

VÁLASZTÓKERÜLETEK ALAKJÁNAK VIZSGÁLATA HU-FÉLE INVARIÁNS MOMENTUMOK ALKALMAZÁSÁVAL

NAGY BALÁZS, SZAKÁL SZILVIA

A *gerrymandering* a választókerületek politikai elfogultság szerinti átrajzolása. Számos mérték létezik síkbeli alakzatok bizonyos tulajdonságainak leírására, ezzel szemben az ideális választókerület formát nehéz lenne meghatározni. Kutatásunkban a Hu-invariáns momentumok segítségével egy új körszerűségi mutatót alkalmazunk néhány amerikai választókerület alakjának és a rendszeresen előforduló változtatások hatásának vizsgálatára, emellett tárgyaljuk az általunk használt alakmutatókkal kapcsolatban felmerülő módszertani kérdéseket is. További célunk egy olyan eljárás kidolgozása, amellyel a manipuláció szándéka hatékonyan kiszűrhető a választókerületek újrarajzolásánál.

1. Bevezetés

Ennek a tanulmánynak alapvetően két célja van. Az egyik, hogy összehasonlítsa néhány amerikai állam választókerületeinek alakját. A másik, hogy bemutassa az alkalmazott alakmutatókat, és tárgyalja az ezekkel kapcsolatos módszertani kérdések egy részét.

A választókerület kialakítása során első lépésként a körzetek méretét, azaz a körzetbe tartozó választók számát, majd határát kell meghatározni. A körzetkiosztási feladat és a körzethatárok megrajzolása is alapvető fontosságú az arányos képviselő szempontjából. Nem csak a probléma, de az irodalom is két részre tagozódik, az előbbiről áttekintést ad [6], míg az utóbbi témáról az alábbi cikkek értekeznek részletesen: [18], [14]. Vizsgálataink középpontjában a körzethatárok kialakítása áll. A választási körzetek létrehozatalakor az alak önálló kutatási téma, mivel az, hogy a körzetek határait pontosan hol húzzák meg, meghatározó lehet a pártok választási eredményeit illetően, ami közvetve jelentős gazdasági következményekkel is járhat. A politikai hátsó szándékkal történő térképrajzolást, a választókerület-manipulációt a nemzetközi irodalomban *gerrymandering*nek hívják.

A szakirodalomban számos olyan módszert különböztetnek meg, amellyel egy régió alakja mérhető [21], [9]. Magyarországi megyék vizsgálatát illetően ld. [2].

Mivel egy régió alakjával kapcsolatban több, egymással is összefüggő tulajdonságot lehet vizsgálni, így annak egyetlen mutatóval való pontos leírása nem lehetséges. Egy kétdimenziós területegység formáját tekintve számos különböző szempontot lehet vizsgálni: földrajzi kompaktság (körszerűség), elnyúltság, konvexitás, lyukaság, összefüggőség, a határvonal csipkézettsége. Mivel a téma több tudományterületet is átfog, nincs egységes nyelvezet az alak tulajdonságait illetően. Részben ez az oka annak, hogy a szerzők gyakran szinonimaként alkalmaznak olyan kifejezéseket, mint pl. körszerűség, megnyúlás, konvexitás stb. A korábban felsorolt tulajdonságok közül gyakorlati fontosságuk miatt a körszerűség mutatói a legfontosabbak és a leggyakrabban tárgyaltak, ezért ebben a tanulmányban csak ezeket használjuk. Egy „minden igényt kielégítő” alakmutatónak több kritériumot is teljesítenie kellene, mint például a mérőszám mindenféle mértani alakzatra alkalmazható legyen; minden alakzatot egyetlen számmal jellemezzen; lehetőleg a 0-tól 1-ig terjedő skálán vegye fel az értékeket; a mérőszám nagyságát ne befolyásolja az alakzat elforgatása, eltolása, nagyítása stb.

A választókörzetek kialakításánál számos alakmutatót használnak a körzetek földrajzi „kompaktségének” (tömörségének) mérésére. Ezen mutatók a vizsgált alakzatok kerülete, területe és különféle hosszértékeinek összevetésén alapulnak. A Reock-teszt [15] például a körzet területét viszonyítja a legkisebb olyan kör területéhez, amely a körzetet éppen körbekeríti. A Polsby–Popper-teszt [13] a körzet területét a kerületével azonos kerületű kör területéhez viszonyítja. A Schwartzberg-teszt [17] a körzet határvonalának hosszát a körzet területével azonos területű kör kerületéhez viszonyítja. További mutatók is léteznek, amelyek kétségtelenül hasznosak, azonban ezek közül egy olyan sincs, amit legjobbnak vagy minden szempontból jónak lehetne tartani.

Alapvetően a képfeldolgozásban használt momentumokat alkalmazzuk az objektumok formájának leírására jelen dolgozatunkban. Ismeretes, hogy a különböző rendű momentumokból olyan mennyiségek származtathatók, amelyek – azonkívül, hogy hasznos információt nyújtanak az objektumok alakjáról – invariánsak az eltolásra, nagyításra és forgatásra. A képmomentumok rendszere ilyenformán alkalmas a választókerületek alakjának leírására. Munkánkat jelentősen inspirálták Zunic, Hirota és Rosin [20], [11], [19] dolgozatai, akik bevezették a körszerűség momentum alapú mértékét.

Ebben a cikkben a választókerületek formájának leírására javasoljuk az általuk bevezetett momentum alapú alakmutatót. A legelterjedtebb körszerűségi mutatókhoz képest, amelyek a körzet területét és kerületét is figyelembe veszik, az új mutató jobban működik abban az esetben, amikor a vizsgált választókerület olyan csipkézett határral rendelkezik, amely a kerület nagy növekedéséhez vezet.

Dolgozatunkban a körszerűség momentum alapú mértékét alkalmazzuk négy állam, nevezetesen Arkansas, Iowa, Kansas és Utah kongresszusi választókerületeire. Összehasonlítva a korábban már említett klasszikus mértékekkel, jelentős különbségeket figyelhetünk meg a momentum alapú és a hagyományos alakmutató

értékek között. Úgy találtuk, hogy a momentum alapú mérték hatékony módja annak, hogy azonosítsuk a szabálytalan alakú választási körzeteket. Az alakmutató értékek időbeli változása alapján lehetőség van a gerrymandering gyanús esetek észlelésére is. Az ezzel kapcsolatos eredményeket a 4. fejezet tartalmazza.

Mostani tanulmányunk folytatását illetően a következő kutatási irányt jelöljük ki. Az alakkal kapcsolatos vizsgálatoknál figyelembe kell venni a szabálytalan államhatárokat. További fontos tényező a népesség területegységen belüli eloszlása is, ami felveti az adatok súlyozásának kérdését. Az úgynevezett korrigált körszerűségi mutató figyelembe veszi a lakosság területegységen belüli eloszlását, valamint az államhatárokat is. Jelen dolgozat az ehhez szükséges előkészületeket tartalmazza. Bár az alak jellemzőinek egyetlen mutatóval történő egzakt matematikai leírása nem lehetséges, célunk egy olyan módszer, ill. alakmutató kidolgozása, amely a földrajzi, valamint a népesség-eloszlási jellemzőket is figyelembe véve a lehető legpontosabban jellemzi a választókerületek alakját.

2. Invariáns momentumok

Mivel az új körszerűségi¹ mutató meghatározásához a (geometriai) momentumokat fogjuk használni, az alábbiakban összefoglaljuk az ezekkel kapcsolatos legfontosabb jelöléseket és tényeket. Érdemes megemlíteni, hogy a geometriai momentumokat széles körben használják a számítógépes képelemzési és alakfelismerési feladatokban – lásd [1] [5],[20] és (Chapter 12 [11]).

Egy D alakzat $(p + q)$ -adrendű (geometriai) momentumai folytonos esetben:

$$m_{p,q}(D) = \int \int_D x^p y^q dx dy$$

$(p, q = 0, 1, 2, \dots)$.

A valódi képfeldolgozó alkalmazásokban diszkrét adatokkal dolgoznak, ahol a vizsgált objektumok pixelekből állnak. Ebben az esetben a geometriai momentumok pontos kiszámítása nem lehetséges, ezért gyakorlatban minden egyes $m_{p,q}(D)$ momentumot a diszkrét megfelelőjére cserélünk ki:

$$m_{p,q}(D) = \sum_{(i,j) \in D \cap \mathbb{Z}^2} i^p j^q,$$

ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

Egy D alakzat $(p + q)$ -adrendű (képi) momentumai folytonos esetben:

$$m_{p,q}(D) = \int \int_D x^p y^q f(x, y) dx dy,$$

¹A szakirodalomban a körszerűség csak elnevezésbeli egyszerűsítés, valójában körlapszerűségről van szó.

diszkrét esetben pedig

$$m_{p,q}(D) = \sum_{(i,j) \in D \cap \mathbb{Z}^2} i^p j^q f(i, j)$$

$(p, q = 0, 1, 2, \dots)$, ahol $f(x, y)$ a kép világosságfüggvénye. Világosságfüggvényen egy olyan nemnegatív, valós értékű függvényt értünk, amely szakaszosan folytonos, kompakt tartójú, és az egyes változóiban vett improprius integráljai egyenletesen konvergensek.

A világosságfüggvényt 0 és 1 közé normálva egy kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényeként is értelmezhetjük. Mivel különböző rendű momentumokkal a kép világosságának eloszlását tudjuk jellemezni, így a képmomentumok rendszere alkalmas a választókerületek alakjának leírására. Területelemzési vizsgálatok esetén a világosságfüggvénnyel tudjuk megadni a lakosság területegységen belüli eloszlását.

Az origónak a súlypontba való eltolásával olyan momentumok számíthatók, amelyek függetlenek a vizsgált objektum helyétől.

Egy D alakzat $(p+q)$ -adrendű centrális (képi) momentumai folytonos esetben:

$$\mu_{p,q}(D) = \int \int_D (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) dx dy,$$

diszkrét esetben pedig

$$\mu_{p,q}(D) = \sum_{(i,j) \in D \cap \mathbb{Z}^2} (i - \bar{x})^p (j - \bar{y})^q f(i, j)$$

$(p, q = 0, 1, 2, \dots)$, ahol $(\bar{x}, \bar{y})$ a kép súlypontja, amely az elsőrendű momentumok normálásával kapható meg:

$$\bar{x} = \frac{m_{1,0}(D)}{m_{0,0}(D)}, \quad \bar{y} = \frac{m_{0,1}(D)}{m_{0,0}(D)}.$$

Centrális momentumok alkalmazása esetén eltolásra invariáns momentumokat kapunk.

Néhány momentumnak fizikai jelentés is tulajdonítható. A nulladrendű momentum $(m_{0,0}(D))$ például a kép összintenzitását reprezentálja. A másodrendű centrális momentumok $(\mu_{2,0}(D)$ és $\mu_{0,2}(D))$ képviselik a kép világosságfüggvényének átlag körüli szórásnégyzetét. Ez utóbbiak különösen fontosak lesznek a vizsgálataink szempontjából.

Normalizált centrális momentumok:

$$\eta_{p,q}(D) = \frac{\mu_{p,q}(D)}{[\mu_{0,0}(D)]^\gamma}, \quad \gamma = 1 + \frac{p+q}{2}.$$

A normalizált centrális momentumok alkalmazásával Hu és munkatársai olyan mennyiségeket konstruáltak, amelyek invariánsak a forgatásra, eltolásra és skálázásra. Ezek az úgynevezett Hu-féle invariáns momentumok [5]. A mi vizsgálataink középpontjában az első invariáns momentum áll, nevezetesen:

$$\phi_1(D) = \eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D).$$

3. Körszerűségi mutatók

Sokan a politikai gerrymandering megakadályozásának objektív megelőző eszközének tartják azt, hogy a körzetek „kompaktsága” megfelelő mértékű legyen. Nem meglepő tehát, hogy az alakmutatók egy része a körtől, mint ideális alaktól való eltérés mérésén alapul.

3.1. Megjegyzés. Egy C körszerűségi mutatóval szemben az alábbi, természetes elvárásokat támasztjuk:

- a) $C(D) \in (0, 1]$ bármely D síkbeli alakzatra.
- b) $C(D) = 1$ pontosan akkor, ha D egy kör.
- c) $C(D)$ invariáns az eltolásra, forgatásra és a nagyításra;
- d) Minden $\delta > 0$ esetén létezik olyan D alakzat, amelyre $0 < C(D) < \delta$, azaz léteznek olyan alakzatok, amelyek körszerűségi mértéke tetszőlegesen megközelíti a 0-t.

A szakirodalomban számos olyan alakmutatót alkalmaznak, amellyel a régió körszerűsége mérhető. A mérési eljárások alapján MacEachren [9] a következő négy, egymással némileg átfedésben lévő kategóriába osztotta a javasolt mutatókat: a területegység kerületének és területének összehasonlításán alapuló mutatók; a területegységgel kapcsolatba hozható köröket és egyéb síkidomokat felhasználó mutatók; egy szabályos alakkal való direkt összehasonlításán alapuló mutatók; a területegység alkotóelemeinek eloszlásán alapuló mutatók. A fenti négy kategórián kívül más csoportosítások is lehetségesek, így például Niemi és munkatársai [12] szintén négy (de a fentiekől eltérő), míg Frolov [4] nyolc fő csoportot javasolt a számításban részt vevő adatok típusa alapján. Dolgozatunkban nem ismertetjük az összes lehetséges alakmutatót, de röviden bemutatjuk a leggyakrabban használtakat.

3.1. Klasszikus körszerűségi mutatók

A *Polsby–Popper*-teszt az egyik legelterjedtebb kontúr alapú körszerűségi mutató. A körzet területét a kerületével azonos kerületű kör területéhez viszonyítja:

$$C_{PP}(D) = \frac{4\pi \cdot \text{area}(D)}{[\text{perimeter}(D)]^2}, \quad (1)$$

ahol D egy síkbeli alakzat [13]. Ez az alakmutató a kontúr simaságát is tükrözi. Könnyű ellenőrizni, hogy (1) teljesíti a körszerűségi mutatóval szembeni 3.1. kritériumokat.

Az egyik legismertebb terület alapú alakelemzési módszer a *Reock*-teszt, amely a körzet területének és a köré írható legkisebb kör területének hányadosaként adja meg egy alakzat körszerűségi mértékét:

$$C_R(D) = \frac{\text{area}(D)}{\text{area}(C)},$$

ahol D egy síkbeli alakzat, C a legkisebb olyan kör, amely a körzetet éppen körbekeríti [15].

A körszerűség meghatározására az alak meghatározásának egyik általános megközelítése is alkalmazható. Az egyik ilyen megközelítés a Lee és Salle által bemutatott index. Az index kiszámításához először egymásra helyezzük a D alakzatot és az R szabványos egységet (referenciatartomány) úgy, hogy a közös rész területe maximális legyen. Ezek után a *Lee–Sallee*-indexet a következőképpen határozhatjuk meg [7]:

$$\tau(D) = \frac{\text{area}(D \triangle R)}{\text{area}(D \cup R)}.$$

A gyakorlatban könnyebben kivitelezhető, ha a két alakzatot úgy rendezzük el, hogy azok súlypontja egybeessen. Abban az esetben, amikor az alakzat körszerűségét vizsgáljuk, a referenciatartomány egy kör lesz. Például illesszünk egy C kört egy D alakzatra, ekkor a D alakzat körszerűsége becsülhető C és D összehasonlításával. Tehát egy egyszerű lehetőség, ha az illesztett C kör középpontja egybeesik a D alakzat súlypontjával, és területe megegyezik a D területével. Végül a körszerűségi mutató:

$$C_{LS}(D) = 1 - \frac{\text{area}(D \triangle C)}{\text{area}(D \cup C)} = \frac{\text{area}(D \cap C)}{\text{area}(D \cup C)},$$

ahol D egy síkbeli alakzat, C a referenciakör. Természetesen vannak más változatai is ennek a megközelítésnek.

3.2. Invariáns momentum mint körszerűségi mutató

A továbbiakban feltételezzük, hogy minden vizsgált alakzat kompakt (topológiai értelemben). Nyilvánvaló, hogy ez nem korlátozza a képfeldolgozási feladatokat. Mivel jelen dolgozatban a választókerületek alakját vizsgáljuk, amelyben a lakosság területegységen belüli eloszlása nem játszik szerepet, így a világosságfüggvény a továbbiakban indikátorfüggvénynek tekinthető.

3.1. ÁLLÍTÁS. Legyen D egy kompakt alakzat a síkon. Ekkor

$$\phi_1(D) = \eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D) = \frac{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)}{[\mu_{0,0}(D)]^2} \geq \frac{1}{2\pi},$$

$$\phi_1(D) = \eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D) = \frac{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)}{[\mu_{0,0}(D)]^2} = \frac{1}{2\pi} \iff \text{ha } D \text{ kör.}$$

Következésképpen $\phi_1(D)$ pontosan akkor éri el a minimális értékét, ha D egy kör. Ez a minimum $1/(2\pi)$. Ennek alapján az új körszerűségi mértéket a következőképpen adhatjuk meg [20] alapján.

3.1. Definíció. Tegyük fel, hogy D egy kompakt alakzat a síkon. Ekkor legyen a $C_1(D)$ körszerűségi mutató

$$C_1(D) = \frac{\phi_1(D)}{\phi_1(D)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{[\mu_{0,0}(D)]^2}{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)},$$

ahol a C kör területe megegyezik a D területével.

Könnyű ellenőrizni, hogy az így definiált körszerűségi mutató kielégíti a 3.1. feltételeket. A normalizált centrális momentumok használatakor skálázásinvariáns jellemzőket kapunk. Ha a skálázási faktor λ , akkor az új centrális momentumok:

$$\mu'_{p,q} = \lambda^{p+q+2} \cdot \mu_{p,q}.$$

Speciálisan,

$$\mu'_{0,0} = \lambda^2 \cdot \mu_{0,0}.$$

Következésképpen,

$$\eta'_{2,0} = \frac{\mu'_{2,0}}{[\mu'_{0,0}]^2} = \frac{\lambda^4 \cdot \mu_{2,0}}{[\lambda^2 \cdot \mu_{0,0}]^2} = \eta_{2,0},$$

$$\eta'_{0,2} = \frac{\mu'_{0,2}}{[\mu'_{0,0}]^2} = \frac{\lambda^4 \cdot \mu_{0,2}}{[\lambda^2 \cdot \mu_{0,0}]^2} = \eta_{0,2},$$

ami igazolja a normalizált centrális momentumok skálázásinvarianciáját.

Az α -szöggel történő forgatás utáni másodrendű momentumok kifejezhetőek az alábbi módon:

$$\mu'_{2,0} = \cos^2(\alpha) \cdot \mu_{2,0} + \sin^2(\alpha) \cdot \mu_{0,2} - \sin(2\alpha) \cdot \mu_{1,1},$$

$$\mu'_{0,2} = \sin^2(\alpha) \cdot \mu_{2,0} + \cos^2(\alpha) \cdot \mu_{0,2} + \sin(2\alpha) \cdot \mu_{1,1}.$$

Tehát

$$\mu'_{2,0} + \mu'_{0,2} = (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) (\mu_{2,0} + \mu_{0,2}) = \mu_{2,0} + \mu_{0,2},$$

azaz

$$\phi'_1 = \phi_1.$$

Mivel a centrális momentumok alkalmazása esetén eltolásra invariáns momentumokat kapunk, a normalizált centrális momentumok alkalmazása biztosítja az invarianciát a tetszőleges pont körüli forgatáshoz. A bizonyítás részleteit illetően ld. [5].

A regionalizációs problémák során gyakran fordul elő, hogy területeket kell egyesíteni vagy épp szétválasztani. Az optimális felosztás meghatározásához segítségünk lehet arra, hogy miként változik egy régió körszerűségi értéke, ha például egy szomszédos tartományt hozzácsatolunk. Erre ad választ a következő állítás.

3.2. ÁLLÍTÁS. Legyen D_1 és D_2 két szomszédos síkbeli alakzat. Jelölje D az ezek egyesítésével létrejövő új tartományt. Ekkor

$$\begin{aligned} \mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D) &= \mu_{2,0}(D_1) + \mu_{0,2}(D_1) + \mu_{2,0}(D_2) + \mu_{0,2}(D_2) \\ &\quad + d_1^2 \cdot \mu_{0,0}(D_1) + d_2^2 \cdot \mu_{0,0}(D_2), \end{aligned}$$

ahol d_1 , illetve d_2 a D_1 , illetve D_2 súlypontjának a D súlypontjától való távolsága.

Bizonyítás. Jelölje $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, illetve $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ a D_1 , illetve D_2 alakzatok súlypontját. A D alakzat súlypontjának koordinátái:

$$\bar{x} = \frac{m_{0,0}(D_1) \cdot \bar{x}_1 + m_{0,0}(D_2) \cdot \bar{x}_2}{m_{0,0}(D_1) + m_{0,0}(D_2)}, \quad \bar{y} = \frac{m_{0,0}(D_1) \cdot \bar{y}_1 + m_{0,0}(D_2) \cdot \bar{y}_2}{m_{0,0}(D_1) + m_{0,0}(D_2)}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D) &= \int \int_D (x - \bar{x})^2 dx dy + \int \int_D (y - \bar{y})^2 dx dy \\ &= \int \int_{D_1} (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 dx dy + \int \int_{D_2} (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 dx dy. \end{aligned}$$

A D_1 tartomány feletti integrálra kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} &\int \int_{D_1} (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 dx dy \\ &= \int \int_{D_1} [(\bar{x}_1 - \bar{x}) + (x - \bar{x}_1)]^2 + [(\bar{y}_1 - \bar{y}) + (y - \bar{y}_1)]^2 dx dy \\ &= \int \int_{D_1} ((\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y})^2) dx dy + \int \int_{D_1} ((x - \bar{x}_1)^2 + (y - \bar{y}_1)^2) dx dy \\ &\quad + 2(\bar{x}_1 - \bar{x}) \int \int_{D_1} (x - \bar{x}_1) dx dy + 2(\bar{y}_1 - \bar{y}) \int \int_{D_1} (y - \bar{y}_1) dx dy \\ &= d_1^2 \cdot \mu_{0,0}(D_1) + \mu_{2,0}(D_1) + \mu_{0,2}(D_1). \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk a következő, egyszerűen belátható azonosságot:

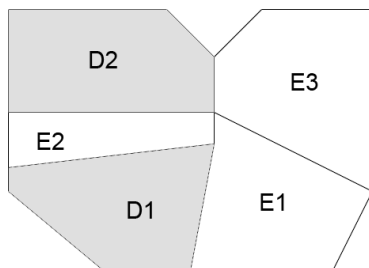
$$\int \int_{D_1} (x - \bar{x}_1) dx dy = \int \int_{D_1} (y - \bar{y}_1) dx dy = 0.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int \int_{D_2} (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 dx dy = d_2^2 \cdot \mu_{0,0}(D_2) + \mu_{2,0}(D_2) + \mu_{0,2}(D_2),$$

ami az állításunk helyességét igazolja. $\square$

Analóg állítás igaz abban az esetben is, ha geometriai momentumok helyett képi momentumokat alkalmazunk. Konkrét regionalizálási problémánál ez azt jelenti, hogy figyelembe vesszük a lakosság területegységen belüli eloszlását.



1. ábra. Példa regionalizálási problémára

3.1. Példa. Az alábbi egyszerű példán egy regionalizálási problémát szemlélítettünk. A célunk most csak annyi, hogy maximalizáljuk a körszerűségi mutató értékének növekedését. Megvizsgáljuk, hogy miként változik a körszerűségi mutató értéke, amikor egy régióhoz hozzácsatolunk egy egységet. Az 1. ábra két régiót (D_1 és D_2) és három egységet (E_1 , E_2 és E_3) ábrázol, amelyek még nincsenek hozzárendelve egyetlen régióhoz sem. Tegyük fel, hogy a D_1 és D_2 régiók a korábbi feldolgozási fázisok során a jelenlegi állapotukra nőttek. Az 1. táblázat tartalmazza $\mu_{2,0}(\cdot) + \mu_{0,2}(\cdot)$, $\mu_{0,0}(\cdot)$ és $C_1(\cdot)$ értékét az említett tartományokra vonatkozóan. Jelölje d_1 az aktuális régió súlypontjának az egység hozzáadásával keletkező új régió súlypontjától való távolságát. Továbbá, legyen d_2 az egység súlypontjának az egység hozzáadásával keletkező új régió súlypontjától való távolsága. Mivel a D_1 régió és az E_3 egység, valamint a D_2 régió és az E_1 egység nem szomszédosak, így ezeket nem lehet egyesíteni.

Tehát a következő lehetséges opciók jöhetnek szóba:

- I. Az E_1 egységet hozzárendeljük a D_1 régióhoz.
- II. Az E_2 egységet hozzárendeljük a D_1 régióhoz.
- III. Az E_2 egységet hozzárendeljük a D_2 régióhoz.
- IV. Az E_3 egységet hozzárendeljük a D_2 régióhoz.

	$\mu_{2,0}(\cdot) + \mu_{0,2}(\cdot)$	$\mu_{0,0}(\cdot)$	$C_1(\cdot)$
D_1 régió	1,711	2,967	0,819
D_2 régió	1,948	3,043	0,756
E_1 egység	1,359	2,761	0,893
E_2 egység	0,638	1,173	0,343
E_3 egység	1,869	3,251	0,9

1. táblázat. A régiók és egységek az egyesítés előtt.

Opció	d_1	d_2	$\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)$	$C_1(D)$	$\Delta C_1(D)$
I.	0,9	0,97	8,071	0,647	-0,172
II.	0,28	0,68	3,124	0,873	0,054
III.	0,26	0,64	3,272	0,865	0,109
IV.	1,3	1,23	13,878	0,454	-0,302

2. táblázat. A lehetséges egyesítési opciók.

Itt D az adott opció végrehajtása után létrejövő új tartományt, $\Delta C(D)$ pedig az egyesítés során bekövetkezett körszerúségiérték-növekedést jelöli. A III. opció végrehajtása során bekövetkezett körszerúségiérték-növekedés 0,109. Most ez a „legjobb” opció az összes többi lehetőséghez képest. Ha a II. opció valósul meg, akkor a D_1 körszerúségi értéke lesz a legmagasabb (0,873), de mivel a körszerúségi együttható értékének legnagyobb növekedését kerestük ahelyett, hogy a legmagasabb körszerúségi értéket figyeljünk, így a III. opció tekinthető a legjobbnak.

Egy mohó algoritmus csak azt nézné, hogy melyik esetben lesz valamely körzet körszerúségi értéke a legnagyobb. A mi célfüggvényünk azonban az egyes régiók körszerúségi együtthatójának összege. Egy regionalizálási feladat célja maximalizálni adott számú régió teljes körszerúségének mértékét. Az általunk alkalmazott módszer, amely az alakzat körszerúségét a momentum invariánsak alapján számolja, számítási szempontból hatékony körszerúségi mérést biztosít. A különböző

alkalmazási igényeknek megfelelően egy regionalizálási probléma további korlátozásokat is tartalmazhat. Ilyen például a fizikai korlát, azaz a régiók határai nem léphetik át a főbb földrajzi jellemzőket, például egy hegységet. A méretkorlátozás megkövetelheti, hogy a keletkező régiók azonos méretűek legyenek, vagy bármely régió nagyobb vagy kisebb legyen, mint egy bizonyos méret. Gyakran meg kell őrizni a politikai határok hierarchiáját is. Korlátozhatjuk az egyes régiók körszerűségi értékének az "ideális" értéktől való eltérését is. Már ebből is látszik, hogy egy tartomány minden igényt kielégítő felosztása rendkívül összetett feladat. Jelen tanulmányban egyelőre néhány kezdeti lépést tettünk meg. Az ilyen irányban történő további kutatásokat a megkezdett vizsgálatok természetes folytatási lehetőségének tartjuk. A témával kapcsolatban ld. még [16], [8].

Előfordulhat, hogy bizonyos helyzetekben szeretnénk megváltoztatni a pontok pozíciójának hatását a mért alakzat körszerűségére. Például szeretnénk, ha az alakzat súlypontjától távol lévő pontok nagyobb hatást gyakorolnának a mért körszerűsége, ily módon csökkentve annak mértékét. Vagy fordítva, csökkenteni szeretnénk a távoli pontok hatását. A módosított módszer mindezt lehetővé teszi számunkra azáltal, hogy figyelembe veszi az alak belsejében lévő pontok relatív pozíciójának hatását a számított körszerűsége. Legyen D egy síkbeli alakzat, amelynek súlypontja egybeesik az origóval. Figyeljük meg, hogy $\eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D) = (\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)) / [\mu_{0,0}(D)]^2$ nem más, mint a D alakzat pontjainak átlagos négyzetes távolsága a D súlypontjától. Minden $(x, y) \in D$ pont $x^2 + y^2$ értékkel járul hozzá a $\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)$ értékéhez. Nyilvánvaló, hogy ha egy (x, y) pont közelebb van a D középpontjához, akkor ez a hatás kisebb. Mivel $C_1(D)$ arányos a $(\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)) / [\mu_{0,0}(D)]^2$ hányados reciprokával, így a D centrumhoz képest kisebb távolsággal rendelkező pontok nagyobb hatást gyakorolnak a D számított körszerűségi mértékére. A következő definíció a $C_1(D)$ körszerűségi mutató egy általánosítását adja meg [20] alapján.

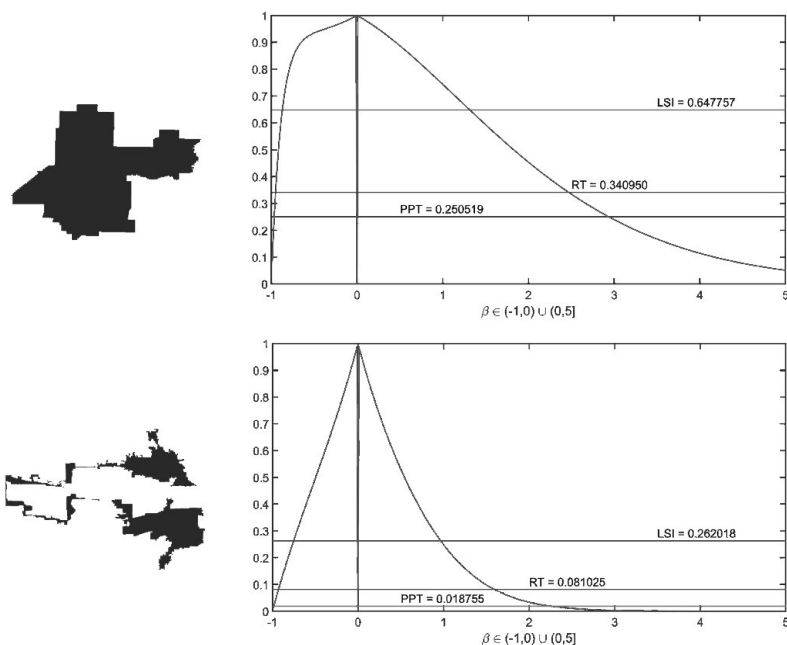
3.2. Definíció. Legyen D egy kompakt síkbeli alakzat, amelynek súlypontja egybeesik az origóval, továbbá β valós szám úgy, hogy $-1 < \beta$, és $\beta \neq 0$. A $C_\beta(D)$ általánosított momentum alapú mértéket az alábbi formulával definiáljuk:

$$C_\beta(D) = \begin{cases} \frac{[\mu_{0,0}(D)]^{\beta+1}}{\pi^\beta(\beta+1) \int \int_D (x^2+y^2)^\beta dx dy}, & \text{ha } \beta > 0, \\ \frac{\pi^\beta(\beta+1) \int \int_D (x^2+y^2)^\beta dx dy}{[\mu_{0,0}(D)]^{\beta+1}}, & \text{ha } \beta \in (-1, 0). \end{cases}$$

A módosított mutató alkalmazásával lehetőségünk lesz befolyásolni azt, hogy a körszerűségi mérték nagyságára mekkora hatást gyakoroljon a határvonal csipkézettsége, amely például sokkal kisebb Arkansas 2/113-as választókerületénél, mint Illinois 4/107-es választókerülete esetén (ld. 2. ábra). Kismértékű deformáció esetén $C_\beta(D)$ értéke enyhén csökken, míg nagymértékű deformáció esetén ez a csökkenés sokkal gyorsabb. Az 2. ábrán látható grafikon jól illusztrálja azt is,

hogy a „tökéletes” körhöz képest nagyon eltérő formájú, szabálytalan formák esetében a nagyon nagy β használata nem ad értelmezhető eredményt, mivel a β növekedésével $C_\beta(D)$ értéke nagyon gyorsan konvergál a nullához. Az említett konvergencia bizonyítását illetően ld. [20].

Az 2. ábrán látható Illinois állam 4-es választókerülete az egyik leghíresebb példa gerrymanderingre. A területéhez képest nagy kerülettel rendelkező alakzat sokkal kevésbé körszerű, mint Arkansas 2-es választókerülete. A Polsby–Popper-teszt ugyan figyelembe veszi a szabálytalan határokat, de ha a határvonal erősen csipkézett, akkor nem ad megbízható eredményt. Az eltérő formák megkülönböztetéséhez különböző β értékek alkalmazása válhat szükségessé. Az ábrán látható, hogy a nevezetes Lee–Sallee-index, Reock- és Polsby–Popper-teszt értékei mind a $\beta \in [1, 3]$ intervallumba esnek. Összességében elmondható, hogy az általunk vizsgált választókerületek esetében 5. fejezet a legjobb választás, ha $\beta \in [1; 3]$, a tapasztalataink szerint a mutatónak itt ideális az érzékenysége az alakzatok csipkézettségére.



2. ábra. Arkansas 2/113-as és Illinois 4/107-es választókerületek általánosított momentum alapú mértékének változása különböző β értékek esetén, összehasonlítva a nevezetes mutatók értékeivel.

4. Az Egyesült Államok néhány választókerületének vizsgálata az általánosított momentum alapú mérték segítségével

Az Amerikai Egyesült Államok 50 tagállamát összesen 435 választókerületre osztották fel, és átlagosan 710 ezer állampolgár tartozik egy kerülethez. Ennek megfelelően 435 képviselői hely található az Egyesült Államok Kongresszusának képviselőházában, amely kétéves ciklusokban ülésezik. A tízévente lebonyolított népszámlálások adatai alapján, az egyes államok választókerületeinek határait átrajzolhatják, esetleg összevonhatnak vagy szétbonthatnak választókerületeket.

Ebben a tanulmányban négy állam választókerületét vizsgáltuk a 107., 108. és 113. kongresszus idején érvényes körzethatárokkal. Ezek az államok, ld. 3. ábra: Arkansas (AR), Iowa (IA), Kansas (KS) és Utah (UT), amelyeknek a lakossága nagyjából hárommillió fő, és a választókerületek száma is hasonló (AR: 4, IA: 5 (4), KS: 4, UT: 3 (4)). A 107. kongresszus 2001. január 3-tól 2003. január 3-ig tartott, ami után, a 108. kongresszusra (2003. január 3. – 2005. január 3.) módosították a vizsgált államok választókerületeinek határát, hasonlóan a 113. kongresszus (2013. január 3. – 2015. január 3.) előtt is újrarajzolták ezeket a határokat, Iowa esetében 5-ről 4-re csökkentve, míg Utah esetében 3-ról 4-re növelve a számukat.

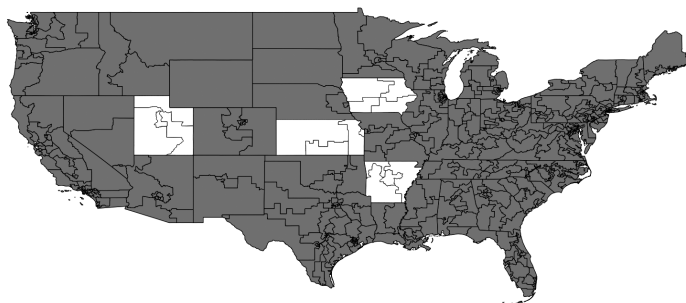
Az Egyesült Államok Legfelsőbb Bírósága deklarálja², hogy a nevezetes körszerűségi mutatók által meghatározni kívánt *kompaktság* (itt annak a mértéke, hogy egy alakzat pontjai mennyire vannak távol a középpontjától), fontos szempont a választókerületek törvényes kialakításánál, amit ezeknek a kiterjedt szakirodalma is alátámaszt. Mivel a földrajzi kompaktság meghatározása nem pontos, ezért is célszerű több mutató használata. Sok esetben *prima facie* sejthető, ha egy körzet valamilyen politikai manipuláció eredménye, jó példa erre a 2. ábrán látható Illinois-beli 4-es választókerület. Ezzel szemben az ideális választókerület alakjának meghatározása nem könnyű. Érdeemes megjegyezni, hogy egy adott párt számára optimális választókerület-szabdalás is nehéz probléma [3].

A 3.2.-ben definiált, a tehetetlenségi nyomatékokra épülő és a képfeldolgozásban is gyakran használt, általánosított momentum alapú mértéket még nem használták választókerületeket alakjának elemzésére. Az eredmények szemléletes bemutatását segíti a szerzők által, Leaflet térinformatikai keretrendszerben készített interaktív térkép [10].

4.1. A mutatók kiszámítása

Az előfeldolgozás során a kiválasztott államok választókerületeinek vektorgrafikus térképét szürkeárnyalatos rasztergrafikus képekké alakítottuk a Quantum GIS alkalmazás segítségével. Így az egyes területeket a pixelek intenzitásértékei alapján lehet megkülönböztetni. A rasztergrafikus képek feldolgozásához MATLAB-ot és a hozzá tartozó Image Processing Toolbox-ot használtuk. Például a 4a. képen látható fehér terület a vizsgált választókerület, a fekete az adott állam többi része,

²Act of Jan. 16, 1901, ch. 93, 31 Stat. 733.



3. ábra. Arkansas, Iowa, Kansas és Utah választókerületei a 113. kongresszus idején érvényes körzethatárokkal.

végül a szürke a szomszédos állam területe. A 4b. képen pedig egy referenciaalakzat található, aminek a meghatározásához szükségünk van a vizsgált választókerület súlypontjának koordinátaíra. Ezek a koordináták a centrális momentumok segítségével könnyen meghatározhatók, ld. 2. fejezet. Tanulmányunkban a kör a referenciaalakzat, ezért a súlypontból, egy sugár mentén kiindulva addig növelünk egy körlapot, amíg ennek területe el nem éri a vizsgált választókerület területét. Ezután a Hu-féle invariáns momentumok már könnyen kiszámíthatók, amik segítségével adódik az általánosított momentum alapú mérték. A nevezetes mutatók kiszámításához csupán az alakzatok területére és kerületére volt szükség.

A probléma általánosításánál, megfelelő adatok birtokában, a pixelek intenzitását feleltethetjük majd meg a népesség eloszlásának, és megvizsgálunk olyan összetettebb referenciaalakzatot is, ami figyelembe veszi az államhatárokat és egyéb földrajzi jellemzőket.



(a) Az algoritmus bemenete



(b) A referenciaalakzat

4. ábra. Az AR01/108 választókerület.

4.2. Eredmények

4.2.1. Az általánosított momentum alapú mérték változása a β paraméter függvényében

Tanulmányunkban a 3.2. definícióban leírt általánosított momentum alapú mértékkel vizsgáltuk a választókerületek alakját. Ennek a mutatónak fontos tulajdonsága, hogy invariáns az eltolásra, forgatásra, skálázásra és figyelembe veszi az alakzat kerületét, sőt a csipkézettségre való érzékenység beállítható a β paraméter segítségével, ld. 2. ábra. További előnye a gyors kiszámolhatósága, szemben más kerület alapú mutatókkal. Vizsgálataink során, három nevezetes mutató értékét is meghatároztuk a kiválasztott államok választókerületein. A Polsby–Popper-tesztet, a Reock-tesztet és a Lee–Sallee-indexet összehasonlítottuk az általánosított momentum alapú mértékkel a $\beta = -0,5; 1; 2; 8$ értékekre.

Ahogy az 5. fejezetben található táblázatokban és az interaktív térképen is látható, a $\beta = -0,5$ paraméterrel a mutató túlságosan érzéketlen a csipkézettségre, míg $\beta = 8$ esetén nagyon érzékennyé válik. Például az 5. ábrán látható két választókerület és a táblázatban található értékek azt mutatják, hogy az általánosított momentum alapú mérték hogyan függ β -tól. Megfigyelhető az is, hogy az 5a. ábrán látható alakzaton a mutató értéke valamivel érzékenyebben változik a β növelésével, mint az 5b.-ben találhatón, mivel ennek határa kevésbé csipkézett.

A vizsgálataink alapján, az általánosított momentum alapú mértéket 1 és 3 közötti β értékkel célszerű használni a választókerületek alakjának elemzésére.

β	$C_\beta(AR02/107)$	$C_\beta(KS04/107)$
-0,5	0,9235	0,9226
1	0,6401	0,6550
2	0,3013	0,3321
8	0,0008	0,0014



(a) Az AR02/113 választókerület



(b) A KS04/107 választókerület

5. ábra. Két választókerület körszerűségének összehasonlítása.

4.2.2. Az általánosított momentum alapú mérték változása a választókerület határának átrajzolásai után

Az időszakok közötti változás vizsgálatához érdemes az államok választókerületeinek átlagát nézni a különböző mértékek szerint. A 4.2.1. alfejezettel összhangban, az általánosított momentum alapú mértéknél a $\beta = 2$ paraméterű mértéket érdemes vizsgálni. Az 5. fejezetben található eredmények alapján, általánosságban elmondható, hogy Arkansas és Utah esetében az összes mutató szerint a 113. időszaki értékek a legrosszabbak. Az általánosított momentum alapú mérték szerint Kansas és Iowa államoknál is ez az időszak a legkedvezőtlenebb. Iowaban és Utahban pedig egyértelműen a 107. időszak volt a legjobb. Kansas esetében, a kis változtatások miatt, a különböző mértékek szerint nagyon eltérő sorrendek alakulnak ki az időszakok között.

A 6. ábrán látható Arkansas állam 3. választókerülete a 107., 108. és 113. kongresszus idején érvényes körzethatárokkal. Megfigyelhető, hogy a 107. és a 108. között javult, majd a 113. időszakra jelentősen romlott a választókerület körszerűsége, és szemmel is látható, hogy az utolsó időszaki határmódosítás gyanút adhat gerrymanderingre.

β	$C_\beta(AR03/107)$	$C_\beta(AR03/108)$	$C_\beta(AR03/113)$
-0,5	0,9404	0,9509	0,5324
1	0,6977	0,7931	0,4008
2	0,3648	0,5351	0,1618
8	0,0012	0,0120	0,0003



(a) AR03/107



(b) AR03/108



(c) AR03/113

6. ábra. Az AR03/03 választókerület a 107., 108. és 113. kongresszus idején érvényes határokkal.

5. Melléklet

Választókerületek	β	C_β 107	C_β 108	C_β 113	LSI 107	LSI 108	LSI 113	RT 107	RT 108	RT 113	PPT 107	PPT 108	PPT 113
1.	-0,5	0,9361	0,9308	0,9059									
	1,00	0,8100	0,8035	0,7159									
	2,00	0,5841	0,5831	0,4115	0,7206	0,7005	0,6316	0,3955	0,4310	0,3003	0,1436	0,1426	0,1051
	8,00	0,0096	0,0168	0,0008									
2.	-0,5	0,9235	0,9235	0,9346									
	1,00	0,6401	0,6403	0,7433									
	2,00	0,3013	0,3016	0,4536	0,5816	0,5819	0,6478	0,3107	0,3106	0,3410	0,2207	0,2212	0,2505
	8,00	0,0008	0,0008	0,0036									
3.	-0,5	0,9404	0,9509	0,5324									
	1,00	0,6977	0,7931	0,4008									
	2,00	0,3648	0,5351	0,1618	0,6192	0,6569	0,2745	0,3281	0,4406	0,2812	0,3266	0,3200	0,1291
	8,00	0,0012	0,0120	0,0003									
4.	-0,5	0,9468	0,9379	0,9307									
	1,00	0,7531	0,7210	0,7215									
	2,00	0,4743	0,4360	0,4361	0,6165	0,5736	0,6293	0,3938	0,3918	0,3855	0,2605	0,2151	0,2685
	8,00	0,0079	0,0065	0,0047									
Átlag	-0,5	0,9367	0,9358	0,8259									
	1,00	0,7252	0,7395	0,6454									
	2,00	0,4311	0,4639	0,3657	0,6345	0,6282	0,5458	0,3570	0,3935	0,3270	0,2378	0,2247	0,1883
	8,00	0,0049	0,0090	0,0024									

3. táblázat. Arkansas

Választókerületek	β	C_{β} 107	C_{β} 108	C_{β} 113	LSI 107	LSI 108	LSI 113	RT 107	RT 108	RT 113	PPT 107	PPT 108	PPT 113
1.	-0,5	0,9437	0,8572	0,8652									
	1,00	0,7900	0,5281	0,5025	0,6552	0,5103	0,4616	0,3882	0,2024	0,2330	0,4031	0,2619	0,2725
	2,00	0,5271	0,1886	0,1855									
	8,00	0,0069	0,0000	0,0001									
2.	-0,5	0,8945	0,9284	0,9189									
	1,00	0,5035	0,7712	0,6594	0,4834	0,6491	0,5410	0,2084	0,4806	0,3716	0,2547	0,3493	0,4024
	2,00	0,1700	0,5335	0,3493									
	8,00	0,0000	0,0193	0,0027									
3.	-0,5	0,8810	0,9266	0,9380									
	1,00	0,5438	0,6827	0,6990	0,4450	0,5564	0,5797	0,2544	0,3404	0,2983	0,3023	0,3218	0,3649
	2,00	0,2240	0,3802	0,3836									
	8,00	0,0001	0,0024	0,0010									
4.	-0,5	0,9477	0,9199	0,9354									
	1,00	0,7582	0,6100	0,7090	0,6095	0,5464	0,6186	0,4280	0,2179	0,3108	0,4680	0,3844	0,2379
	2,00	0,4825	0,2497	0,3930									
	8,00	0,0090	0,0000	0,0012									
5. ^a	-0,5	0,9454	0,8387										
	1,00	0,7285	0,4792		0,6540	0,4269		0,2725	0,2378		0,3231	0,3027	
	2,00	0,3986	0,1728										
	8,00	0,0007	0,0001										
Átlag	-0,5	0,9167	0,9080	0,9144									
	1,00	0,6489	0,6480	0,6425	0,5694	0,5378	0,5502	0,3103	0,2959	0,3034	0,3503	0,3040	0,3195
	2,00	0,3509	0,3380	0,3279									
	8,00	0,0040	0,0054	0,0013									

4. táblázat. Iowa

^a2013 óta ebben az államban már csak 4 választókerület van.

Választókerületek	β	C_{β} 107	C_{β} 108	C_{β} 113	LSI 107	LSI 108	LSI 113	RT 107	RT 108	RT 113	PPT 107	PPT 108	PPT 113
1.	-0,5	0,9499	0,9466	0,9055									
	1,00	0,7337	0,7195	0,6336									
	2,00	0,4302	0,4134	0,3310	0,5990	0,5834	0,5124	0,3867	0,3321	0,3694	0,4312	0,3858	0,3987
	8,00	0,0033	0,0029	0,0018									
2.	-0,5	0,8539	0,8955	0,9010									
	1,00	0,5766	0,6279	0,6088									
	2,00	0,2976	0,3372	0,3051	0,4388	0,4892	0,4819	0,3549	0,3777	0,3322	0,2300	0,2440	0,3362
	8,00	0,0024	0,0032	0,0018									
3.	-0,5	0,9101	0,8760	0,9181									
	1,00	0,7425	0,6781	0,8147									
	2,00	0,4722	0,3756	0,5829	0,6194	0,6102	0,6973	0,3893	0,3330	0,4397	0,3550	0,2861	0,4440
	8,00	0,0048	0,0014	0,0153									
4.	-0,5	0,9226	0,9196	0,8321									
	1,00	0,6550	0,6367	0,4734									
	2,00	0,3321	0,3058	0,1858	0,5486	0,5445	0,3775	0,3455	0,3149	0,3198	0,4673	0,4490	0,3759
	8,00	0,0014	0,0008	0,0004									
Átlag	-0,5	0,9091	0,9094	0,8892									
	1,00	0,6770	0,6655	0,6326									
	2,00	0,3830	0,3580	0,3512	0,5514	0,5568	0,5173	0,3691	0,3394	0,3653	0,3709	0,3412	0,3887
	8,00	0,0030	0,0021	0,0048									

5. táblázat. Kansas

Választókerületek	β	C_{β} 107	C_{β} 108	C_{β} 113	LSI 107	LSI 108	LSI 113	RT 107	RT 108	RT 113	PPT 107	PPT 108	PPT 113
1.	-0,5	0,9191	0,9460	0,7561									
	1,00	0,6290	0,7789	0,3481	0,5058	0,6833	0,2918	0,3386	0,2803	0,2164	0,3196	0,3550	0,2665
	2,00	0,3124	0,4952	0,1002									
	8,00	0,0013	0,0009	0,0000									
2.	-0,5	0,9703	0,9070	0,9500									
	1,00	0,8774	0,6774	0,7945	0,7474	0,5350	0,6470	0,4823	0,3989	0,4708	0,3471	0,3023	0,3375
	2,00	0,6986	0,4025	0,5576									
	8,00	0,0502	0,0074	0,0238									
3.	-0,5	0,8964	0,9043	0,8495									
	1,00	0,8052	0,6489	0,5624	0,7004	0,5681	0,5058	0,5134	0,3109	0,2586	0,3335	0,3034	0,1936
	2,00	0,5866	0,3369	0,2477									
	8,00	0,0297	0,0010	0,0002									
4.^a	-0,5			0,8350									
	1,00			0,5758			0,4898			0,3131			0,2200
	2,00			0,2757									
	8,00			0,0006									
Átlag	-0,5	0,9286	0,9191	0,8477									
	1,00	0,7705	0,7017	0,5702	0,6512	0,5954	0,4836	0,4448	0,3300	0,3147	0,3334	0,3202	0,2544
	2,00	0,5326	0,4115	0,2953									
	8,00	0,0271	0,0031	0,0062									

6. táblázat. Útah

^a2013 óta ebben az államban már 4 választókerület van.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük Tasnádi Attilának a téma felvetését és a szakmai segítséget! A dolgozat elkészítéséhez anyagi támogatást nyújtott az OTKA K-112975 pályázat.

Hivatkozások

- [1] CSETVERIKOV, D.: *Digitális képelemzés alapvető algoritmusai*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar (2014).
- [2] DUSEK, T.: *A megyék és régiók összehasonlítása alakmutatókkal*, Területi Statisztika, Vol. **55** No. **2**, pp. 142-156 (2015).
- [3] FLEINER, B., NAGY, B., AND TASNÁDI, A.: *Optimal partisan districting on planar geographies*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **25** No. **4**, pp. 879-888 (2017).
- [4] FROLOV, Y. S.: *Measuring the Shape of Geographical Phenomena: A History of the Issue*, Soviet Geography, Vol. **16** No. **10**, pp. 676-687 (1975).
- [5] HU, M. K.: *Visual Pattern Recognition by Moment Invariants*, IRE Trans. Information Theory, Vol. **8**, pp. 179-187 (1962).
- [6] KÓCZY, L., BIRÓ, P., AND SZIKLAI, B.: *US vs. European Apportionment Practices: The Conflict between Monotonicity and Proportionality*, Trends in Computational Social Choice, pp. 309-325.
- [7] LEE, D. R. AND SALLEE, G. T.: *A Method of Measuring Shape*, Geographical Review, Vol. **60** No. **4**, pp. 555-563 (1970).
- [8] LI, W., GOODCHILD, M. F., AND CHURCH, R.: *An efficient measure of compactness for two-dimensional shapes and its application in regionalization problems*, International Journal of Geographical Information Science, Vol. **27** No. **6**, pp. 1227-1250 (2013).
- [9] MACEACHREN, A. M.: *Compactness of Geographic Shape: Comparison and Evaluation of Measures*, Geografiska Annaler. Series B, Human Geography, Vol. **67** No. **1**, pp. 53-67 (1985).
- [10] NAGY, B. AND SZAKÁL, S.: *Körszerűségi mutatók - Arkansas, Iowa, Kansas és Utah választókerületei*, Leaflet, URL <http://web.uni-corvinus.hu/~bnagy3/research/circ/map/>.
- [11] NAYAK, A. AND STOJMENOVIC, I.: *Handbook of Applied Algorithms: Solving Scientific, Engineering, and Practical Problems*, Wiley-IEEE, Wiley (2007).
- [12] NIEMI, R. G., GROFMAN, B., CARLUCCI, C., AND HOFELLER, T.: *Measuring Compactness and the Role of a Compactness Standard in a Test for Partisan and Racial Gerrymandering*, The Journal of Politics, Vol. **52** No. **4**, pp. 1155-1181 (1990).
- [13] POLSBY, D. D. AND POPPER, R. D.: *The Third Criterion: Compactness as a Procedural Safeguard against Partisan Gerrymandering*, Yale Law & Policy Review, Vol. **9** No. **2**, pp. 301-353 (1991).

- [14] PUPPE, C. AND TASNÁDI, A.: *Axiomatic Districting*, Social Choice and Welfare, Vol. **44**, pp. 31-50 (2015).
- [15] REOCK, E. C.: *A Note: Measuring Compactness as a Requirement of Legislative Apportionment*, Midwest Journal of Political Science, Vol. **5** No. **1**, pp. 70-74 (1961).
- [16] RICCA, F. AND SIMEONE, B.: *Local search algorithms for political districting*, European Journal of Operational Research, Vol. **189** No. **3**, pp. 1409-1426 (2008).
- [17] SCHWARTZBERG, J.: *Reapportionment, gerrymandering, and the notion of compactness*, Minnesota Law Review, Vol. **50**, pp. 443-457 (1966).
- [18] TASNÁDI, A.: *The political districting problem: A survey*, Society and Economy, Vol. **33**, pp. 543-554 (2011).
- [19] ŽUNIĆ, J.: *Shape Descriptors for Image Analysis*, Zbornik Radova MI-SANU, Vol. **15**, pp. 5-38 (2012).
- [20] ŽUNIĆ, J., HIROTA, K., AND ROSIN, P. L.: *A Hu moment invariant as a shape circularity measure*, Pattern Recognition, Vol. **43** No. **1**, pp. 47-57 (2010).
- [21] YOUNG, H. P.: *Measuring the Compactness of Legislative Districts*, Legislative Studies Quarterly, Vol. **13** No. **1**, pp. 105-115 (1988).



Nagy Balázs 1986-ban született Budapesten. Egyetemi tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetemen alkalmazott matematikus szakon végezte, amivel párhuzamosan a Budapesti Corvinus Egyetemen szerzett alapszakos alkalmazott közgazdaságtan diplomát. 2012-ben kezdte meg tanulmányait a Budapesti Corvinus Egyetem Gazdaságinformatika Doktori Iskolájában, ahol 2015-ben abszolvált.

2013-tól 2015-ig a Tasnádi Attila vezette MTA-BCE "Lendület" Stratégiai Interakciók Kutatócsoport tagja. 2015-től 2019-ig a BCE Matematika Tanszék tudományos segédmunkatársa.

2011-től folyamatosan részt vesz ipari kutatási-fejlesztési projekteketben.

NAGY BALÁZS

Budapesti Corvinus Egyetem
Matematika Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 8.
balazs.nagy3@uni-corvinus.hu

Szakál Szilvia, egyetemi adjunktus, 1999-ben szerzett matematika tanári diplomát a Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Végzése alkalmából a KLTE TTK Kari Tanácsa KLTE TTK Emlékérem kitüntetésben részesítette. 1999-től kezdődően a Debreceni Egyetem Természettudományi Karának matematika PhD képzésén folytatta tanulmányait. 2000-ben elnyerte a Bolyai János Matematikai Társulat "Patai László Alapítvány" díját. PhD-fokozatát a Debreceni Egyetemen szerezte 2013-ban. Tanított a Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézetében, jelenleg pedig a Budapesti Corvinus Egyetem és a Budapesti Gazdasági Egyetem oktatója.

Kutatási területe a differenciálgeometria és alkalmazásai. Szűkebb érdeklődési területe a választási rendszerek matematikája, azon belül a választókerület-szabdalás.

SZAKÁL SZILVIA

Budapesti Corvinus Egyetem
Matematika Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 8.
szakalsz@uni-corvinus.hu

USING HU MOMENT INVARIANTS FOR ANALYZING SHAPE OF CONGRESSIONAL DISTRICTS

BALÁZS NAGY, SZILVIA SZAKÁL

Shape analysis has a special importance in the detection of manipulated redistricting, i.e. gerrymandering. A novel circularity measure based on Hu moment invariants is proposed, whose sensitivity to lacerated borders is adjustable. This paper also examines the shape of Arkansas, Iowa, Kansas, and Utah after redistricting through multiple US Congresses. Our aim is to create a practical method that can efficiently identify gerrymandering.

Keywords: redistricting, gerrymandering, circularity measure, US congressional districts