

HÁLÓZATI MODELL EGYÜTTES CSŐDVALÓSZÍNŰSÉGEK MEGHATÁROZÁSÁRA

BIHARY ZSOLT, NAGY NOÉMI, SIMON L. PÉTER

Bizonyos típusú hitelbiztosítások (BDS) árazásának hálózati modellen alapuló lehetőségét vizsgáljuk. Célunk a BDS veszteségfelületének kiszámítása a biztosítási kosárban szereplő cégek egyedi csődvalószínűségeiből. Bemutatunk egy intenzitás alapú, dinamikus, hálózati modellt, ami jól használható a feladat megoldására. Emellett ismertetésre kerül a gyakran alkalmazott, statikus Gauss-kopula modell is. Megmutatjuk, hogy a két eljárás egymáshoz kalibrálható. A hálózati modell egy közelítő változatával nagyszámú cég esetén is hatékonyan mérhető a rendszerkockázat.

Kulcsszavak: hálózati modell, pénzügyi folyamatok, rendszerkockázat, mulasztási csereügylet, BDS

1. Bevezetés

A pénzügyi piacokon a befektetők számára lehetőség van arra, hogy hitelderivatívák segítségével kötvénykibocsátó cégek nemfizetési kockázata ellen védjék magukat. Ezekre a hitelbiztosításokra abban az esetben van szükség, ha a kötvénykibocsátó cég csődbe menne a futamidő lejáratá előtt. Az egyik legegyszerűbb a mulasztási csereügylet, azaz CDS (credit default swap), ami védelmet nyújt egy kockázatos kötvény vétele esetén. Ennél bonyolultabb biztosítás a basket CDS, azaz BDS (basket default swap), ami több (tipikusan 4-6) különböző cég által kibocsátott kötvény esetén nyújt fedezetet. Aszerint rangsoroljuk a BDS-eket, hogy a kosárban szereplő cégek közül hanyadik cég csődbe menetele után fizet kártérítést: first-to-default (FTD) esetén az első csődbe kerülést állapítják meg kifizetési időpontnak, míg az n -th-to-default (NTD) azt jelenti, hogy a hitelbiztosítás kiírója az n -edik cégbedőlés után fizet csak. A szintetikus CDO (synthetic collateralized debt obligation) termékek esetén a biztosított portfólióban több tucat cég is szerepelhet, és a biztosítás a portfólióvesztés egy szeletére (tranche) vonatkozik. A BDS és CDO tranche ügyleteket korrelációs hiteltermékeknek is nevezik, mivel árazásukhoz elengedhetetlenül fontos modellezni a cégek jövőbeli csődeseményeinek korrelációját.

Cikkünkben BDS ügyletek vizsgálatára koncentrálnak. Az arbitrázsmentes árazás feladata ezeknél a termékeknél tipikusan a következőt jelenti: A kosárban szereplő cégek egyedi csődvalószínűségeit, illetve csődfolyamatait adottnak tekintjük, mivel ezek egyszerűen kalibrálhatóak a cégek piacon megfigyelhető CDS-áraihoz. Az alkalmazott modell korrelációs paramétereit likvid korrelációs termékekből, vagy az árazandó BDS múltbeli áraiból becsüljük. A modell megadja az együttes csődvalószínűségeket. Ezek után kiszámítjuk a BDS úgynevezett veszteségfelületét, azaz meghatározzuk, hogy t idő elteltével mekkora valószínűséggel lesz pontosan i cég csődben. A veszteségfelületből és a BDS ügylet feltételes kifizetéseiből a veszteség jelenértéke számolható, és így beárazhatjuk a terméket.

A korrelációs hiteltermékek modellezése fontos részterülete a pénzügyi irodalomnak, és a befektetési bankok gyakorlatában is komoly szerepet játszik. Többféle modell típust különböztethetünk meg. A statikus modellek nem próbálják a csődeseményeket sztochasztikus folyamattal reprezentálni, hanem minden lehetséges lejáratra külön kalibrálják az együttes csődvalószínűségek rendszerét. Ezek közé tartozik a Gauss-kopula modell [15], aminek különböző változatai a mai napig a legelterjedtebbek a pénzügyi gyakorlatban. A következő fejezetben röviden ismertetjük majd a Gauss-kopula modellt, mivel javasolt modellünket ezzel a standard modellel fogjuk összehasonlítani.

A dinamikus modellek sztochasztikus folyamatot feltételeznek a csődeseményekre. Ezekben belül a strukturális modellek [13] megpróbálják a cégek eszközértékét korrelált módon modellezni, csődesemény akkor következik be, ha az eszközérték egy kritikus szint alá esik.

Az intenzitás alapú, vagy redukált modellek [8, 10, 23] sztochasztikus portfolyamatként reprezentálják a csődeseményeket. Ezekben a modellekben az együttes viselkedést a csődesemények intenzitásának korrelációja ragadja meg, amit egy vagy több közös intenzitásfaktor valószínűleg meg. Ennek közgazdasági interpretációja szerint a cégek mindegyike csatolódik különböző makrofaktorokhoz, így piaci válságok idején sok egyszerre megy csődbe. Matematikai szempontból ezekben a modellekben a közös faktorok egy rögzített értéke mellett a csődesemények feltételesen függetlenek.

A pénzügyi gyakorlat és empirikus tesztek [14] egyaránt azt mutatják, hogy a feltételesen független modellek realisztikus paraméterezése mellett a csődkorrelációk meglehetősen gyengék. Ezért, és intuitív okokból több szerző úgynevezett fertőző modelleket vezetett be. Ezekben egy cég csődje egyéb cégek csődjét indukálhatja akár közvetlenül, akár a csődintenzitások nagymértékű növelésén keresztül. A fertőző modellek lehetnek statikusak [7], illetve dinamikus strukturális alapúak [9]. Egyéb munkák a fertőzéseket a cégek hitelértékelés-migrációjával [11], vagy hálózati modellekkel [1] ragadták meg.

Ebben a munkában egy egyszerű intenzitás alapú modellt mutatunk be, amelyben a csődbe menő cég fertőzése egyéb cégek csődintenzitásainak növelésével terjed a pénzügyi hálózaton. A matematikai modell felépítése során a fertőzés és informá-

cióterjedés hálózati modelljeiből indulunk ki, egy olyan SI (susceptible-infected) dinamikájú modellel, amiben spontán fertőződés is van. A járványterjedés hálózaton széles irodalommal rendelkezik [3, 6, 19], ezen összefoglaló művekben ismertetik a járványterjedés modellezésének lehetőségeit különböző dinamikák mellett. A pontos modell egy sztochasztikus folyamat, amihez kapcsolódóan felírhatóak az ún. alapegyenletek, amelyek egy lineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Ezek az egyenletek kisebb hálózat esetén explicit módon felírhatóak, ezt az eljárást a 3. fejezetben tekintjük át. A klasszikus Gauss-kopula módszerrel szemben megközelítésünk dinamikus és hálózati modellel alapul. Így modellünk betekintést enged az egyes cégek állapotaiba bármely időpillanatban, emellett megvizsgálhatjuk a rendszer viselkedését a hálózat felépítésének függvényében. A 4. fejezetben kidolgozunk egy közelítő eljárást, amelynek segítségével hatékonyan és gyorsan elemezhető sok résztvevős rendszerek viselkedése is. Ennél a módszernél az egyes csúcok állapotának valószínűségeire írunk fel közelítő differenciálegyenleteket lezárás segítségével. Alkalmazásképpen kiszámítjuk és összehasonlítjuk különböző pénzügyi hálózatok rendszerkockázatát.

2. A probléma felvázolása és a Gauss-kopula modell bemutatása

Legyen adva N darab kötvénykibocsátó cég, és tegyük fel, hogy ismerjük valamely T időpontban az egyes cégek csődbe jutási valószínűségeit, jelöljük ezeket \tilde{p}_q -val, $q = 1, \dots, N$, illetve adott még a cégek közötti kapcsolat erőssége is. A kérdés, hogy hogyan lehet ez alapján kiszámítani az együttes csődesélyeket, azaz a $D(i)$ értékeket, amely mennyiségek azt adják meg, hogy mi a valószínűsége, hogy pontosan i darab cég van csődbe a T időpontban, $i = 0, \dots, N$. Ezen $D(i)$ értékek alapján történik a BDS-ek beárazása, de ennek az eljárásnak az ismeretése nem képezi a cikk tárgyát, számunkra csak a $D(i)$ értékek meghatározása a cél. Először a pénzügyi életben használt Gauss-kopula modellt fogjuk röviden bemutatni, majd összevetjük az eredményeit az általunk kínált modellel, és megvizsgáljuk, hogy a két eljárást egymáshoz lehet-e kalibrálni a különböző bemeneti paraméterek megfelelő beállításával.

Reprezentálja $V_q(T)$ standard normális eloszlású valószínűségi változó a q -adik cég (normalizált) eszközértékét a T időpontban, és legyen $B_q(T)$ egy determinisztikus korlát, $q = 1, \dots, N$, $T \in \mathbb{R}_0^+$. Ha az eszközérték a $B_q(T)$ korlát alá esik, akkor a cég csődbe megy, azaz $p_q(T)$, a q -adik cég csődjenek a valószínűsége T -ben:

$$p_q(T) = P(V_q(T) < B_q(T)) = \phi(B_q(T)),$$

ahol ϕ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Az eszközértékek közötti kapcsolat a következőképpen van megadva, rögzített $\rho \in [0, 1]$ korreláció paraméter mellett:

$$V_q = \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1 - \rho}Y_q, \quad q = 1, \dots, N,$$

ahol Z és Y_q , $q = 1, \dots, N$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. (Az eszközértékek közötti kapcsolat időben nem változik.) Ezek alapján $V_q \sim N(0, 1)$, és könnyen látható, hogy bármely két cég közötti korreláció ρ , tehát a ρ értéke adja meg a cégek egymásra hatásának erősségét, ami ebben a modellben minden cég között ugyanakkora, tehát a kapcsolati háló homogén.

Adottak valamely T időpontban az egyes cégek csődjének valószínűségei, azaz a $\tilde{p}_q = p_q(T)$ értékek, $q = 1, \dots, N$, illetve a $\rho \in [0, 1]$ korreláció. A $B_q(T)$ korlátok a T időpontban könnyen visszaszámolhatók a bemeneti adatok alapján: $B_q(T) := \phi^{-1}(\tilde{p}_q)$. Rögzítsünk le egy konkrét $z \in \mathbb{R}$ értéket, és vizsgáljuk $Z = z$ esetén a különböző feltételes valószínűségeket, ugyanis ebben az esetben a V_q változók függetlenek. Ekkor $V_q = \sqrt{\rho}z + \sqrt{1 - \rho}Y_q$, vagyis $V_q \sim N(\sqrt{\rho}z, \sqrt{1 - \rho})$ és

$$p_q(T|Z = z) = P(V_q(T) < B_q(T)|Z = z) = \phi\left(\frac{B_q(T) - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1 - \rho}}\right),$$

ahol $p_q(T|Z = z)$ jelöli a q -adik cég csődjének a valószínűségét t -ben, feltéve, hogy $Z = z$. Ezen értékek függvényében kiszámíthatók a $D(i|Z = z)$ mennyiségek, azaz annak a valószínűsége, hogy pontosan i darab cég van csődben T -ben, feltéve, hogy a Z valószínűségi változó értéke a rögzített z szám. Itt fogjuk kihasználni, hogy mivel a V_q változók függetlenek, így a különböző cégek csődben levésének eseményei függetlenek, tehát szorzatként felírhatóak. Például annak az esélye a $Z = z$ feltétel mellett, hogy 0 darab cég van csődben: $D(0|Z = z) = \prod_{q=1}^N (1 - p_q(T|Z = z))$, illetve a többi $D(i|Z = z)$ feltételes valószínűség is hasonlóan számolható.

Ezek után használjuk a teljes valószínűség tételét folytonos esetben, így megkapjuk a keresett $D(i)$ értékeket, azaz hogy mi a valószínűsége annak, hogy pontosan i cég van csődben a T időpontban:

$$D(i) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(i|Z = z)\varphi(z)dz, \quad i = 0, \dots, N,$$

ahol φ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Érdekes észrevétel, hogy habár a kimeneti adatokat is abban az időpontban kapjuk meg, mint amiben a bemeneti adatokat adtuk meg, a módszer során nem kellett ismerni a T időpontot. Ilyen értelemben a Gauss-kopula módszer statikusnak tekinthető.

3. A hálózati megközelítésen alapuló modell

Most nézzük meg, hogyan lehet ezt a problémát elhelyezni a hálózati modellek világában. Egy természetesen adódó intenzitás alapú hálózati modellt ajánlunk a cégek együttes csődvalószínűségeinek leírására. Ez a modell alkalmas a Gauss-kopula modellel való összevetésre, illetve a rendszerkockázat vizsgálatára, azonban csak kis N -re alkalmazható a nagy számítási igény miatt. A 4.1. részben egy másik módszert kínálunk, ami nagy csúcsszámú hálózatra is alkalmazható.

3.1. A hálózati modell leírása

Egy súlyozott gráffal fogjuk szemléltetni a cégek közötti kapcsolati hálót. A gráf csúcsait tekintjük a cégeknek, míg az egyes csúcsok közötti éleken lévő súly jelzi az adott cégek közötti kapcsolat erősségét. Legyen N a csúcsok száma és bármely csúcs két lehetséges állapotban lehet: S – működő, I – csődbe ment, azaz járványterjedési folyamatként tekintünk a cégek csődbe jutására. Így egy 2^N állapotterű $\mathbf{X}(t), t \in \mathbb{R}_0^+$ Markov-lánchoz jutunk, ahol $\mathbf{X}(t)$ egy olyan valószínűségi változó, mely minden rögzített $t \in \mathbb{R}_0^+$ időpontban megadja, hogy a folyamat melyik állapotban van. Az állapotteret jelöljük \mathcal{S} -sel, és vezessük be az \mathcal{S}^k jelölést a k darab csődöt tartalmazó állapotok részhalmazára, így \mathcal{S}^k elemei: $\{\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \dots, \mathcal{S}_{d_k}^k\}$, ahol $d_k = \binom{N}{k}, k = 0, \dots, N$. Az \mathcal{S}^k halmaz i -edik eleme esetén az \mathcal{S}_i^k állapotban az l -edik csúcs állapotát $\mathcal{S}_i^k(l)$ jelöli.

Feltesszük, hogy kezdetben minden cég működik, és a csődbe menés végleges állapotváltozás, azaz bármely csúcs esetén csak $S \rightarrow I$ átmenet történhet, tehát SI típusú dinamikával dolgozunk. Bármely cég csődbe jutását két tényező befolyásolja: egyrészt minden céghez tartozik egy $\lambda_q \in \mathbb{R}_0^+, q = 1, \dots, N$ spontán csődbe menési ráta, ami a cégek sérülékenységét méri, másrészt a már csődbe jutott cégek hatnak a még működő szomszédaira a gráf $G = ((\omega_{p,q})) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ adjacencia mátrixában tárolt nemnegatív rátákkal, tehát $\omega_{p,q}$ jelentse a p -edik cég hatáserősségét a q -adik cégre, ezt a hatáserősséget élsúlynak is nevezzük a továbbiakban. Az $S \rightarrow I$ átmenetet egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó írja le, aminek a paramétere

$$r_i^k(l) := \lambda_l(1 + \sum_{\{p \in \{1, \dots, N\} | \mathcal{S}_i^k(p)=I\}} \omega_{p,l}), \quad (1)$$

feltéve, hogy $\mathcal{S}_i^k(l) = S$, azaz az l -edik cég még nincs csődbe. Tehát ezzel a rátával kerül az l -edik cég csődbe az \mathcal{S}_i^k állapotban.

A hálózat és a dinamika leírása után felírjuk a folyamatot pontosan modellező 2^N dimenziós alapegyenlet-rendszert, a felírás részletei a [20] cikkben megtalálhatóak. Ehhez vezessük be minden $\mathcal{S}_i^k \in \mathcal{S}^k, i = 1, \dots, d_k, k = 0, \dots, N$ esetén a $H_{\mathcal{S}_i^k}^-$, az „ \mathcal{S}_i^k múltja” halmazt: $H_{\mathcal{S}_i^k}^- := \{h \in \{1, \dots, d_{k-1}\} | \exists! l_h \in \{1, \dots, N\} : \mathcal{S}_i^k(l_h) = I, \mathcal{S}_h^{k-1}(l_h) = S, \mathcal{S}_i^k(m) = \mathcal{S}_h^{k-1}(m), \forall m \neq l_h, m = 1, \dots, N\}$, és a $H_{\mathcal{S}_i^k}^+$, az „ \mathcal{S}_i^k jövője” halmazt: $H_{\mathcal{S}_i^k}^+ := \{j \in \{1, \dots, d_{k+1}\} | \exists! l_j \in \{1, \dots, N\} : \mathcal{S}_i^k(l_j) = S, \mathcal{S}_j^{k+1}(l_j) = I, \mathcal{S}_i^k(m) = \mathcal{S}_j^{k+1}(m), \forall m \neq l_j, m = 1, \dots, N\}$. Tehát az \mathcal{S}_i^k múltja halmaz tartalmazza az összes olyan \mathcal{S}^{k-1} halmazbeli állapot indexét, melyek pontosan egy csúcs állapotában térnek el az \mathcal{S}_i^k állapottól, hiszen csak ilyen állapotok között következhet be közvetlen állapotváltozás. Az \mathcal{S}_i^k jövője halmaz jelentése is értelemszerűen adódik az előbbi alapján.

Jelölje $x_{\mathcal{S}_i^k}(t)$ annak a valószínűségét, hogy a t időpontban a Markov-folyamat az \mathcal{S}_i^k állapotban van. Ekkor az alageyenlet-rendszer alakja:

$$\dot{x}_{\mathcal{S}_i^k}(t) = \sum_{h \in H_{\mathcal{S}_i^k}^-} r_h^{k-1}(l_h) x_{\mathcal{S}_h^{k-1}}(t) - \left(\sum_{j \in H_{\mathcal{S}_i^k}^+} r_i^k(l_j) \right) x_{\mathcal{S}_i^k}(t), \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, d_k, \quad k = 0, \dots, N.$$

Az egyenletrendszerre a kompaktabb $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ alakban is hivatkozhatunk. Az alageyenletek felírását egy 3 csúcsú gráfon szemléltetjük.

3.1. Példa. Legyen $N = 3$. $A = ((\omega_{p,q})) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a gráf adjacencia mátrixa és a λ_q , $q = 1, 2, 3$ értékek a spontán csődbe kerülés rátái. Ekkor az alageyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{SSS}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x_{SSS}(t), \\ \dot{x}_{ISS}(t) &= \lambda_1 x_{SSS}(t) - (\lambda_2(1 + \omega_{1,2}) + \lambda_3(1 + \omega_{1,3}))x_{ISS}(t), \\ \dot{x}_{SIS}(t) &= \lambda_2 x_{SSS}(t) - (\lambda_1(1 + \omega_{2,1}) + \lambda_3(1 + \omega_{2,3}))x_{SIS}(t), \\ \dot{x}_{SSI}(t) &= \lambda_3 x_{SSS}(t) - (\lambda_1(1 + \omega_{3,1}) + \lambda_2(1 + \omega_{3,2}))x_{SSI}(t), \\ \dot{x}_{IIS}(t) &= \lambda_1(1 + \omega_{2,1})x_{SIS}(t) + \lambda_2(1 + \omega_{1,2})x_{ISS}(t) - \lambda_3(1 + \omega_{1,3} + \omega_{2,3})x_{IIS}(t), \\ \dot{x}_{ISI}(t) &= \lambda_1(1 + \omega_{3,1})x_{SSI}(t) + \lambda_3(1 + \omega_{1,3})x_{ISS}(t) - \lambda_2(1 + \omega_{1,2} + \omega_{3,2})x_{ISI}(t), \\ \dot{x}_{SII}(t) &= \lambda_2(1 + \omega_{3,2})x_{SSI}(t) + \lambda_3(1 + \omega_{2,3})x_{SIS}(t) - \lambda_1(1 + \omega_{2,1} + \omega_{3,1})x_{SII}(t), \\ \dot{x}_{III}(t) &= \lambda_3(1 + \omega_{1,3} + \omega_{2,3})x_{IIS}(t) + \lambda_2(1 + \omega_{1,2} + \omega_{3,2})x_{ISI}(t) + \\ &\quad + \lambda_1(1 + \omega_{2,1} + \omega_{3,1})x_{SII}(t). \end{aligned}$$

A rendszer második egyenlete például azt rögzíti, hogy az (ISS) állapotba az (SSS) állapotból juthatunk el spontán csődbemenéssel λ_1 rátával, emellett az (ISS) állapotból kimehetünk $\lambda_2(1 + \omega_{1,2})$ rátával az (IIS) állapotba úgy, hogy vagy a második cég spontán csődbe megy, vagy az első cég csődbe viszi a másodikat, illetve az (ISS) állapotból átmehetünk az (ISI) állapotba úgy, hogy vagy a harmadik cég spontán csődbe megy, vagy az első cég csődbe juttatja a harmadikat $\lambda_3(1 + \omega_{1,3})$ rátával.

3.2. Eljárás a csődvalószínűségek meghatározására a hálózati modell segítségével

Most megmutatjuk, hogy ez a hálózati modell hogyan használható a fent ismertett árazási probléma kezelésére, azaz hogyan lehet eljutni az egyes cégek csődbe menési valószínűségeinek ismeretéből az együttes bedőlési valószínűségekhez. A Gauss-kopula modellben a cégek közötti korrelációt a ρ paraméter adja meg, míg a hálózati modellnél a kapcsolat erősségét a G szomszédási mátrix írja le, jelen esetben $\omega_{q,p} \equiv \omega$, valamely rögzített ω esetén, $p, q = 1, \dots, N$, így megtartva a homogén kapcsolati hálót. Tehát adott a cégek közötti kapcsolat erőssége

ω paraméterrel, illetve adottak a T időpontban az egyes cégek csődbe jutási valószínűségei, azaz a \tilde{p}_q értékek, $q = 1, \dots, N$. Újdonság, hogy ennél a módszernél a T időpontot is pontosan meg kell adni, ellentétben a Gauss-kopula modellel.

Tekintsünk a (2) alapegyenlet-rendszert. A $p_q(t)$ valószínűségek és az egyenlet-rendszer változói között felírható egy egyszerű összefüggés minden $t \in \mathbb{R}_0^+$ esetén:

$$p_q(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{\{i \in \{1, \dots, d_k\} | \mathcal{S}_i^k(q) = I\}} x_{\mathcal{S}_i^k}(t), \quad q = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Ezek a képletek azt fejezik ki, hogy a q -adik cég pontosan akkor van csődbe, ha a folyamat egy olyan állapotban van, ahol a q -adik cég csődbe van, így ezek diszjunkt uniója kiadja a vizsgált eseményt, azaz a valószínűségeik összege megadja a p_q értéket.

Fontos látni, hogy a hálózati modellhez szükséges λ_q spontán bedőlési ráták nincsenek megadva, így először szeretnénk megkapni őket az eddigi információk alapján. Ehhez bevezetjük a következő \mathfrak{F} függvényt:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p_1(T) - \tilde{p}_1 \\ \vdots \\ p_N(T) - \tilde{p}_N \end{pmatrix},$$

ahol $p_q(T)$ jelöli a (3) összefüggéssel megadott függvényeket a T időpontban. Először megoldjuk numerikusan a (2) egyenletrendszert tetszőleges $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ vektor és a kezdetben megadott ω bemeneti paraméter mellett, az $\mathbf{x}(0) = (1, 0, \dots, 0)$ kezdeti feltétellel, azaz a 0 időpontban minden cég működik még. Ezek után kiszámítjuk az egyenletrendszer megoldásainak felhasználásával a (3)-ban megadott p_q valószínűségeket a T időpontban. Azt keressük, hogy mely λ_q értékek mellett vesz fel az \mathfrak{F} függvény nullát. A numerikus tapasztalatok azt mutatják, hogy ezen λ_q értékek egyértelműen meghatározhatóak, azaz a modellünk jól kalibrálható.

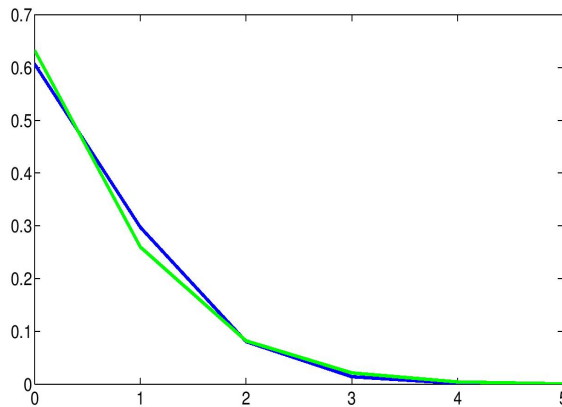
Tehát visszakerestük azokat a λ_q , $q = 1, \dots, N$ értékeket, melyek esetén a T időpontban az egyes cégek bedőlési valószínűségei megegyeznek az előre elvárt \tilde{p}_q értékekkel, $q = 1, \dots, N$. Miután megvannak a megfelelő spontán bedőlési ráták értékei, numerikusan megoldható a (2) alapegyenlet-rendszer és kiszámíthatóak a megoldásfüggvények segítségével az együttes bedőlések valószínűségei:

$$D_i(t) = \sum_{j=1}^{d_j} x_{\mathcal{S}_j^i}(t),$$

ahol $D_i(t)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy i darab cég van csődbe a t időpontban.

Az eljárás bemutatása után szeretnénk a Gauss-kopula és a hálózatos modell eredményeit összevetni azonos bemeneti paraméterek esetén, azonban ez nehézségbe ütközik, mert a cégek közötti kapcsolatokért felelős mennyiségek, a ρ és az ω

viszonya nem ismert. Azonban ezen bemeneti paraméterek megfelelő választásával a két eljárás egymáshoz kalibrálható, azaz a hálózatos modellel kapott $D_i(T)$ értékek jól illeszkednek a Gauss-kopula modell $D(i)$ értékeire, amit az 1. ábrán szemléltetünk. Itt az látható, hogy előre megadott \tilde{p}_q valószínűségek esetén a ρ paraméterhez megválasztható egy olyan ω érték, mely esetén a $D(i)$ és a $D_i(T)$ valószínűségek megfelelően közel vannak egymáshoz. Ez azt mutatja, hogy ez az új módszer is jól használható a feladat kezelésére. A mi modellünk fő előnye, hogy dinamikus, azaz megadja a folyamat összes állapotának valószínűségét minden időpillanatban, szemben a Gauss-kopula modellel, ami csak az együttes csődvalószínűségeket határozza meg, és csak a vizsgált T időpontban. Modellünk így lehetőséget teremt a folyamat mélyrehatóbb vizsgálatára, illetve heterogén kapcsolati hálózattal ellátott hálózat elemzését is lehetővé teszi.



1. ábra. A két módszerrel kapott $D(i)$ és $D_i(T)$ értékek, $i = 0, \dots, 5$, összehasonlítása (zöld görbe: Gauss-kopula modell, kék görbe: hálózati modell). Bemeneti adatok: $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, \tilde{p}_5) = 0.1014 \cdot (1, 1, 1, 1, 1)$, $\omega = 0.35$, $\rho = 0.2$ $T = 1$.

4. A rendszerkockázat mérése a hálózati modell segítségével

A továbbiakban egy új problémával foglalkozunk, kihasználva a hálózati modell nyújtotta előnyöket. Az előbbi modell eredményeként kapott $D_i(t)$ függvények segítségével a pénzügyi élet egy fontos kérdésére is választ találhatunk: hogyan változik a rendszerkockázat az idő függvényében különböző kapcsolati hálókat esetén. Itt megjegyezzük, hogy a rendszerkockázatnak nagyon sokféle értelmezése lehetséges, amelyek számos szakirodalomban megtalálhatóak [18, 5, 4, 21, 16]. Ebben a

munkában a rendszerkockázat alatt a csődök számának várható értékét értjük az idő függvényében, és a következő formulával definiáljuk:

$$K(t) = \sum_{i=1}^N iD_i(t).$$

Sajnos, az ajánlott új eljárás – és így a rendszerkockázat meghatározása – csak kis N esetén működik, ugyanis beleütközünk a szokásos gondba, hogy a 2^N méretű alapegyenlet-rendszer túl nagy számítási igényű. A következő szakaszban egy másik eljárást kínálunk a rendszerkockázat mérésére, mely nagy N -re is alkalmazható.

4.1. A csúcsok szintjén felírt egyenletek

A (2) alapegyenlet-rendszer egyenletei alapján szeretnénk felírni egy kisebb dimenziós közelítő differenciálegyenlet-rendszert, az ún. csúcsok szintjén felírt egyenleteket [22, 19]. A redukált rendszer segítségével kiszámoljuk a rendszerkockázatot, illetve azt tanulmányozzuk, hogy hogyan befolyásolja a gráf struktúrája a rendszerkockázat alakulását különböző, nagy méretű hálózatok esetén.

4.1.1. A modell formalizálása

Vezessünk be néhány új jelölést. Legyen $\langle I_q \rangle(t)$ annak a valószínűsége, hogy a q -adik cég csődben van a t időpontban. Tehát

$$\langle I_q \rangle(t) := \sum_{k=1}^N \sum_{i \in G_q^k(I)} x_{\mathcal{S}_i^k}(t), \quad q = 1, \dots, N,$$

ahol $G_q^k(I) := \{i \in \{1, \dots, d_k\} \mid \mathcal{S}_i^k(q) = I\}$. Emellett használni fogjuk a következő jelöléseket is:

$$\langle S_q \rangle(t) := \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i \in G_q^k(S)} x_{\mathcal{S}_i^k}(t), \quad q = 1, \dots, N,$$

$$\langle S_q I_r \rangle(t) := \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i \in G_{q,r}^k(S,I)} x_{\mathcal{S}_i^k}(t), \quad q = 1, \dots, N, r = 1, \dots, N,$$

a $G_q^k(S) := \{i \in \{1, \dots, d_k\} \mid \mathcal{S}_i^k(q) = S\}$, $G_{q,r}^k(S,I) := \{i \in \{1, \dots, d_k\} \mid \mathcal{S}_i^k(q) = S, \mathcal{S}_i^k(r) = I\}$ jelölések mellett. Tehát $\langle S_q \rangle$ jelöli azon állapotok valószínűségének összességét, melyekben a q -adik csúcs működő cég, illetve $\langle S_q I_r \rangle$ annak a valószínűségét, hogy a q -adik csúcs működik, az r -edik csődben van a

t időpontban. A (2) alapegyenlet-rendszerből kiindulva szeretnénk $\langle I_q \rangle$ -ra felírni egy differenciálegyenlet-rendszert.

A (2) egyenletek teljesülése esetén az $\langle I_q \rangle$ függvényekre fennállnak az alábbi differenciálegyenletek:

$$\langle \dot{I}_q \rangle(t) = \lambda_q \langle S_q \rangle(t) + \sum_{p=1, p \neq q}^N \lambda_q \omega_{p,q} \langle S_q I_p \rangle(t), \quad q = 1, \dots, N. \quad (4)$$

A bizonyítást hosszadalmas technikai részletei miatt itt nem közöljük, az állítást egy későbbi dolgozatban igazoljuk.

Megjegyezzük, hogy ha a kapcsolati háló homogén, és a spontán csődbe jutási ráták is azonosak, azaz $\omega_{p,q} \equiv \omega$, $\lambda_q \equiv \lambda$, $p, q = 1, \dots, N$, valamely ω és λ mellett, akkor a (4) rendszerből levezethető egy pontos átlagoláson alapuló egyenlet az átlagos csődszáma:

$$\langle \dot{I} \rangle(t) = \lambda \langle S \rangle(t) + (N-1)\lambda\omega \langle SI \rangle(t),$$

amennyiben a dinamika SI típusú és az (1) függvénycsaláddal adjuk meg az átmeneti rátákat.

A (4) egyenletrendszer alapján megadunk egy közelítő differenciálegyenlet-rendszert is, melynek megoldásai az $\langle I_q \rangle$ valószínűségeket közelítik.

4.1. ÁLLÍTÁS. Felhasználva az $\langle S_q \rangle = 1 - \langle I_q \rangle$ összefüggést és az $\langle S_q I_r \rangle \approx \langle S_q \rangle \cdot \langle I_r \rangle$ közelítést az egyenletek lezárására, a (4) egyenlet egy közelítését kapjuk. A közelítő egyenletek a következő alakúak:

$$\dot{x}_q(t) = \lambda_q (1 - x_q(t)) \left(1 + \sum_{p=1, p \neq q}^N \omega_{p,q} x_p(t) \right), \quad q = 1, \dots, N, \quad (5)$$

ahol az x_q függvények jelölik a közelítő egyenlet megoldásait.

Bizonyítás. Mivel $\langle I_q \rangle \approx x_q$, $\langle S_q \rangle \approx 1 - x_q$, és $\langle S_q I_p \rangle \approx \langle S_q \rangle \cdot \langle I_p \rangle = (1 - x_q)x_p$, ezért a közelítő differenciálegyenlet-rendszer:

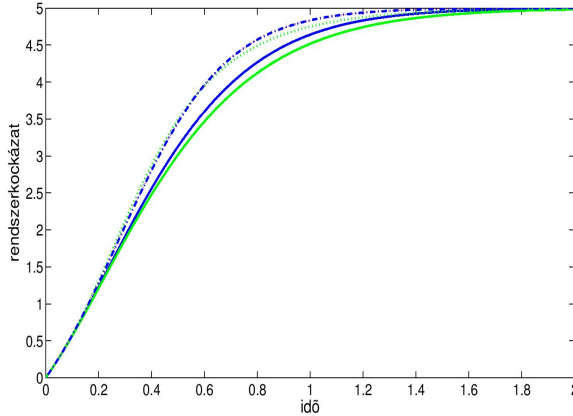
$$\dot{x}_q(t) = \lambda_q (1 - x_q(t)) + \sum_{p=1, p \neq q}^N \lambda_q \omega_{p,q} (1 - x_q(t)) x_p(t).$$

□

Az (5) differenciálegyenlet-rendszer megoldása után a rendszerkockázatot könnyedén számolhatjuk a

$$K(t) = \sum_{q=1}^N x_q(t)$$

képlet segítségével, hiszen x_q közelítőleg meghatározza a q -adik csúcs csődjének a valószínűségét. Az (5) modell előnye, hogy tetszőlegesen nagy N esetén is gyorsan megoldható numerikusan.



2. ábra. Rendszerkockázat az idő függvényében teljes (kék) és csillag (zöld) gráfon a (2) alapegyenletekkel (folytonos) és az (5) modellel (szaggatott görbe), $N = 5$, $\lambda_q = 1$, $\omega = 2$.

A 2. ábrán összevetjük az (2) és a (5) modellek eredményeit egyforma, spon-tán csődbe menési ráták mellett különböző gráftípusokon: teljes és csillag gráfon rögzített összélsúly mellett, tehát ha $\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \omega_{p,q}$ adott. Látható, hogy a rendszerkockázati görbék kvalitatíve nagyon hasonlóak, így az (5) modell alkalmas a (2) rendszer helyettesítésére nagy N esetén. Megjegyezzük, hogy az (5) rendszer ugyanolyan eredményt ad kör- és teljes gráf esetén, míg a (2) modellel különböző rendszerkockázati görbéket kapunk. Ennek magyarázata később található. A következő részben az (5) közelítő rendszer viselkedését vizsgáljuk meg különböző struktúrájú gráfok esetén.

4.1.2. A modell vizsgálata

Ebben a részben egyrészt explicit képletet adunk a rendszerkockázat kiszámítására az (5) rendszer alapján néhány egyszerű esetben, másrészt arra keressük a választ, hogy csökkenthető-e a rendszerkockázat a gráf struktúrájának megfelelő megválasztásával, illetve speciális struktúrájú gráfok esetén hogyan alakul a várhatóan csődbe lévő cégek száma az idő függvényében. Ilyen és ehhez hasonló kérdésekkel gyakorta lehet találkozni az irodalomban, például azzal a felvetéssel is, hogy a hálózat összekapcsoltsága növeli, vagy csökkenti-e a rendszerkockázatot [17]. A tapasztalat azt mutatja, hogy attól függően, hogy a rendszerkockázatot

hogyan definiálják és milyen modellekkel dolgoznak, különböző válaszokat lehet kapni ezekre a kérdésekre [2, 4].

A közelítő egyenletrendszer analízise egyszerű esetekben Először néhány egyszerű megállapítást teszünk, ugyanis ha a cégek sérülékenysége azonos, akkor az (5) differenciálegyenlet-rendszer leegyszerűsödik, így megoldható elemi módszerek segítségével. Két lemmát fogalmazunk meg – melyeket egyszerűségükből adódóan bizonyítás nélkül közlünk – az elsőt homogén, míg a másodikat heterogén kapcsolati háló esetén.

4.1. LEMMA. *Ha $\lambda_q \equiv \lambda$, $\omega_{p,q} \equiv \omega$, $p, q = 1, \dots, N$, valamely λ és ω mellett, és a kezdeti feltétel a szokásos, azaz $x_q(0) = 0$, $q = 1, \dots, N$, akkor az összes cég helyzete ugyanúgy fog alakulni, azaz ilyenkor $x_q(t) = x(t)$ teljesülni fog valamely $x(t)$ függvény esetén. Felhasználva a feltételeket, az (5) differenciálegyenlet-rendszerből egy szétválasztható változójú differenciálegyenlethez jutunk:*

$$\dot{x}(t) = \lambda(1 - x(t))\left(1 + (N - 1)\omega x(t)\right).$$

Melynek megoldása az $x(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett:

$$x(t) = 1 - \frac{\alpha}{e^{t\lambda\alpha} + \alpha - 1}, \text{ ahol } \alpha = 1 + (N - 1)\omega.$$

Ekkor a rendszerkockázat képlete: $K(t) = Nx(t) = N \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{e^{t\lambda\alpha} + \alpha - 1}\right)$.

4.2. LEMMA. *Ha $\lambda_q \equiv \lambda$, $q = 1, \dots, N$, valamely λ mellett, és a kezdeti feltétel $x_q(0) = 0$, $q = 1, \dots, N$, akkor az (5) rendszerből a következő N változós differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk:*

$$\dot{x}_q(t) = \lambda(1 - x_q(t))\left(1 + \sum_{p=1, p \neq q}^n \omega_{p,q}x_p(t)\right), \quad q = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Ha a $\sum_{p=1, p \neq q}^n \omega_{p,q}$ érték, azaz az egy csúcsba befutó súlyok összege független q -től, tehát $\sum_{p=1, p \neq q}^n \omega_{p,q} = B$, minden $q = 1, \dots, N$ esetén, akkor $x_q(t) = y(t)$, $q = 1, \dots, N$ teljesülni fog a (6) rendszer megoldásaira valamely olyan $y(t)$ függvény esetén, melyre

$$\dot{y}(t) = \lambda(1 - y(t))(1 + By(t)),$$

vagyis minden $x_q(t)$ függvényre ugyanazt a megoldást kapjuk: $y(t) = 1 - \frac{1+B}{e^{t\lambda(1+B)} + B}$. Ezek alapján a rendszerkockázat is kiszámítható:

$$K(t) = Ny(t) = N \cdot \left(1 - \frac{1+B}{e^{t\lambda(1+B)} + B}\right). \quad (7)$$

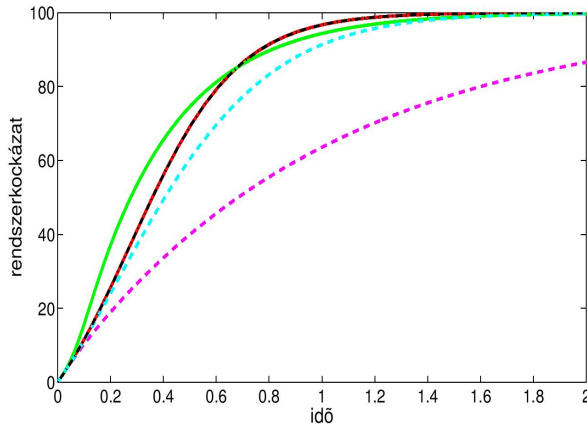
Ezzel magyarázható, hogy ha az összélsúlyt lerögzítjük, akkor például körgráfon és teljes gráfon ugyanazt az eredményt kapjuk, ha az idő függvényében ábrázoljuk a rendszerkockázatot az (5) rendszer alapján.

Speciális struktúrájú gráfok esete Ebben a részben a rendszerkockázati görbe változását követjük nyomon a gráfstruktúra függvényében. Nyilván, ahogy az éleken található összsúlyt növeljük, azaz egyre szorosabb kapcsolatot teszünk fel a cégek között, úgy a rendszerkockázat egyre jobban növekszik, tehát adott idő alatt várhatóan egyre több cég kerül csődbe. Ugyanez mondható el a cégek sérülékenységének növelése esetén. Ezért állandó összsúly és rögzített spontán csődbe menési ráták mellett fogjuk tekinteni a különböző gráftípusokon a rendszerkockázat időbeli lefolyását. A kérdés az, hogy hogyan érdemes beállítani a kapcsolati hálót, hogy minél kisebb legyen a várhatóan csődben lévő cégek száma. A folyamatot speciális struktúrájú irányítatlan gráfokon, azaz teljes, kör- és csillag gráfon, emellett véletlen gráfokon: reguláris, bimodális véletlen gráfon, illetve Barabási–Albert-gráfon [12] is vizsgáljuk. Az összsúly legyen: $\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \omega_{p,q} = 2\omega N$, és $\lambda_q = 1$, $q = 1, \dots, N$, a gráfok struktúrájának megfelelően elosztva az egyes éleken, példaként teljes gráf esetén egy élen $\frac{2\omega N}{N(N-1)} = \frac{2\omega}{N-1}$ súly lesz (mindkét irányban), míg körgráf esetén $\frac{2\omega N}{2N} = \omega$, és csillag gráf esetén $\frac{2\omega N}{2(N-1)} = \frac{\omega N}{N-1}$. A továbbiakban a vizsgálatok során mindig 0 kezdeti csődből indítjuk a folyamatot.

A numerikus eredményekből azt látjuk, hogy az idő függvényében ábrázolt rendszerkockázati görbe nagyon hasonló a vizsgált gráfokon. A homogén súlyozású esetekben, vagyis a teljes és a reguláris véletlen gráfon a rendszerkockázat előáll a (7) képlet alapján, ahol $B = 2\omega$, hiszen ezekben az esetekben az egy csúcstól kiinduló élsúlyok összege állandó. Sőt, még a körgráf rendszerkockázata is egybeesik az előbbiekével, mivel itt is az egy csúcstól befutó súlyok összege független a csúcstól, és ez az érték megegyezik mindhárom gráf esetén. Ezen görbéhez képest elemezzük a többi gráfhoz tartozó rendszerkockázati görbe helyzetét. A folyamat kezdeti szakaszában a heterogén súlyozású gráfok a (7) görbe felett vannak, minél heterogénebb (csillag, majd Barabási–Albert, végül a bimodális gráf), annál inkább felette, majd az idő előrehaladtával a (7) görbe alá mennek (ugyanilyen sorrendben).

A rendszerkockázati görbék hasonlósága arra enged következtetni, hogy irányítatlan gráfok esetén, ha az összsúly fix, akkor a kapcsolati háló speciális beállítással se lehet a rendszerkockázatot látványosan lecsökkenteni. Ez motiválja, hogy megvizsgáljuk ugyanezt a kérdést irányított, speciális struktúrájú gráfok esetén is. Csak néhány jól átlátható esettel foglalkoztunk: körgráf esetén azt vizsgáltuk, amikor a cégek között körbeirányítva mennek az élek, azaz van benne pontosan egy irányított kör. Csillag gráfnál két esetet néztünk meg: az egyik esetben a gráfon minden él egy központi csúcstól felé van befelé irányítva (a továbbiakban becsillag gráfként hivatkozunk rá), a másik esetben pedig kifelé irányítjuk az éleket a központi csúcstól (a továbbiakban ki-csillag gráfként említjük). Természetesen itt is feltettük, hogy az összsúly állandó, és a sérülékenységi rátákat megint rögzítettük.

A 3. ábrán az látható, hogy az irányított körgráfon kapott megoldás a (7) görbét adja $B = 2\omega$ mellett, hiszen itt is az egy csúcstól befutó súlyok összege

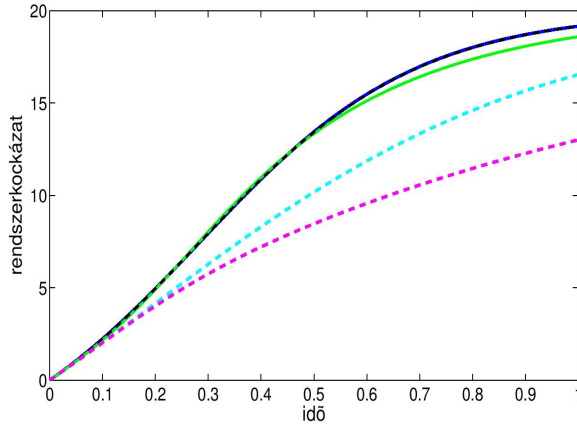


3. ábra. Rendszerkockázat az idő függvényében a (7) egyenletből kapott esetben (piros görbe), csillag gráfon (zöld), irányított kör- (szaggatott fekete), ki-csillag (szaggatott cián) és be-csillag (szaggatott lila) gráfon, $N = 100$, $\lambda_q = 1$, $q = 1, \dots, N$, $\omega = 2$.

csúcsfüggetlen. Az aszimmetria csökkenti a rendszerkockázatot a csillag gráf esetében: ha a középponti csúcs csődje van csak hatással a többi csúcs csődjére, az már érzékelhető csökkenést okoz (ki-csillag), ugyanis csak a középponti csúcs csődje esetén kezd el jelentősen összeomlani a rendszer, de ennek a csúcsnak a csődjét csak a saját spontán csődbe jutási rátája befolyásolja. Ha csak a középponti cég csődjére van hatással a többi periférián található cég, akkor lényegében a külső $N - 1$ cég teljesen független egymástól, csődjüket más cégek összeomlása nem befolyásolja, így ez a gráfstruktúra csökkenti a legjobban a rendszerkockázatot (be-csillag).

Az utolsó vizsgált esetben már nem csak a cégek egymáshoz való viszonya lehet különböző, hanem a különböző cégek sérülékenységi rátája is. Tehát ha egy cég spontán csődbe menési rátája kicsi, az azt jelenti, hogy a cég erős, nehezen kerül csődbe, míg nagy λ_q értékkel szerepelnek a gyenge cégek.

Itt is néhány szélsőséges esetet hasonlítottunk össze: irányítatlan teljes, csillag, illetve irányított kör-, ki-csillag és be-csillag gráfon. A cégek közötti erőviszony: az első cég spontán csődbe menési rátája fele akkora, mint a többi cégnek, tehát az első cég a legerősebb. Ki- és be-csillag gráf esetén az erős cég elhelyezkedése is fontos: ez a cég van közepén. Az összevetésbe néhány irányítatlan gráfot is belevettünk azért, hogy pontosabb kép alakuljon ki az irányított gráfok esetéről. A 4. ábrán látható hogy a teljes, illetve az irányított körgráf majdnem ugyanúgy szerepel, és ők a legrosszabbak rendszerkockázat szempontjából. A ki-csillag gráf esetén a központi erős cég csődje van hatással a periférián lévő gyengébb cégekre, ez tovább csökkenti



4. ábra. Rendszerkockázat az idő függvényében teljes (kék), csillag (zöld), irányított kör- (szaggatott fekete), be-csillag (szaggatott magenta) és ki-csillag (szaggatott cían) gráfon, $N = 20$, $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_q = 1$, $q \neq 1$, $q = 1, \dots, N$, $\omega = 2$.

a rendszerkockázatot az előző esetbeli ki-csillag rendszerkockázatához képest, mert az erős cég működése még stabilabb, mint egyforma λ_q értékek esetén. Ezzel szemben a be-csillag gráfon a központi erős cégre vannak hatással a gyenge cégek, amelyek gyorsabban csődbe kerülnek, így ez növeli kicsit a rendszerkockázatot az előző esetbeli be-csillag gráfon mérthez képest, tehát a ki-csillag és be-csillag gráfok rendszerkockázati görbéi egy erős cég esetén közelednek egymáshoz az egyforma λ_q értékeket megadó esethez képest, de még így is a be-csillag gráf az optimális struktúrájú gráf a kockázat szempontjából.

5. Összefoglalás

Számos modell ismert a pénzügyi piacokon megjelenő különböző problémák kezelésére. Ebben a munkában a hitelbiztosítások árazása, illetve a rendszerkockázat mérése került a figyelem középpontjába. Kidolgoztunk egy hálózati modellen alapuló eljárást ezen feladatok megoldására. Modellünket összevetettük a gyakran alkalmazott Gauss-kopula modell eredményeivel, amiből látható, hogy ez a dinamikus, hálózati modell is alkalmas a számítások elvégzésére. Továbbá a bemutatott eljárás információt ad a rendszer működéséről és az egyes cégek állapotáról minden időpontban, ellentétben a Gauss-kopula modellel, így lehetőséget teremt további vizsgálatokra is, például választ találhatunk arra a kérdésre is, hogy hogyan változik a rendszerkockázat a hálózat felépítésének függvényében. A modell

egy közelítő változatával pedig sokrésztvevős rendszerek esetén is megfigyelhetjük a cégek csődbejutásának folyamatát.

Köszönetnyilvánítás

Simon Péter munkáját az NKFIH K 115926. számú pályázata támogatta.

Hivatkozások

- [1] ACEMOGLU, D., OZDAGLAR, A. AND TAHBAZ-SALEHI, A.: *Systemic risk and stability in financial networks*, American Economic Review, Vol. **105** No. **2**, pp. 564-608 (2015). DOI: [10.1257/aer.20130456](https://doi.org/10.1257/aer.20130456)
- [2] ALLEN, F. AND GALE, D.: *Financial Contagion*, The Journal of Political Economy, Vol. **108** No. **1**, pp. 1-33 (2000). DOI: [10.1086/262109](https://doi.org/10.1086/262109)
- [3] BARRAT, A., BARTHELEMY, M. AND VESPIGNANI, A.: *Dynamical Processes on Complex Networks*, Cambridge University Press, Cambridge (2008). DOI: [10.1017/CBO9780511791383](https://doi.org/10.1017/CBO9780511791383)
- [4] BATTISTON, S., GATTI, D. D., GALLEGATI, M., GREENWALD, B. C. AND STIGLITZ, J. E.: *Liaisons dangereuses: Increasing connectivity, risk sharing, and systemic risk*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. **36** No. **8**, pp. 1121-1141 (2012). DOI: [10.1016/j.jedc.2012.04.001](https://doi.org/10.1016/j.jedc.2012.04.001)
- [5] BOSS, M., ELSINGER, H., SUMMER, M. AND THURNER, S.: *Network topology of the interbank market*, Quantitative Finance, Vol. **4** No. **6**, pp. 677-684 (2004). DOI: [10.1080/14697680400020325](https://doi.org/10.1080/14697680400020325)
- [6] DANON, L., FORD, A.P., HOUSE, T., JEWELL, C.P., KEELING, M.J., ROBERTS, G.O., ROSS, J.V. AND VERNON, M.C.: *Networks and the Epidemiology of Infectious Disease*, Interdisciplinary Perspectives on Infectious Diseases 2011:284909 special issue "Network Perspectives on Infectious Disease Dynamics", (2011). DOI: [10.1155/2011/284909](https://doi.org/10.1155/2011/284909)
- [7] DAVIS, M. AND LO, V.: *Infectious defaults*, Quantitative Finance, Vol. **1** No. **4**, pp. 382-387 (2001). DOI: [10.1080/713665832](https://doi.org/10.1080/713665832)
- [8] DUFFIE, D. AND SINGLETON, K. J.: *Modeling term structures of defaultable bonds*, The Review of Financial Studies, Vol. **12** No. **4**, pp. 687-720 (1999). DOI: [10.1093/rfs/12.4.687](https://doi.org/10.1093/rfs/12.4.687)
- [9] EGLOFF, D., LEIPPOLD, M. AND VANINI, P.: *A simple model of credit contagion*, Journal of Banking & Finance, Vol. **31** No. **8**, pp. 2475-2492 (2007). DOI: [10.1016/j.jbankfin.2006.10.023](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2006.10.023)
- [10] ERRAIS, E., GIESECKE, K., GOLDBERG, L. R.: *Affine Point Processes and Portfolio Credit Risk*, SIAM J. Finan. Math., Vol. **1** No. **1**, pp. 642-665 (2010). DOI: [10.1137/090771272](https://doi.org/10.1137/090771272)
- [11] GIESECKE, K. AND WEBER, S.: *Credit contagion and aggregate losses*, Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. **30** No. **5**, pp. 741-767 (2006). DOI: [10.1016/j.jedc.2005.01.004](https://doi.org/10.1016/j.jedc.2005.01.004)
- [12] GUPTA, A., KING, M. M., MAGDANZ, J., MARTINEZ, R., SMERLAK, M. AND STOLL, B.: *Critical connectivity in banking networks*, SFI Complex Systems Summer School Proceedings, (2013), [http://samoa.santafe.edu/media/cms_page_media/500/Banks_FLreport\(1\).pdf](http://samoa.santafe.edu/media/cms_page_media/500/Banks_FLreport(1).pdf)

- [13] HULL, J. C., PREDESCU, M. AND WHITE, A.: *The Valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model*, J. Credit Risk, Vol. **6** No. **3**, pp. 99-132 (2010). DOI: [10.21314/JCR.2010.112](https://doi.org/10.21314/JCR.2010.112)
- [14] LANDO, D. AND NIELSEN, M. S.: *Correlation in corporate defaults: Contagion or conditional independence?*, Journal of Financial Intermediation, Vol. **19** No. **3**, pp. 355-372 (2010). DOI: [10.1016/j.jfi.2010.03.002](https://doi.org/10.1016/j.jfi.2010.03.002)
- [15] LI, D. X.: *On Default Correlation: A Copula Function Approach*, Journal of Fixed Income, Vol. **9** No. **4**, pp. 43-54 (2000). DOI: [10.3905/jfi.2000.319253](https://doi.org/10.3905/jfi.2000.319253)
- [16] MARTINEZ-JARAMILLO, S., CASTANON, C. L., PÉREZ, O. P., EMBRIZ, F. A. AND DEY, F. L. G.: *Systemic Risk, Stress Testing and Financial Contagion: Their Interaction and Measurement*. BIS CCA Conference, (2010).
- [17] MOZSÁR, N. AND DR. CSÓKA, P.: *Hálózatelméleti modellek a banki rendszerkockázatra*, szakdolgozat, (2015).
- [18] NEMES, B. AND DR. CSÓKA, P.: *A rendszer összekapcsoltságának hatása a rendszerkockázatra*, szakdolgozat, (2012).
- [19] KISS, I. Z., MILLER, J. C. AND SIMON P. L.: *Mathematics of Epidemics on Networks: From Exact to Approximate Models*, Springer (2017). DOI: [10.1007/978-3-319-50806-1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-50806-1)
- [20] SIMON, P. L., TAYLOR, M. AND KISS, I. Z.: *Exact epidemic models on graphs using graph-automorphism driven lumping*, Journal of Mathematical Biology, Vol. **62** No. **4**, pp. 479-508 (2010). DOI: [10.1007/s00285-010-0344-x](https://doi.org/10.1007/s00285-010-0344-x)
- [21] SUMMER, M.: *Banking Regulation and Systemic Risk*, Open Economies Review, Vol. **14** No. **1**, pp. 43-70 (2003). DOI: [10.1023/A:1021299202181](https://doi.org/10.1023/A:1021299202181)
- [22] VAN MIEGHEM, P., OMIC, J. AND KOOLJ, R.: *Virus spread in networks*, Networking, IEEE/ACM Transactions on, Vol. **17** No. **1**, pp. 1-14 (2009). DOI: [10.1109/TNET.2008.925623](https://doi.org/10.1109/TNET.2008.925623)
- [23] WU, J. L. AND YANG, W.: *Pricing CDO tranches in an intensity based model with the mean reversion approach*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. **52** No. **5-6**, pp. 814-825 (2010). DOI: [10.1016/j.mcm.2010.05.012](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.05.012)

(Beérkezett: 2018. február 17.)

BIHARY ZSOLT
 Budapesti Corvinus Egyetem
 Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék
 1093 Budapest, Fővám tér 8.
 bihary0@gmail.com



Nagy Noémi 1985-ben született Budapesten. 2010-ben diplomázott az ELTE alkalmazott matematikus szakán, PhD-fokozatát 2016-ban szerezte meg az Eötvös Loránd Tudományegyetemen az alkalmazott matematika programban Simon Péter témavezetésével. Doktori tanulmányai alatt és utána is részt vett az MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport munkájában. 2019-ig tanársegéd az ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékén, jelenleg a BME Ana-

lízis Tanszékén adjunktus. Kutatási területe hálózati folyamatok modellezése, illetve járványterjedési modellek analitikus és numerikus vizsgálata differenciálegyenletek segítségével. Négy angol nyelvű folyóiratcikke jelent meg, melyek eredményeit előadás, illetve poszter formájában ismertette több konferencián, például az Epidemics on Networks: Current Trends and Challenges konferencián Gironában (2012), vagy a The 20th European Conference on Mathematics for Industry konferencián Budapesten (2018).

NAGY NOÉMI

Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány P. sétány 1/C
MTA-ELTE, Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport
nagynoemi0@gmail.com



Simon Péter 1966-ban született. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus szakán 1990-ben szerzett diplomát, majd 1993-ban egyetemi doktori fokozatot. Mintegy 30 éve az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékének munkatársa, jelenleg tanszékvezető egyetemi tanára. Két évet Nagy-Britanniában, a Leedsi Egyetemen töltött. 2011 és 2014 között az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar Matematikai Intézetének oktatási igazgatóhelyettese, 2017 óta pedig igazgatója. MTA doktori címét 2014-ben szerezte. Kutatási

területe a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete, az utóbbi években hálózati folyamatok vizsgálatával foglalkozik. Két könyv és mintegy 90 tudományos közlemény szerzője. 2015 óta a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára.

SIMON L. PÉTER

Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
1117 Budapest, Pázmány P. sétány 1/C
MTA-ELTE, Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport
simonp@math.elte.hu

NETWORK MODEL FOR JOINED DEFAULT PROBABILITIES

ZSOLT BIHARY, NOÉMI NAGY, PÉTER L. SIMON

We investigate the pricing of multi-name credit derivatives, namely Basket Default Swaps, based on network modeling. The aim of the work is to calculate the loss surface from the individual default probabilities. An intensity-based, dynamical network approach is introduced to handle this problem. We show that the network model yields comparable results to the industry-standard Gauss copula model. Moreover, an approximate network model is formulated to investigate systemic credit risk in large networks.

Keywords: network modeling, credit derivatives, systemic risk, credit default swap (CDS), basket default swap (BDS).

Mathematics Subject Classification (2000): 37N40, 90B15, 62P20, 91B30.