalmaz tehát részhalmaza a klasszikus alkuhalmaznak. Ugyanakkor nyilvánvalóan a reaktív alkuhalmaz is tartalmazza a magot (az akár üres, akár nem). Granot [9], [10] bizonyította, hogy a reaktív alkuhalmaz nem üres, ha a játék elosztáshalmaza nem üres, továbbá, hogy legfeljebb háromszereplős játékokban egybeesik a klasszikus alkuhalmazzal. Bemutatott ugyanakkor egy olyan gyengén kohézív (de nem gyengén szuperadditív és nem is kohézív) négyszereplős játékot, amelyben a reaktív alkuhalmaz szigorúan szűkebb, mint a klasszikus alkuhalmaz. E két megoldás viszonyának pontosabb felderítésében vélhetően hasznos lenne tudni, hogy

$\boxed{?}$ a maximális többlet játékok segítségével jellemezhető-e a reaktív alkuhalmaz?

A reaktív és a klasszikus alkuhalmaz hasonlóságait és különbözőségeit tárgyalja Granot és Maschler [13]. Megmutatják például, hogy egy (elosztásokkal rendelkező) általános négyszereplős játék reaktív alkuhalmaza leírható 5^{12} darab, egyenként 53 lineáris egyenlőtlenségből, illetve egyenlőségből álló rendszer megoldáshalmazának uniójaként. A tartalmazási relációkból és a 3.2. tételből következik, hogy a kiegyensúlyozott esetben a reaktív alkuhalmaz is azonos a maggal, tehát egyetlen lineáris feltételrendszerrel is leírható. Tudomásunk szerint itt is nyitottak még a következő kérdések:

$\boxed{?}$ Milyen feltételek mellett esik egybe a reaktív alkuhalmaz és a klasszikus alkuhalmaz a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékok osztályán?

$\boxed{?}$ Milyen szerkezetű a reaktív alkuhalmaz a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékokban?

$\boxed{?}$ Csökkenthető-e, és ha igen mennyire, egy négyszereplős játék reaktív alkuhalmazát alkotó véges sok konvex poliéder számára adott felső korlát?

A klasszikus alkuhalmazzal kapcsolatos sejtésünk alapján úgy gondoljuk, hogy a reaktív alkuhalmaz esetében is adható az említett 5^{12}-nél sokkal kisebb felső korlát is.

Granot és Maschler [13] azt is igazolták, hogy Maschler [20] híres ötszereplős teljesen kiegyensúlyozott játékában a reaktív alkuhalmaz egybeesik a klasszikus alkuhalmazzal, tehát a reaktív alkuhalmaz is szigorúan bővebb, mint a mag. Ugyanakkor, már az előző fejezetben ismertetett eredményeket megelőzően ismert volt, hogy a reaktív alkuhalmaz nem bővebb a magnál a hozzárendelési játékokban (Granot [9]), illetve az egyszerű hálózati játékokban (Granot, Granot, Zhou [12]). Érdekes volna olyan speciális szerkezetű, kiegyensúlyozott játéktípus(oka)t ismerni, ahol a reaktív alkuhalmaz szigorúan tartalmazza a magot, de szigorúan szűkebb a klasszikus alkuhalmaznál.

A *szemireaktív alkuhalmaz* (Sudhölter, Potters [40]) által modellezett alkufolyamatban a támadó játékos rögtön közli a kontrájában használt koalíciót, de az új kifizetéseket majd csak akkor árulja el, ha a védekező játékos megadta, hogy melyik koalíción keresztül fog védekezni. A támadó játékos már ennek ismeretében határozhatja meg az általa megnevezett koalíció tagjainak szánt megemelt új kifizetéseket, amiket a védekező játékos vagy képes megadni az ő koalíciójában is szereplő játékosoknak, és tartani az eredeti kifizetést a többieknek, vagy sem. Ebben az esetben is nyilván könnyebb megalapozott kontrákkal előállni, mint ha rögtön mindent elárult volna, de nehezebb, mint ha csak a kontra tényét közölné. A szemireaktív alkuhalmaz tehát szűkebb, mint a klasszikus alkuhalmaz, de tartalmazza a reaktív alkuhalmazt. Következésképpen, a szemireaktív alkuhalmaz sem üres, ha a játék elosztáshalmaza nem üres, továbbá, legfeljebb háromszereplős játékokban egybeesik a klasszikus alkuhalmazzal. Sudhölter és Potters [40] közölnek egy olyan gyengén szuperadditív, de nem kohézív négyszereplős játékot, amelyben a reaktív alkuhalmaz szigorúan szűkebb, mint a szemireaktív alkuhalmaz, illetve egy olyan gyengén szuperadditív, de nem kohézív négyszereplős játékot, amelyben a szemireaktív alkuhalmaz szigorúan szűkebb, mint a klasszikus alkuhalmaz. Itt is felmerülnek a következő kérdések:

$\boxed{?}$ A maximális többlet játékok segítségével jellemezhető-e a szemireaktív alkuhalmaz?

$\boxed{?}$ Milyen feltételek mellett esik egybe a szemireaktív alkuhalmaz a reaktív alkuhalmazzal, illetve a klasszikus alkuhalmazzal a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékok osztályán?

$\boxed{?}$ Milyen szerkezetű a szemireaktív alkuhalmaz a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékokban?

Sudhölter és Potters [40] ugyan megmutatták, hogy a szemireaktív alkuhalmaz is véges sok konvex poliéder uniója, de bizonyításukban expliciten nem adták meg azokat a logikai műveletekkel összekapcsolt lineáris feltételrendszereket, amelyek leírják a szemireaktív alkuhalmazt. Nincs tudomásunk ilyen irányú eredményekről, így már a legkisebb nem triviális esetben, a négyszereplős általános játékokra sem tudunk ismertetni felső korlátot ezeknek a lineáris feltételrendszereknek a méretére, illetve a számára vonatkozóan.

A *Mas-Colell-alkuhalmaz* (Mas-Colell [24]) is kontrákra és rekontrákra épül, de egyrészt itt koalíciók alkudoznak koalíciókkal, másrészt a kontrák és a rekontrák is kicsit mást jelentenek, mint az eddig tárgyalt (klasszikus, reaktív, szemireaktív) alkuhalmazoknál, harmadrészt a megengedett kifizetésvektorok köre nem korlátozódik az elosztásokra, elvben bármilyen szétosztás szóba jöhet.

Egy (N,v) játékban a szétosztások (sosem üres) halmazát jelölje $\mathrm{Im}^*(N,v)$. Egy adott $x \in \mathrm{Im}^*(N,v)$ szétosztásnál az (S,y) pár, ahol $\varnothing \neq S \subseteq N$, és $y \in \mathbb{R}^S$, egy *gyenge kontra*, ha $y(S) = v(S)$, továbbá $y_k \geq x_k$ minden $k \in S$-re, és legalább egy $k \in S$-re az egyenlőtlenség szigorú. Az (S,y) gyenge kontrára a (T,z) pár, ahol $T \subseteq N$ és $z \in \mathbb{R}^T$, egy *erős rekontra*, ha $z(T) = v(T)$, továbbá $z_k \geq y_k$ minden $k \in T \cap S$-re, $z_k \geq x_k$ minden $k \in T \setminus S$-re, és legalább egy $k \in T$-re az egyenlőtlenség szigorú. Vegyük észre, hogy nincs semmi kikötés a gyenge kontrában szereplő S és az erős rekontrában szereplő T koalíciókra, az egyik akár részhalmaza is lehet a másiknak. A *Mas-Colell-alkuhalmaz* azon szétosztások halmaza, amelyeknél minden gyenge kontrára van erős rekontra, másképpen, amelyeknél nincsen *Mas-Colell-féle megalapozott kontra*.

Mas-Colell [24] bizonyította, hogy a Mas-Colell-alkuhalmaz bármilyen játékban nem üres (szétosztások minden játékban vannak), továbbá, hogy tartalmazza a magot (mag elosztásoknál gyenge kontrák sincsenek). Viszont Mas-Colell [24] közölt egy olyan négyszereplős teljesen kiegyensúlyozott (tehát szuperadditív) játékot, amelyben a Mas-Colell-alkuhalmaz tartalmaz magon kívüli elosztást is. Giménez-Gómez és Vilella [8] bizonyította, hogy háromszereplős szuperadditív és kiegyensúlyozott játékokban a mag azonos a Mas-Colell-alkuhalmazzal, de a szuperadditivitás nélkül az egybeesés már nem feltétlenül teljesül. Természetszerűleg adódik a kérdés, hogy

$\boxed{?}$ milyen szerkezetű a Mas-Colell-alkuhalmaz a háromszereplős, esetleg a négyszereplős nem szuperadditív és/vagy nem kiegyensúlyozott játékokban?

Ezekben a vizsgálatokban is nagyon hasznos lehet a következő eredmény, ami a 3.1. tétellel van szoros kapcsolatban.

5.1. Tétel. (Holzman [15])
Tetszőleges v játékban, az $x \in \mathrm{Im}^*(v) \setminus Co(v)$ szétosztásnál pontosan akkor van

Mas-Colell-féle megalapozott kontra, ha a w_x maximális többlet játék kiegyensúlyozott.

Kiemeljük, hogy ez a tétel a Mas-Colell-alkuhalmaz elemeinek egy karakterizációját adja, a maximális többlet játék kiegyensúlyozottsága alapján bármelyik szétosztásról pontosan eldönthető, hogy a halmazba tartozik-e, vagy sem. A 3.1. tétel szerint viszont ugyanezzel a segédeszközzel az elosztásoknak csak egy olyan halmazát tudjuk azonosítani, amely biztosan (de általában szigorúan) tartalmazza a klasszikus alkuhalmazt, ráadásul a 3.1. tétel csak a szuperadditív esetben általános érvényű. A 3.1. és 5.1. tételek összevetéséből adódik Holzman [15] egy másik fontos eredménye:

– szuperadditív játékokban a Mas-Colell-alkuhalmaz tartalmazza a klasszikus alkuhalmazt,

mivel a szétosztások halmaza bővebb, mint az elosztások halmaza.

A 5.1. tétel segítségével több (teljesen) kiegyensúlyozott játéktípusra könnyen igazolható a Mas-Colell-alkuhalmaz és a mag egybeesése. Az előző fejezetben használt gondolatmenetet követve, ha bizonyítható, hogy tetszőleges szétosztásnál a maximális többlet játék is az adott játékosztályba tartozik, tehát kiegyensúlyozott, akkor magon kívüli szétosztás nem tartozhat a Mas-Colell-alkuhalmazba, tehát egybeesnek.

Például, a *konvex játékok*ra az 3.1. állítás 7. pontja alapján a 5.1. tételből rögtön következik a Mas-Colell-alkuhalmaz és a mag egybeesése is, mivel minden konvex játék (teljesen) kiegyensúlyozott (Shapley [33]).

A *vétó kontrollált monoton játékok*ra is erősíthető az előző fejezetben tárgyalt ekvivalencia eredmény (Solymosi [35]) a magnak a Mas-Colell-alkuhalmazzal való egybeesésére. Bizonyításunk a következő:

Legyen v egy monoton i-vétó játék, a 0-normalizáltját jelölje v^0. Mivel $v(j) = 0$ minden $j \neq i$-re, nyilván v^0 is egy monoton i-vétó játék, tehát szuperadditív is. Alkalmazhatjuk tehát v^0-ra Atay és Solymosi [1] észrevételét, miszerint

– egy szuperadditív 0-normalizált játékban egy x szétosztás által indukált maximális többlet játék 0-normalizáltja ugyanaz, mint a szétosztás pozitív része által indukált maximális többlet játék, azaz $w_x^0(S) = w_{x^+}(S)$ minden $S \subseteq N$-re, ahol $x_i^+ = \max\{x_i, 0\}$ minden $i \in N$-re.

Vegyünk egy tetszőleges x szétosztást a v^0 monoton i-vétó játékban. Mivel $v^0(T) = 0$ minden $T \subseteq N \setminus \{i\}$-re, és $x_i^+ \geq 0$ minden $i \in N$-re, a v^0 többlet játékában $e_{x^+}(T) \leq 0$ minden $T \subseteq N \setminus \{i\}$-re, tehát a maximális többlet játékában $w_{x^+}(N \setminus \{i\}) = 0$, vagyis az i egy vétó játékos a (definíció szerint) monoton w_{x^+} játékban. Kapjuk, hogy a $w_x^0 = w_{x^+}$ játék kiegyensúlyozott. A 5.1. tételből, valamint a magnak és a Mas-Colell-alkuhalmaznak a 0-normalizálásra való kovarianciájából következik, hogy

– vétó kontrollált monoton játékokban a mag és a Mas-Colell-alkuhalmaz egybeesnek.

Megjegyezzük, hogy a vétó kontrollált monoton egyszerű játékokra Einy és Wettstein [7] ezt az ekvivalenciát már igazolták.

Végezetül megemlítjük, hogy az előző fejezetben tárgyalt mindegyik további játékosztályra is igaz az erősebb mag ekvivalencia is, mivel mindegyik említett játékosztály tartalmazza a tetszőleges szétosztásnál vett maximális többlet játékot is. Ezen állítások bizonyítása megtalálható az alább felsorolt munkákban.

5.2. Tétel. *A mag azonos a Mas-Colell-alkuhalmazzal*

– *a permutációs játékokban (Solymosi, Raghavan, Tijs [37]);*

– *az erősen kiegyensúlyozott partíciós játékokban, speciálisan a hozzárendelési játékokban, illetve a faösszefüggő additív játékokban (Solymosi [38]);*

– *az egyszerű hálózati játékokban (Solymosi [38]);*

– *az eladó-cég-vevő játékokban (Atay, Solymosi [1]).*

Az írásunkban ismertetett számos egybeesési eredmény alapján meggyőződésünk, hogy a maximális többlet játékok kiegyensúlyozottságának vizsgálatával számos további (teljesen) kiegyensúlyozott játéktípusra is viszonylag könnyen igazolhatók (vagy cáfolhatók) lesznek különféle, elsősorban a klasszikus és a Mas-Colell-alkuhalmazokkal kapcsolatos mag ekvivalencia eredmények.

Az alkuhalmazokkal való további ismerkedésre az itt említett munkákon kívül elsősorban a (Peleg, Sudhölter [28]), illetve (Maschler, Solan [23]) könyvek megfelelő fejezeteit ajánljuk.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszöni az NKFIH-nak a K-119930 pályázat, illetve az MTA-nak a Kiválósági Együttműködési Program (KEP-6/2017) keretében nyújtott támogatását.

Hivatkozások

[1] Atay, A. and Solymosi, T.: *On bargaining sets of supplier-firm-buyer games*, Economics Letters, Vol. **167**, pp. 99-103 (2018).

[2] Aumann, RJ. and Maschler, M.: *The bargaining set for cooperative games.* In: Dresher M, Shapley LS, Tucker AW (eds.) Advances in game theory, Princeton University Press, Princeton, N.J., pp. 443-476 (1964).

[3] Curiel, IJ., Pederzoli, G. and Tijs, SH.: *Sequencing games*, European Journal of Operational Research, Vol. **40**, pp 344-351 (1988).

[4] Curiel, IJ. and Tijs, SH.: *Assignment games and permutation games*, Methods of Operations Research, Vol. **54**, pp. 323-334 (1986).

[5] Davis, M. and Maschler M.: *Existence of stable payoff configurations for cooperative games* (abstract), Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. **69**, pp. 106-108 (1963).

[6] Davis, M. and Maschler, M.: *Existence of stable payoff configurations for cooperative games*, In: *Essays in mathematical economics in honour of Oskar Morgenstern*, Shubik M (ed.) Princeton University Press, Princeton, N.J., pp. 39-52 (1967).

[7] Einy, E. and Wettstein, D.: *Equivalence between bargaining sets and the core of simple games*, International Journal of Game Theory, Vol. **25**, pp. 65-71 (1996).

[8] Giménez-Gómez, J-M. and Vilella C.: *On the coincidence of the Mas-Colell bargaining set and the core*, *CREIP Document de treball* n.23-2013, Universitat Rovira i Virgili, Reus, Spain (2013).

[9] Granot, D.: *On a new bargaining set of cooperative games*, *kézirat*, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Vancouver, Kanada (1994).

[10] Granot, D.: *The reactive bargaining set for cooperative games*, International Journal of Game Theory, Vol. **39**, pp. 163-170 (2010).

[11] Granot, D. and Granot F.: *On some network flow games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **17**, pp. 792-841 (1992).

[12] Granot, D., Granot F. and Zhu, WR.: *The reactive bargaining set of some flow games and superadditive simple games*, International Journal of Game Theory, Vol. **26**, pp. 207-214 (1997).

[13] Granot, D. and Maschler, M.: *The reactive bargaining set: Structure, dynamics and extension to NTU games*, International Journal of Game Theory, Vol. 26, pp. 75-95 (1997).

[14] Harsanyi, J.: *A general theory of rational behavior in game situations*, Econometrica, Vol. **34**, pp. 613-634 (1966).

[15] Holzman, R.: *The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets*, International Journal of Game Theory, Vol. **29**, pp. 543-553 (2000).

[16] Kalai, E. and Zemel, E.: *Generalized network problems yielding totally-balanced games*, Operations Research, Vol. **30**, pp. 998-1008 (1982).

[17] Kaneko, M. and Wooders, M.: *Cores of partitioning games*, Mathematical Social Sciences, Vol. **3**, pp. 313-327 (1982).

[18] Le Breton, M., Owen, G. and Weber, S.: *Strongly balanced cooperative games*, International Journal of Game Theory, Vol. **20**, pp. 419-427 (1992).

[19] Maschler, M.: *The inequalities that determine the bargaining set* $M_1^{(i)}$, Israel Journal of Mathematics, Vol. **4**, pp. 127-134 (1966).

[20] Maschler, M.: *An advantage of the bargaining set over the core*, Journal of Economic Theory, Vol. **13**, pp. 184-192 (1976).

[21] Maschler, M.: *The bargaining set, kernel, and nucleolus*, In: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 1, Aumann R, Hart S (eds), Chapter **18**, pp. 591-667, Elsevier (1992).

[22] Maschler, M., Peleg, B. and Shapley, L.: *The kernel and bargaining set for convex games*, International Journal of Game Theory, Vol. **1**, pp. 73-93 (1972).

[23] Maschler, M., Solan, E. and Zamir, S.: *Game Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (2013).

[24] Mas-Colell, A.: *An equivalence theorem for a bargaining set*, Journal of Mathematical Economics, Vol. **18**, pp. 129-139 (1989).

[25] Myerson, R.: *Graphs and cooperation in games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **2**, pp. 225-229 (1977).

[26] Neumann, J von, Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1944).

[27] Owen, G.: (1986) *Values of graph-restricted games*, SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods, Vol. **7**, pp. 210-220 (1986).

[28] Peleg, B. and Sudhölter, P.: *Introduction to the Theory of Cooperative Games* Kluwer Academic Publishers, Boston / Dordrecht / London, 2003.

[29] Potters, JAM., Muto, S. and Tijs, SH.: *Bargaining set and kernel of big boss games*, Methods of Operations Research, Vol. **60**, pp. 329-335 (1990).

[30] Potters, JAM, Poos, Tijs, SH. and Muto, S.: *Clan games*, Games and Economic Behavior, Vol. **1**, pp. 275-293 (1989).

[31] Potters, JAM. and Reijnierse, J.: *Gamma-component additive games*, International Journal of Game Theory, Vol. **24**, pp. 49-56 (1995).

[32] Reijnierse, J., Maschler, M., Potters, JAM. and Tijs SH.: *Simple flow games*, Games and Economic Behavior, Vol. **16**, pp. 238-260 (1996).

[33] Shapley, L.: *Cores of convex games*, International Journal of Game Theory, Vol. **1**, pp. 11-26 (1971).

[34] Shapley, L. and Shubik, M.: *The assignment game I: The core*, International Journal of Game Theory, Vol. **1**, pp. 111-130 (1972).

[35] Solymosi, T.: *On the bargaining set, kernel and core of superadditive games*, International Journal of Game Theory, Vol. **28**, pp. 229-240 (1999).

[36] Solymosi, T.: *The bargaining set of four-person balanced games*, International Journal of Game Theory, Vol. **31**, pp. 1-11 (2002).

[37] Solymosi, T., Raghavan, TES. and Tijs, S.: *Bargaining sets and the core in permutation games*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **11**, pp. 93-101 (2003).

[38] Solymosi, T.: *Bargaining sets and the core in partitioning games*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **16** No. **4** pp. 425-440 (2008).

[39] Stuart, H.: *The supplier-firm-buyer game and its m-sided generalization*, Mathematical Social Sciences, Vol. **34** No. **1**, pp. 21-27 (1997).

[40] Sudhölter, P. and Potters, JAM.: *The semireactive bargaining set of a cooperative game*, International Journal of Game Theory, Vol. **30**, pp. 117-139 (2001).

[41] Tchantcho, H., Moyouwou, I. and Andjiga, NG.: *On the bargaining set of three-player games*, Economics Bulletin, Vol. **32** No. **1**, pp. 429-436 (2012).

[42] Tijs, S., Parthasarathy, T., Potters, J. and Rajendra Prasad, V.: *Permutation games*: *Another class of totally balanced games*, OR Spektrum, Vol. **6**, pp. 119-123 (1984).

Solymosi Tamás 1960-ban született Gyomán. A szegedi József Attila Tudományegyetemen szerzett okleveles matematikus diplomát, majd három év programozói munka után a University of Illinois at Chicago-n (UIC) folytat PhD-tanulmányokat. Közben egyetemi (kis)doktori címet szerez a JATE-n és a szegedi MTA Automataelméleti Kutatócsoport tagja lesz. PhD-fokozatát az UIC-n 1993-ban szerzi meg az "On the nucleolus of cooperative games" című disszertációjával. 1995-től a Budapesti Közgazdaságtudományi, később Corvinus Egyetem adjunktusa, majd docense, 2015-től pedig egyetemi tanára. Közben két évig Magyary Zoltán posztdoktori, majd három-három évig Széchenyi István, illetve Bolyai János kutatási ösztöndíjas. Kutatási területe a kooperatív játékok elmélete és alkalmazásai. Több kutatási pályázat témavezetője, kb. 40 tudományos közlemény (társ)szerzője, több mint 400 független hivatkozással. 2006 óta az International Journal of Game Theory szerkesztőbizottsági tagja.

SOLYMOSI TAMÁS

Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
Budapest, Fővám tér 8.
tamas.solymosi@uni-corvinus.hu

COINCIDENCE OF BARGAINING SETS AND THE CORE

Tamás Solymosi

The core is the most frequently studied set-valued solution of cooperative games. It embodies the basic stability requirement that the allocation of the grand coalition value must be acceptable for all coalitions. In many games no such allocation exists, hence other solution concepts which are nonempty even for games with empty core are also needed. Among the plethora of available nonempty core extensions, here only the best known bargaining sets are discussed. The common feature of the various bargaining sets is that, in addition to core allocations, they also admit non-core imputations at which disruption by a coalition could happen, but can be prevented by raising the payoffs to the disruptive players. The aim of the paper is to give an introductory overview of known results, augmented by some new observations and open questions, on the coincidence of the core and the classical, the reactive, the semireactive , and the Mas-Colell bargaining sets.