Alkalmazott Matematikai Lapok **37** (2020), 233–245.
DOI: 10.37070/AML.2020.37.2.08

CSŐDSZABÁLYOK PÉNZÜGYI HÁLÓZATOKBAN

CSÓKA PÉTER, KONDOR GÁBOR

A leggyakrabban rendszerkockázat mérésére és kezelésére alkalmazott pénzügyi hálózatokban mindenkinek van egy induló pénzkészlete és minden szereplő tartozhat mindenkinek. Csődszabályok mondják meg, hogy ki hogyan rendezze tartozásait. Az azonos kielégítési szinten lévő feleket legtöbbször követeléseikkel arányosan fizetik ki a csődszabályok, de vannak bonyolultabb konstrukciók is. Mivel a fizetések egymástól függenek, általános esetben fixpontok adják a probléma megoldását. A tanulmányban áttekintjük a csődszabályok szakirodalmát, a legfontosabb definíciókat és eredményeket.

1. Bevezetés

Az elmúlt két évtized során egyre nagyobb figyelmet kaptak a különböző pénzügyi hálózatok, és ezzel együtt a pénzügyi intézmények egyre fokozódó összekapcsoltságából fakadó rendszerkockázat. A rendkívül összetett pénzügyi hálózatokban ugyanis a gyakorlati szakembereknek már nemcsak az intézmények egyedi csődjeivel kellett szembenézniük, hanem a csődök fertőzésszerű továbbterjedésével is.

A gyakorlatban felmerült probléma az elméleti szakemberek érdeklődését is felkeltette, és a kezdeti, főként egy szereplő vagyonának elosztásáról szóló csődproblémáról a többszereplős pénzügyi hálózatok vizsgálatára került át a hangsúly, ahol a csődszabályok mondják meg, hogy ki mennyit fizessen.

A pénzügyi hálózatok elemzése során természetes módon adódott, hogy a kutatók a klasszikus csődproblémák eredményeit megkísérelték kiterjeszteni a komplexebb pénzügyi hálózatokra. Emellett számos kapcsolódó tanulmány foglalkozott magával a pénzügyi hálózat felépítésével és időbeli alakulásával, a rendszerkockázat és a pénzügyi hálózatok kapcsolatával, valamint a rendszerkockázat mérésével.

Tanulmányunkban a 2. fejezetben ismertetjük a legfontosabb cikkeket a csődprobléma témaköréből, és kitekintést adunk a kapcsolódó területekre is. A 3. fejezetben definiáljuk az alapfogalmakat különböző csődszabályok bevezetésén és példákon keresztül, továbbá bemutatunk néhány fontos eredményt. A 4. fejezetben összegzünk.

2. Irodalomáttekintés

Egy férfi fiaira hagyja vagyonát, azonban a követelések összege nagyobb, mint a teljes vagyon értéke. A kérdés az, hogy melyik fiú mekkora részt kapjon az örökségből. Ezzel a problémafelvetéssel foglalkozik O'Neill [18] cikkében, amely analóg az egy pénzügyi szereplő csődje esetén fennálló vagyonelosztási feladattal. Erre a tanulmányra, amely különböző elosztási szabályokat hasonlít össze a vagyon elosztására, a csődproblémák elemzésének kiindulópontjaként tekintenek a szakirodalomban.

A csődproblémákat később kiterjesztették pénzügyi hálózatokra is, amelyekben több szereplő együttes csődje miatt egy sokkal összetettebb problémát kell megoldani. Itt mindenkinek van egy induló pénzkészlete és minden szereplő tartozhat mindenkinek. Pénzügyi hálózatok esetén elosztási szabály helyett csődszabálynak hívjuk azt a függvényt, amely megmondja, hogy ki hogyan rendezze tartozásait, ki mennyit fizessen, vagyis mi legyen a klíringmátrix.

A gyakorlatban legelterjedtebb arányos csődszabályt Eisenberg és Noe [6] definiálja, és a szerzőpáros belátja, hogy bizonyos feltételek esetén mindig létezik klíringmátrix, amely egyértelmű. Az arányos csődszabályt pénzügyi hálózatokban először Csóka és Herings [4] axiomatizálja hat tulajdonság segítségével (magyarul lásd Csóka [3]). A két fő, központi axióma a pártatlanság (impartiality) és az azonos ágensek általi manipulálhatatlanság (non-manipulability by identical agents). A további axiómák a követelések felsőkorlát-jellege (claims boundedness), a korlátolt felelősség (limited liability), a hitelezők elsőbbsége (priority of creditors) és végül a folytonosság (continuity). A szerzők belátják, hogy az axiómák függetlenek, és ezt a hat axiómát csak az arányos csődszabály teljesíti. Az axiómákból három lényegében már az Eisenberg és Noe [6] cikkben is megjelenik: a követelések felsőkorlát-jellege, a korlátolt felelősség és a hitelezők elsőbbsége. Ennek a három axiómának a csődbemenő ágensek legkisebb halmazára gyakorolt hatását vizsgálja Houy, Jouneau és Le Grand [14].

Szintén csődszabályokat vizsgál Groote Schaarsberg, Reijnierse és Borm [12], és belátják, hogy habár a fizetések meghatározása általánosságban nem egyértelmű, az eredményül kapott saját tőke értékek (a végső egyenlegek) igen. Ugyanakkor igazolják, hogy a csődproblémák egy alosztályára (hierarchical mutual liability problems) a fizetések meghatározása is egyértelmű. Továbbá megadják a Talmud szabályon alapuló csődszabály egy karakterizációját. Ide tartozik Koster [16] munkája is, amelyben a szerző megmutatja, hogy általános pénzügyi hálózatokban csak akkor létezik egyértelmű klíringmátrix, ha a csődszabály szigorúan monoton. A csődszabályok kapcsán végül megemlítjük Flores-Szwagrzak, García-Segarra és Ginés-Vilar [10] tanulmányát, amelyben olyan elosztási szabályokat karakterizálnak, amelyek bizonyos hitelezői csoportokat előnyben részesítenek a fizetéseknél.

Az egymással valamilyen szempontból versengő pénzügyi szereplők megléte a játékelméleti megközelítéseket is inspirálta. Pálvölgyi, Peters és Vermeulen [19] a csődjáték egy új nemkooperatív játékelméleti értelmezését elemzi, és a Nash egyensúly létezését és meghatározását vizsgálja az adódó játékokban. Stutzer [22] megpróbálja kiterjeszteni pénzügyi hálózatokra a csődproblémáknál már két klasszikus elosztási szabály igazolására is alkalmazott Nash alkuelméletet (Nash Bargaining theory), és ellenpéldákkal megmutatja, hogy általános esetben nem azokat az elosztási szabályokon alapuló csődszabályokat kapjuk.

A véletlent is tartalmazó tanulmányok közül elsőként Tasnádi [24] munkáját emeljük ki, aki a klasszikus és a probabilisztikus elosztási problémák között teremt kapcsolatot. Pontosabban minden klasszikus elosztási problémához hozzárendel egy minimális varianciájú probabilisztikus elosztási eljárást, amely ugyanarra a várható eloszlásra vezet, mint a klasszikus elosztási módszer. Másodsorban Balog, Bátyi, Csóka, és Pintér [1] tanulmányáról ejtünk szót, akik összefoglalják a sztochasztikusan stabil pénzügyi hálózatokhoz kapcsolódó, általuk legfontosabbnak tartott pénzügyi alkalmazásokat és új modellváltozatokat. Tanulmányukban többek között a rendszerkockázatra és a fertőzésekre helyezik a hangsúlyt. Említést érdemel még továbbá Habis [13] munkája, amely megközelítésében ötvözi mind a játékelméletet, mind a véletlent. A szerző a kooperatív játékelméletből ismert mag egy kiterjesztésével, a gyenge szekvenciális mag segítségével olyan csődhelyzeteket elemez, ahol a felosztandó vagyon értéke és a követelések összege is bizonytalan lehet. Továbbá megvizsgálja, hogy a különböző elosztási szabályok stabil, fenntartható eredményre vezetnek-e egy ilyen környezetben.

A pénzügyi hálózatokkal rendszerkockázati szempontból foglalkozik Lublóy [17], aki a magyar bankközi piacon keresztüli fertőzés kvantitatív mérését végezte el. Elsinger, Lehar és Summer [8] cikkükben Eisenberg és Noe [6] modelljére építve a bankrendszer egészének kockázatát vizsgálják. Az Osztrák bankrendszer adataira alkalmazzák modelljüket, és azt találják, hogy a bankok eszközportfóliói között lévő korreláció a rendszerkockázat legfőbb forrása. Berlinger, Michaletzky és Szenes [2] a magyar fedezetlen bankközi forintpiac hálózatának időbeli alakulását vizsgálta 2002 decemberétől 2009 márciusáig, részletesen elemzik a piac jellemzőit és az egyes szereplők viselkedését. Végül Jackson és Pernoud [15] a rendszerkockázathoz kapcsolódó pénzügyi hálózatok kulcsfontosságú trendjeit és tulajdonságait mutatja be. Egy új hálózati modellt is adnak, amellyel az egymástól való függést modellezik, és a pénzügyi intézmények ösztönzőit vizsgálják a portfólióik kockázatának és a partnereik megválasztása során.

A központosítás szerepével foglalkozik Csóka és Herings [5], akik tanulmányukban bevezetik a decentralizált klíringfolyamatok egy nagy osztályát. Bemutatják, hogy minden ilyen folyamat véges sok lépésben a legkisebb klíringmátrixhoz konvergál. Amikor az elszámolási egység elegendően kicsi, akkor minden decentralizált klíringfolyamat révén közel ugyanazt a saját tőke értéket kapjuk, mint egy centralizált eljárással. Garratt és Zimmerman [11] pedig azt vizsgálja, hogy a pénzügyi hálózatokban milyen hatása van a központi nettósítás bevezetésének a partnerek teljes nettó kitettségére, és megmutatják, hogy ez nem minden esetben előnyös, mert növelheti a varianciát.

Feinstein, Pang, Rudloff, Schaanning, Sturmf és Wildman [9] új aspektusból vizsgálják az arányos csődszabálynál kapott klíringvektort. A szerzők azt elemzik, hogy az mennyire érzékeny a pénzügyi rendszer bilaterális követelések becslési hibáira. A módszerüket európai bankok adatain is alkalmazzák, és azt találják, hogy a zaj a kötelezettségek relatív mértékében a fertőzés kockázatának alulbecslését eredményezheti.

Végül Schuldenzucker, Seuken és Battiston [21] eredményére térünk ki, amelyben a pénzügyi hálózatokat tanulmányozva egy újfajta rendszerkockázatra hívják fel a figyelmet a szerzők. Ez abból az általuk csődbizonytalanságnak (default ambiguity) nevezett szituációból ered, amikor nem lehet eldönteni, hogy mely bankok mennek csődbe. Belátják, hogy ha a bankok CDS-eket (Credit Default Swap) is tarthatnak, akkor a klíringmátrixnak lehet, hogy nincs megoldása, vagy éppen több, egymásnak ellentmondó megoldása van.

3. Jelölések, pénzügyi hálózatok

A legfontosabb jelölések és definíciók bevezetésénél Csóka [3] cikkére támaszkodunk. Egy pénzügyi hálózatot a szereplők vagy más néven az ágensek halmaza, az ágensek induló készletének értéke, valamint az ágensek többi ágenssel szembeni tartozásainak mértéke határoz meg. Ezeket rendre az alábbiak szerint definiáljuk.

Az ágensek halmazát jelölje N, amely a lehetséges ágensek halmazának, $\mathbb{N}$-nek egy részhalmaza, formálisan $N \in \mathcal{N}$, ahol $\mathcal{N}$ az $\mathbb{N}$ nem üres, véges részhalmazainak halmazát jelöli.

Az ágensek *induló készletét (endowments)* a $z \in \mathbb{R}^N_{++}$ vektor adja meg, ahol z_i magában foglalja az i-edik ágens minden eszközét, kivéve a többi ágensre vonatkozó követeléseket.

Végül az ágensek tartozásai az $L \in \mathbb{R}^{N\times N}_+$ *tartozási mátrix (liability matrix)* által adottak, amelyben az L_{ij} elem azt mutatja meg, hogy mekkora az i-edik ágens tartozása a j-edik felé. Az ágensek definíció szerint nem tartozhatnak önmaguknak, így a tartozási mátrix főátlójában nullák szerepelnek, tehát $L_{ii} = 0$, valamint két ágens kölcsönösen tartozhat egymásnak, vagyis $L_{ij} > 0$ és $L_{ji} > 0$ együttes fennállása megengedett.

Ekkor a pénzügyi hálózat az (N, z, L) hármas által adott, az összes pénzügyi hálózat halmazát pedig jelölje $\mathcal{F}$. Azt, hogy adott pénzügyi hálózatban a felmerülő csőd esetén az ágensek mennyit fizetnek egymásnak a $P \in \mathcal{M}(N)$ *fizetési mátrix (payment matrix)* határozza meg, ahol $\mathcal{M}(N)$ jelöli a főátlójukban nullákat, egyébként nem negatív valós számokat tartalmazó négyzetes mátrixok halmazát. A P fizetési mátrix és $i \in N$ ágens esetén jelölje $P_i \in \mathbb{R}^N$ a P mátrix i-edik sorát. Ekkor P_{ij} adja meg az $i \in N$ ágens által a $j \in N$ ágensnek fizetett összeget.

Az $\mathcal{M}(N)$-en értelmezett parciális rendezés, $\leq$ a szokásos módon definiált. Tetszőleges $P, P' \in \mathcal{M}(N)$ mátrixra $P \leq P'$ pontosan akkor, ha $P_{ij} \leq P'_{ij}$ minden

$(i,j) \in N \times N$-re. Az $\mathcal{M}(N)$-beli mátrixok összes véges ágenshalmaz esetén vett uniója legyen $\mathcal{M} = \cup_{N \in \mathcal{N}} \mathcal{M}(N)$.

Az $(N,z,L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózat és a $P \in \mathcal{M}(N)$ fizetési mátrix esetén az $i \in N$ ágens *eszközeinek értéke (asset value)* legyen

$$a_i(N,z,P) = z_i + \sum_{j \in N} P_{ji},$$

amely az induló készlet és a másoktól kapott kifizetések összege. Az eszközök értékéből kivonva az ágens által fizetett összeget, megkapjuk az ágens *saját tőkéjét (equity)*, amely az $i \in N$ ágens esetén legyen

$$e_i(N,z,P) = a_i(N,z,P) - \sum_{j \in N} P_{ij} = z_i + \sum_{j \in N} (P_{ji} - P_{ij}).$$

A saját tőkék összege az összes ágensre megegyezik az induló készletek összegével, így a csődöt követő fizetések csupán átrendezik az összvagyon szereplők közötti eloszlását.

A csődszabályok egy $(N,z,L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózathoz egy $P \in \mathcal{M}(N)$ fizetési mátrixot rendelnek. Gyakorlatilag azt adják meg, hogy az egyes ágensek mekkora összeget fizessenek a többi ágensnek.

3.1. Definíció. A *csődszabály* egy olyan $b : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ függvény, amelynél minden $(N,z,L) \in \mathcal{F}$-re $b(N,z,L) \in \mathcal{M}(N)$.

A pénzügyi hálózatok elemzése azért bonyolult és érdekes, mert körbetartozások lehetnek, és a csőd fertőzéssel terjedhet. Sokkal egyszerűbb a sokat elemzett elosztási problémák családja. Az elosztási problémákban egy $E \in \mathbb{R}_+$ nagyságú vagyont kell felosztani az $N \in \mathcal{N}$ halmazban lévő hitelezők között, akiknek a követelésvektora $c \in \mathbb{R}_+^N$. Elosztási problémák esetén elosztási szabályokat határozunk meg.

Egy *elosztási szabály (division rule)* egy $d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+^N$ függvény, amelyre minden $j \in N$-re $d_j(E,c) \leq c_j$ és $\sum_{j \in N} d_j(E,c) = \min\{E, \sum_{k \in N} c_k\}$ teljesül, továbbá minden $j \in N$-re d_j gyengén növekvő E-ben. Ez rendre annak felel meg, hogy minden ágens legfeljebb a követelése mértékéig részesülhet a vagyonból, továbbá az eredményül kapott részek összege nem haladhatja meg sem a vagyon nagyságát, sem a követelések összegét, és végül, ha nő a szétosztandó vagyon mértéke, akkor a változás után mindenki legalább akkora részt kap, mint amennyit a változás előtt kapott volna. Ezen tulajdonságokból következik, hogy d folytonos (lásd Thomson [25]). Napjainkban talán a legszélesebb körben alkalmazott ilyen szabály az arányos elosztási szabály.

A $d^{\mathrm{a}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+^N$ *arányos elosztási szabály (proportional rule)* a $j \in N$ hitelezőhöz a $d_j^{\mathrm{a}}(E,c)$ összeget rendeli, ahol

$$d_j^{\mathrm{a}}(E,c) = \begin{cases} 0, & \text{ha } c_j = 0, \\ \min\left\{ \frac{c_j}{\sum_{k \in N} c_k} E, c_j \right\}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az arányos elosztási szabály esetén a vagyont a követelések arányában osztják fel, azzal a megkötéssel, hogy senki sem kaphat többet, mint a követelése.

A pénzügyi hálózatokra alkalmazott arányos csődszabály a csődproblémák esetén használt arányos elosztási szabályon alapul. A csődproblémákra alkalmazott elosztási szabályokat Csóka és Herings [4] megközelítése alapján terjesztjük ki pénzügyi hálózatoknál tekintett csődszabályokra. (Lásd még Groote Schaarsberg, Reijnierse és Borm [12] kapcsolódó tanulmányát, melyben a kifizetési mátrixok helyett a saját tőkére helyezik a hangsúlyt.)

3.2. Definíció. A $p : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ függvény *arányos csődszabály*, ha minden $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ hálózathoz a $p(N, z, L) = P$ mátrixot rendeli, ahol P a következő egyenletrendszer megoldása:

$$P_{ij} = d_j^{\mathrm{a}}(a_i(N, z, P), L_i), \quad i, j \in N. \tag{1}$$

A definíciónak megfelelően a pénzügyi hálózatok esetén a p arányos csődszabály az ágensek vagyonának az eszközeik értékét tekinti, majd az arányos elosztási szabállyal elosztja ezt az eszközértéket a tartozásokkal arányosan. Az (1)-es egyenletben az i-edik ágens úgy kezelendő, mint akinek a saját $a_i(N, z, P)$ vagyonára vonatkozóan nincs követelése ($L_{ii} = 0$), így önmagának nem fizet semmit. Használva $d_j^{\mathrm{a}}(a_i(N, z, P), L_i)$ definícióját, megadhatjuk az (1) egyenletrendszert úgy, hogy minden $i, j \in N$ esetén

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } L_{ij} = 0, \\ \min\left\{\frac{L_{ij}}{\sum_{k \in N} L_{ik}} a_i(N, z, P), L_{ij}\right\}, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2}$$

Eisenberg és Noe [6] belátja, hogy a (2)-beli egyenletrendszernek csak egy megoldása van, így a p arányos csődszabály jól definiált.

Az arányos csődszabály illusztrálására tekintsük az alábbi példát Csóka és Herings [4] jelenleg kéziratban lévő átirata alapján.

3.1. Példa. Tekintsük az $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózatot három ágens, $N = \{1, 2, 3\}$ esetén az 1. táblázat első két oszlopában látható induló készletekkel és tartozásokkal. Ekkor a p arányos csődszabály eredményeként kapott P fizetési mátrixot, eszközértékeket és saját tőkét szintén az 1. táblázatban láthatjuk.

Vegyük észre, hogy a 2. ágens már a kiinduló állapotban is csődhelyzetben van, mivel a kötelezettségeit még akkor sem tudja maradéktalanul teljesíteni, ha az összes követelését teljes mértékben kiegyenlítik. Ezzel szemben a 3. ágens fertőzés miatt jut csődbe. Végül a 2. ágens kötelezettségeinek 70%-át, míg a 3. ágens 90%-át tudja megfizetni.

Eisenberg és Noe [6] a (2)-beli egyenletrendszer megoldására a következő algoritmust javasolja. Először tegyük fel, hogy minden ágens kifizeti minden tartozását, vagyis a minimum függvény mindenkinél L_{ij}. Ha így keletkeznek negatív

z	L			P			$a(N,z,P)$	$e(N,z,P)$
10	0	0	0	0	0	0	53	53
19	10	0	30	7	0	21	28	0
24	40	10	0	36	9	0	45	0

1. táblázat. A 3.1. Példának megfelelő induló készletek, tartozások, és a p arányos csődszabály alkalmazásával kapott fizetési mátrix, eszközértékek és saját tőke értékek.

saját tőkéjű ágensek, akkor náluk a minimum függvényt helyettesítsük annak első elemével, ezek a bankok már biztosan csődben lesznek. Ha még így is keletkeznek a fertőzés miatt új negatív saját tőkéjű ágensek, akkor náluk is helyettesítsük a minimum függvényt annak első elemével, és így tovább. Mivel potenciálisan véges új bank mehet csődbe fertőzés miatt, az algoritmus véges lépésben véget ér. Ezt az algoritmust némileg módosítja Elliott, Golub és Jackson [7], valamint Rogers és Veraart [20]. Csóka és Herings [4] egy lineáris programozási feladat megoldásaként kapja a megoldást, ahol a cél az, hogy mindenki minél többet fizessen, korlátolt felelősség mellett.

Az arányos csődszabály egyik lehetséges kiterjesztése az, ha előbb az ágensek páronként nettósítanak, majd az így kapott tartozási mátrixra (ahol minden $i, j \in N$ ágensre fennáll, hogy vagy $L_{ij} = 0$, vagy $L_{ji} = 0$) alkalmazzák az arányos csődszabályt.

3.3. Definíció. A $pna : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$, *páronként nettósító arányos csődszabály* egy olyan függvény, amely minden $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ hálózathoz a $pna(N, z, L)$ fizetési mátrixot rendeli, ahol

$$pna(N, z, L) = \min\{L, L^\top\} + p(N, z, L - \min\{L, L^\top\}). \tag{3}$$

A páronként nettósító arányos csődszabály esetén tehát először a páronként nettósító fizetések történnek meg, majd a maradék tartozásokra alkalmazzák az arányos csődszabályt. Könnyen látható, hogy a páronként nettósító arányos csődszabály, a pna is az $\mathcal{M}(N)$-beli valós számokat tartalmazó fizetési mátrixokra vezet.

Az elosztási szabályok egy másik példája a *korlátos egyenlő díjazás (CEA, constrained equal awards)* elosztási szabály. Ha $E > \sum_{j \in N} c_j$, akkor legyen $\lambda = \max_{j \in N} c_j$. Egyébként legyen $\lambda \in [0, \max_{j \in N} c_j]$ a

$$\sum_{j \in N} \min\{c_j, \lambda\} = E$$

egyenlet egyértelmű megoldása. A CEA elosztási szabály minden $j \in N$ ágenshez a

$$d_j^{\text{cea}}(E, c) = \min\{c_j, \lambda\}$$

összeget rendeli, tehát minden ágens azonos összeget kaphat, de legfeljebb a követelésük mértékéig.

Hasonló módon megadhatjuk a *korlátos egyenlő veszteség (CEL, constrained equal losses)* elosztási szabályt, amely az előző duálisának tekinthető. Ha $E > \sum_{j\in N} c_j$, akkor legyen $\mu = 0$, egyébként pedig legyen $\mu \in [0, \max_{j\in N} c_j]$ az alábbi egyenlet egyértelmű megoldásaként definiálva:

$$\sum_{j\in N} \max\{c_j - \mu, 0\} = E.$$

Ekkor a CEL elosztási szabály a $j \in N$ ágenshez a

$$d_j^{\mathrm{cel}}(E, c) = \max\{c_j - \mu, 0\}$$

összeget rendeli, vagyis minden követelő azonos veszteséggel néz szembe, de legfeljebb a követelésük mértékéig.

Az arányos csődszabálynál látotthoz hasonló módon más elosztási szabályokat is kiterjeszthetünk pénzügyi hálózatokra, ugyanakkor általánosságban véve a kapott fizetési mátrix nem egyértelmű, így a csődszabály megadásánál valamilyen módon ki kell jelölnünk, hogy pontosan melyik fizetési mátrixra gondolunk.

3.4. Definíció. Legyen adott egy $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózat és $(d^i)_{i\in N}$ elosztási szabályok egy rendszere. Ekkor a $P \in \mathcal{M}(N)$ fizetési mátrixot *klíringmátrixnak* (*clearing payment matrix*) nevezzük, ha megoldása az alábbi egyenletrendszernek:

$$P_{ij} = d_j^i(a_i(N, z, P), L_i), \quad i, j \in N.$$

Ha minden ágens az arányos elosztási szabályt alkalmazza, akkor Eisenberg és Noe [6] 2. Tételének következtében a klíringmátrix egyértelmű. Ugyanakkor, ha az ágensek a CEA elosztási szabályt használják, akkor a klíringmátrix már nem feltétlenül egyértelműen definiált.

3.2. Példa. Csóka és Herings [4] alapján tekintsünk egy $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózatot és $(d^i)_{i\in N}$ elosztási szabályokat $N = \{1, 2, 3\}$ három ágenssel, ahol $d^1 = d^2 = d^3 = d^{\mathrm{cea}}$. A 2. táblázat mutatja az induló készleteket, a tartozásokat, a P^- és P^+ legkisebb, illetve legnagyobb klíringmátrixokat, valamint az eredményül kapott eszközértékeket és saját tőkéket.

Az arányos elosztási szabálytól eltérően, általánosságban véve nincs garancia arra, hogy a klíringmátrix a 3.4. Definíciónak megfelelően egyértelműen meghatározott lenne. Ugyanakkor az már teljesül, hogy van egyértelműen meghatározott legkisebb és legnagyobb klíringmátrix.

A háló (*lattice*) egy olyan részbenrendezett halmaz, amelyben bármely két elemnek van szuprémuma és infimuma. A teljes háló (*complete lattice*) egy olyan háló, amelyben bármely nemüres halmaznak van szuprémuma és infimuma. Az alábbi tétel bizonyítása Tarski [23] fixponttételén alapul, és Csóka és Herings [5] diszkrét esetre adott bizonyításának kézenfekvő módosításával igazolható.

z	L			P^-			$a(N,z,P^-)$	$e(N,z,P^-)$	P^+			$a(N,z,P^+)$	$e(N,z,P^+)$
1	0	2	1	0	1	1	2	0	0	2	1	3	0
1	2	0	1	1	0	1	2	0	2	0	1	3	0
1	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	3	3

2. táblázat. A P^- és P^+ klíringmátrixok és az eredményül kapott eszközértékek és saját tőkék a korlátos egyenlő díjazás (CEA) elosztási szabály alkalmazása mellett a 3.2. Példában az $F = (N, z, L)$ pénzügyi hálózatra.

3.1. Tétel. *Tekintsünk egy $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózatot és $(d^i)_{i\in N}$ elosztási szabályokat. A klíringmátrixok halmaza egy teljes háló. Ennek következtében pedig létezik egy P^- legkisebb klíringmátrix és egy P^+ legnagyobb klíringmátrix.*

A pénzügyi hálózatok esetében a csődproblémákra alkalmazott elosztási szabályokon alapuló csődszabályok definiálásához a legnagyobb klíringmátrixot választjuk.

3.5. Definíció. A $b : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ *csődszabály* a $(d^i)_{i\in\mathbb{N}}$ elosztási szabályokon alapul, ha minden $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ esetén teljesül, hogy $b(N, z, L) = P^+$, ahol P^+ a legnagyobb klíringmátrix az (N, z, L) pénzügyi hálózatra és a $(d^i)_{i\in N}$ elosztási szabályokra.

A legnagyobb klíringmátrix választása azért kézenfekvő, mert a korábban említett algoritmusok általánosítása mindig erre vezet. Ugyanakkor elvileg választható lenne a legkisebb klíringmátrix, vagy a legkisebb és a legnagyobb tetszőleges konvex kombinációja is.

A 3.5. Definíció alkalmazásával a *cea* : $\mathcal{F} \to \mathcal{M}$ *korlátos egyenlő díjazás szabály*t kapjuk, ha minden ágens a korlátos egyenlő díjazás elosztási szabályt használja, valamint a *cel* : $\mathcal{F} \to \mathcal{M}$ *korlátos egyenlő veszteség szabály*hoz jutunk, ha minden ágens a korlátos egyenlő veszteség elosztási szabályt alkalmazza. Nem minden pénzügyi hálózatnál tekintett csődszabály alapul elosztási szabályokon. Egy példa erre a korábban megadott páronként nettósító arányos szabály, ahol a kifizetések nem csupán az ágensek eszközértékeitől és tartozásaitól függenek, hanem a többi ágens felé meglévő követeléseitől is.

Habár a klíringmátrixok nem mindig egyértelműek, az eredményül kapott saját tőke értékek azok. A 3.2. Példában megfigyelhetjük, hogy a P^- és P^+ fizetési mátrixok ugyanazokat a saját tőke értékeket eredményezik. Az alábbi tétel Groote Schaarsberg, Reijnierse és Borm [12] eredményének általánosítása. A szerzők azzal a feltételezéssel élnek, hogy minden ágens ugyanazt az elosztási szabályt használja, azonban a bizonyításuk kiterjeszthető arra az esetre is, amikor az ágensek akár különböző elosztási szabályokkal is élhetnek.

3.2. Tétel. *Tekintsünk egy $(N, z, L) \in \mathcal{F}$ pénzügyi hálózatot és $(d^i)_{i\in N}$ elosztási szabályokat. Legyenek P és P' klíringmátrixok. Ekkor minden $i \in N$ esetén $e_i(N, z, P) = e_i(N, z, P')$.*

4. Összefoglalás

A tanulmányban áttekintettük a csődszabályok irodalmát és legfontosabb definícióit. A klasszikus csődproblémák bevezetése után részletesen tárgyaltuk az erre épülő pénzügyi hálózatokat és különböző csődszabályokat.

Kitekintést adtunk a legfontosabb kapcsolódó területekre a játékelmélet, a probabilisztikus problémák, a rendszerkockázat és a központi klíring vonatkozásában.

A további kutatási irányok szerteágazóak. Tovább lehet elemezni az arányos csődszabály már meglévő axiómáit, vagy más axiomatizálást is lehet keresni rá, vagy más csődszabályokra. A rendszerkockázat elemzése dinamikus modellekkel szintén ígéretes.

5. Köszönetnyilvánítás

A kutatás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-4-BCE-17 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai támogatásával készült.

Hivatkozások

[1] Balog, D., Bátyi, T. L., Csóka, P. és Pintér, M.: *Pénzügyi hálózatok modellezése Jackson és Watts (2002) nyomán*, In *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*, pp. 51-168. Aula Kiadó, Budapest (2012). ISBN 978-963-339-018-4

[2] Berlinger, E., Michaletzky, M. és Szenes, M.: *A fedezetlen bankközi forintpiac hálózati dinamikájának vizsgálata a likviditási válság előtt és után*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **3**, pp. 229-252 (2011).

[3] Csóka, P.: *Az arányos csődszabály karakterizációja körbetartozások esetén*, Közgazdasági Szemle, Vol. **64** No. **9**, pp. 930-942 (2017). DOI: 10.18414/KSZ.2017.9.930

[4] Csóka, P. and Herings, P. J.-J.: *An axiomatization of the proportional rule in financial networks*, GSBE Research Memoranda, (001) (2016). DOI: 10.2139/ssrn.2902653

[5] Csóka, P. and Herings, P. J.-J.: *Decentralized clearing in financial networks*, Management Science, Vol. **64** No. **10**, pp. 4681-4699 (2018). DOI: 10.1287/mnsc.2017.2847

[6] Eisenberg, L. and Noe, T. H.: *Systemic risk in financial systems*, Management Science, Vol. **47** No. **2**, pp. 236-249 (2001). DOI: 10.1287/mnsc.47.2.236.9835

[7] Elliott, M., Golub, B. and Jackson, M. O.: *Financial networks and contagion*, American Economic Review, Vol. **104** No. **10**, pp. 3115-53 (2014). DOI: 10.1257/aer.104.10.3115

[8] Elsinger, H., Lehar, A. and Summer, M.: *Risk assessment for banking systems*, Management Science, Vol. **52** No. **9**, pp. 1301-1314 (2006). DOI: 10.1287/mnsc.1060.0531

[9] Feinstein, Z., Pang, W., Rudloff, B., Schaanning, E., Sturm, S. and Wildman, M.: *Sensitivity of the Eisenberg-Noe clearing vector to individual interbank liabilities*, SIAM Journal on Financial Mathematics, Vol. **9** No. **4**, pp. 1286-1325 (2018). DOI: 10.1137/18M1171060

[10] Flores-Szwagrzak, K., García-Segarra, J. and Ginés-Vilar, M.: *Priority and proportionality in bankruptcy*, Social Choice and Welfare, Vol. **54** No. **4**, pp. 559-579 (2020). DOI: 10.1007/s00355-019-01219-0

[11] Garratt, R. and Zimmerman, P.: *Centralized netting in financial networks*, Journal of Banking & Finance, Vol. **112**, paper 105207 (2017). DOI: 10.1016/j.jbankfin.2017.12.008

[12] Groote Schaarsberg, M., Reijnierse, H. and Borm, P.: *On solving mutual liability problems*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. **87** No. **3**, pp. 383-409 (2018). DOI: 10.1007/s00186-017-0621-1

[13] Habis, H.: *Sztochasztikus csődjátékok - avagy hogyan osszunk szét egy bizonytalan méretű tortát?*, Közgazdasági Szemle, Vol. **59** No. **12**, pp. 1299-1310 (2012).

[14] Houy, N., Jouneau, F. and Le Grand, F.: *Defaulting firms and systemic risks in financial networks: a normative approach*, Economic Theory, pp. 1-24 (2019). DOI: 10.1007/s00199-019-01217-4

[15] Jackson, M. O. and Pernoud, A.: *What makes financial markets special? Systemic risk and its measurement in financial networks*, SSRN (2019). DOI: 10.2139/ssrn.3311839

[16] Koster, M.: *A note on uniqueness of clearing prices in financial systems*, SSRN (2019). DOI: 10.2139/ssrn.3427039

[17] Lublóy, Á.: *Dominóhatás a magyar bankközi piacon*, Közgazdasági Szemle, Vol. **52** No. **4**, pp. 377-401 (2005)

[18] O'Neill, B.: *A problem of rights arbitration from the Talmud*, Mathematical Social Sciences, Vol. **2** No. **4**, pp. 345-371 (1982). DOI: 10.1016/0165-4896(82)90029-4

[19] Pálvölgyi, D., Peters, H. and Vermeulen, D.: *A strategic approach to multiple estate division problems*, Games and Economic Behavior, Vol. **88**, pp. 135-152 (2014). DOI: 10.1016/j.geb.2014.09.005

[20] Rogers, L. C. and Veraart, L. A.: *Failure and rescue in an interbank network*, Management Science, Vol. **59** No. **4**, pp. 882-898 (2013). DOI: 10.1287/mnsc.1120.1569

[21] Schuldenzucker, S., Seuken, S. and Battiston, S.: *Default ambiguity: Credit default swaps create new systemic risks in financial networks*, Management Science (2019). DOI: 10.1287/mnsc.2019.3304

[22] Stutzer, M.: *The bankruptcy problem in financial networks*, Economics Letters, Vol. **170**, pp. 31-34 (2018). DOI: 10.1016/j.econlet.2018.05.034

[23] Tarski, A.: *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. **5** No. **2**, pp. 285-309 (1955).

[24] Tasnádi, A.: *On probabilistic rationing methods*, Mathematical Social Sciences, Vol. **44** No. **2**, pp. 211-221 (2002). DOI: 10.1016/S0165-4896(02)00014-8

[25] Thomson, W.: *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*, Mathematical Social Sciences, Vol. **45** No. **3**, pp. 249-297 (2003). DOI: 10.1016/S0165-4896(02)00070-7

Csóka Péter 2003-ban szerzett közgazdász diplomát a Budapesti Corvinus Egyetem jogelődjén. Doktori fokozatát 2008-ban a Maastrichti Egyetemen szerezte. 2008 óta a Budapesti Corvinus Egyetem oktatója és kutatója, 2019 óta egyetemi tanár. 2011 óta a Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont Játékelméleti kutatócsoportjának kutatója. Kutatásaiban elméleti közgazdaságtani módszereket használ befektetések, kockázatkezelés, vállalati pénzügyi kérdések, likviditási problémák és pénzügyi hálózatok vizsgálatára. 12 angol és 10 magyar referált cikk szerzője, jelenleg az MTMT-ben a független hivatkozásainak száma 237, h-indexe 10. 2012 óta az évenként Budapesten megrendezett Annual Financial Market Liquidity Conference egyik főszervezője. 2018 óta a MTA Közgazdaság-tudományi Bizottság, Pénzügytani Albizottságának elnöke. 2019-ben a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület elnökségi tagja lett. 2019-ben Bolyai János kutatási ösztöndíjat nyert.

CSÓKA PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem
1093 Budapest, Fővám tér 8.
peter.csoka@uni-corvinus.hu

Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
Közgazdaság-tudományi Intézet
1097 Budapest, Tóth Kálmán u. 4.
csoka.peter@krtk.mta.hu

Kondor Gábor 2015-ben végzett az ELTE és a Budapesti Corvinus Egyetem közösen indított Biztosítási és Pénzügyi Matematika képzésén, Kvantitatív Pénzügyek szakirányon. Ezután kezdte meg PhD tanulmányait a Budapesti Corvinus Egyetem Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan Doktori Iskolájában, ahol jelenleg doktorjelölt státuszban van. Fő kutatási területei volatilitás-derivatívák árazása és klaszterezési problémák. Három cikk társszerzője. 2015 óta az Annual Financial Market Liquidity Conference konferencia kiadványának szerkesztője.

KONDOR GÁBOR
Budapesti Corvinus Egyetem
1093 Budapest, Fővám tér 8.
gabor.kondor@uni-corvinus.hu

BANKRUPTCY RULES IN FINANCIAL NETWORKS

Péter Csóka, Gábor Kondor

Financial networks are most commonly used for measuring and managing systemic risk. In a financial network, everyone has a cash endowment, and all agents can have liabilities towards other agents. Bankruptcy rules specify how to settle debts. Agents with the same priority are often paid in proportion to their claims, but there are also more complex arrangements. Because payments are interdependent, fixed points generally provide a solution to the problem. This paper reviews the literature on bankruptcy rules, the most important definitions, and the results.