Alkalmazott Matematikai Lapok **37** (2020), 287–301.
DOI: 10.37070/AML.2020.37.2.12

EGY VILLAMOSSÁGTANI PROBLÉMA, MATROIDELMÉLETI MEGOLDÁSSAL ÉS STATIKAI KÖVETKEZMÉNNYEL

PÉTERFALVI FERENC ÉS RECSKI ANDRÁS

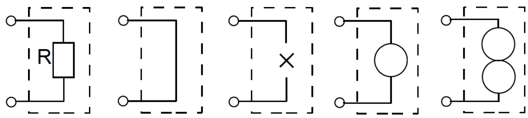
Több mint fél évszázada vetődött fel a probléma, hogyan lehet eldönteni egy n-kapuról, hogy van-e hibrid leírása. A problémát Iri és Tomizawa matroidelméleti eszközökkel még a hetvenes években megoldotta, itt ennek egy természetes általánosítását vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy az általánosabb kérdéshez további – erősebb – matroidelméleti eszközök kellenek, végül megvizsgáljuk, hogy a rúdszerkezetek és a villamos hálózatok közötti régen ismert analógia ebben az esetben milyen statikai kérdéshez vezet.

1. A villamosságtani probléma

A villamos hálózatok alkatrészek összekapcsolásával jönnek létre. A legegyszerűbb alkatrész egy ellenállás (ilyennel lehet modellezni pl. egy izzót vagy egy vasalót); a két végpontja között mérhető u feszültség és a rajta átfolyó i áram közötti kapcsolatot az $u = Ri$ egyenlet (az ún. Ohm-törvény) fejezi ki, ahol az R konstanst az alkatrész ellenállásának nevezzük. Valamivel bonyolultabb, de még jól ismert alkatrész az ideális transzformátor; ha ennek az egyik oldali feszültségét és áramát u_1-gyel, illetve i_1-gyel, a másik oldalit pedig u_2-vel, illetve i_2-vel jelöljük, akkor a négy mennyiség közötti kapcsolatot két egyenlet fejezi ki: $u_2 = ku_1$ és $i_1 = -ki_2$, ahol a k konstanst a transzformátor áttételének nevezzük. Ezek közös általánosításaként vezessük be az alábbi fogalmat:

1.1. Definíció. Lineáris (időinvariáns rezisztív) n-kapunak nevezünk egy olyan alkatrészt, amely n póluspáron („kapun”) keresztül kapcsolódik a külvilághoz és amelyet az $\mathbf{Au} + \mathbf{Bi} = \mathbf{0}$ egyenlet ír le, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $n \times n$-es valós elemű mátrixok, melyekre teljesül az $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = n$ feltétel, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{i}$ pedig n magasságú valós vektorok, melyek elemeit az egyes kapuk feszültségeinek, ill. áramainak fogjuk nevezni.

Így például az 1. ábra első 1-kapuja az $u - Ri = 0$ egyenlettel leírt, korábban már látott ellenállás, a második és a harmadik a „rövidzár” és a „szakadás”, melyek úgy írhatóak le, hogy $u = 0$ (és i tetszőleges), illetve $i = 0$ (és u tetszőleges). Az utolsó két (fiktív) alkatrész az $u = i = 0$ egyenletrendszerrel leírt *nullátor*, illetve az „u is, i is tetszőleges” tulajdonságú *norátor*, ezek a fenti definíció szerint nem tekinthetőek 1-kapunak, mert $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ rangja 2, ill. 0. Az 1.1. Definíció szerinti megadásuk rendre $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (1| - R)$, $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (1|0)$, $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (0|1)$, $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$, illetve az „üres mátrix” (hisz nincs egyenletünk).



1. ábra: Ellenállás, rövidzár, szakadás, nullátor és norátor

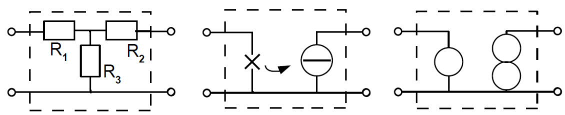
Az $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = n$ rang-feltétel azt jelenti, hogy az $\mathbf{M} = (\mathbf{A}|\mathbf{B})$ mátrix oszlopai közül kiválaszthatunk n darab lineárisan függetlent. Ha véletlenül az $\mathbf{A}$ oszlopai mind függetlenek, akkor az n-kapunak létezik az $\mathbf{u} = \mathbf{Ri}$ *rezisztencia-leírása.* Hasonlóképpen, ha a $\mathbf{B}$ oszlopai függetlenek, akkor létezik az $\mathbf{i} = \mathbf{Gu}$ *konduktancia-leírás.* A fenti példák közül a rövidzárnak csak rezisztencia-leírása, a szakadásnak csak konduktancia-leírása van, míg az ellenállásnak mind a kettő, ha $R \neq 0$.

1.1. Állítás. *Helyezzünk az n-kapu minden kapujára áramforrást. A keletkezett villamos hálózat akkor és csak akkor lesz egyértelműen megoldható (vagyis a keletkező feszültségek akkor és csak akkor lesznek egyértelműen kifejezhetőek ezen áramok lineáris kombinációjaként), ha az n-kapunak létezik rezisztencia-leírása. Hasonlóképp ha minden kapura feszültségforrást helyezünk, akkor a konduktancia-leírás létezése az egyértelmű megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele.*

1.2. Definíció. E két leírásmód közös általánosításaképp tegyük fel, hogy a kapuk $P = \{1, 2, ..., n\}$ halmaza felbontható két diszjunkt $P = P' \cup P''$ részhalmazra úgy, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix P'-nek megfelelő oszlopai és a $\mathbf{B}$ mátrix P''-nek megfelelő oszlopai együtt az $\mathbf{M}$ egy nemszinguláris $n \times n$-es részmátrixát alkossák. Legyen $\mathbf{u}'$ és $\mathbf{u}''$ a P', ill. a P'' kapuk feszültségei által alkotott két vektor és legyen az $\mathbf{i}'$ és az $\mathbf{i}''$ definíciója hasonló. Ekkor az $\mathbf{u}'$ és $\mathbf{i}''$ vektorok egyértelműen előállnak az $\mathbf{u}''$ és $\mathbf{i}'$ függvényeként. Az ilyen $\mathbf{u}' = \mathbf{U}\mathbf{u}'' + \mathbf{R}\mathbf{i}'$, $\mathbf{i}'' = \mathbf{G}\mathbf{u}'' + \mathbf{V}\mathbf{i}'$ előállítást az n-kapu *hibrid leírásának* nevezzük.

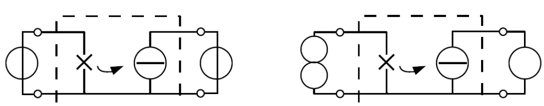
1.2. Állítás. *Akkor és csak akkor létezik a kapuk halmazának olyan $P = P' \cup P''$ partíciója, hogy a P''-kapukra feszültségforrást, a P'-kapukra áramforrást helyezve egyértelműen megoldható hálózatot kapunk (vagyis a P''-kapuk áramai és a P'-kapuk feszültségei akkor és csak akkor lesznek egyértelműen kifejezhetőek a többi mennyiség lineáris kombinációjaként), ha az n-kapunak létezik legalább egy hibrid leírása.*

Ez az állítás különféle lineáris algebrai megfogalmazásokban számos helyen megtalálható az irodalomban [3, 5, 30, 32]. Például a 2. ábra első 2-kapujának létezik rezisztencia-leírása, nevezetesen $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$. Könnyű látni, hogy ha az R_1+R_3, R_2+R_3, $R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3$ mennyiségek egyike sem 0, akkor ennek a 2-kapunak létezik mind a négy hibrid leírása. A második 2-kapu egy feszültségvezérelt áramforrás, melynek konduktancia-leírása $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, és ennek a 2-kapunak más hibrid leírása nem is létezik. A harmadik 2-kapu egy nullátor-norátor pár (amit *nullor*-nak is neveznek [3]), ennek semmilyen hibrid leírása nem létezik, azonban definíciónk szerint ez is 2-kapu az $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ leírással, jóllehet a nullátor és a norátor külön-külön nem tekinthetőek 1-kapunak. (Megjegyezzük, hogy a kapuk halmazának bármely rögzített $P = P' \cup P''$ partíciója esetén nyilván található olyan n-kapu, melynek épp az a hibrid leírása nem létezik. Lehetséges az n-kapukat úgy *parametrizálni,* hogy kivétel nélkül mindegyiknek legyen leírása, de ez nem lineáris algebrai eszközökkel történik [29].)



2. ábra: Egy rezisztív 2-kapu, egy feszültségvezérelt áramforrás és egy nullátor-norátor pár

A fentiek szerint a 3. ábra első hálózata, ahol a 2. ábrán már látott feszültségvezérelt áramforrás mindkét kapujára egy-egy feszültségforrást kapcsoltunk, egyértelműen megoldható, mert a 2-kapunak létezik konduktancia-leírása. Ha a feszültség- és áramforrások más variációját alkalmaznánk, nem jutnánk egyértelműen megoldható hálózathoz. Azonban $g \neq 0$ esetén a 3. ábra második hálózata is egyértelműen megoldható, ahol feszültség- vagy áramforrások helyett egy norátort és egy nullátort kapcsoltunk a kapukra. A 3. ábra két hálózatának közös általánosítása végett bevezetünk egy új fogalmat.



3. ábra: A feszültségvezérelt áramforrás két lehetséges beágyazása

1.3. Definíció. Egy n-kapu *beágyazásának* nevezzük a kapujain értelmezett $E : P \to \{$feszültségforrás, áramforrás, nullátor, norátor$\}$ függvényt. Egy ilyen beágyazás *szabályos,* ha ugyanannyi kapuhoz rendelünk nullátort, mint norátort.

Egy szabályos beágyazás *megengedett*, ha a keletkezett hálózat egyértelműen megoldható. Ilyenkor a nullátoroknak és a norátoroknak ezt a közös számát a megengedett E beágyazás *szingularitási fokának* nevezzük. Az összes megengedett beágyazás szingularitási fokainak halmazát az n-kapu *spektrumának* nevezzük.

1.1. Következmény. *Egy n-kapunak akkor és csak akkor van hibrid leírása, ha létezik* 0 *szingularitási fokú beágyazása, vagyis ha* 0 *eleme a spektrumának.*

Az 1.2. Állítás általánosításához először a kapuk P halmazának az 1.2. Definícióban leírt particionálását kell általánosítanunk. Legyen $P = P_U \cup P_I \cup P_{UI} \cup P_\infty$ a kapuk felosztása olyan diszjunkt, nem feltétlenül nemüres részhalmazokra, ahol P_{UI} és P_∞ elemszáma azonos. Jelölje $\mathbf{u}^{(1)}$ a $P_U \cup P_{UI}$-beli kapuk feszültségeiből képzett vektort és $\mathbf{i}^{(2)}$ a $P_I \cup P_{UI}$-beli kapuk áramaiból képzett vektort. Legyen $\mathbf{u}^{(2)}$ és $\mathbf{i}^{(1)}$ a maradék feszültségek, ill. áramok vektora.

1.3. Állítás. *Az alábbi három állítás ekvivalens minden n-kapura:*

1. *Az $\mathbf{u}^{(2)}$ és $\mathbf{i}^{(1)}$ vektorokat egyértelműen meg lehet határozni az $\mathbf{u}^{(1)}$ és $\mathbf{i}^{(2)}$ ismeretében.*

2. *Az $\boldsymbol{M}$ mátrix azon oszlopai, amelyek a $P_U \cup P_\infty$-beli kapuk áramainak és a $P_I \cup P_\infty$-beli kapuk feszültségeinek felelnek meg, egy nemszinguláris $n \times n$-es részmátrixot alkotnak.*

3. *Megengedett az a beágyazás, amely a P_U-kapukhoz feszültségforrást, a P_I-kapukhoz áramforrást, a P_{UI}-kapukhoz nullátort és a P_∞-kapukhoz norátort rendel.*

A 3. ábra szemlélteti, hogy a feszültségvezérelt áramforrás spektruma $\{0, 1\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2. ábra első 2-kapujának mindig van 0 szingularitási fokú beágyazása, 1 szingularitási fokú pedig akkor és csak akkor, ha $R_3 \neq 0$. További példák az $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ mátrixszal megadott 3-kapu, valamint az [5] cikkben szereplő 4-kapu, melynek mátrixa $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Az előbbinek a spektruma $\{1\}$; két megengedett beágyazása van, nevezetesen $E(3)$ mindenképp nullátor, de vagy $E(1)$ áramforrás és $E(2)$ norátor, vagy $E(1)$ norátor és $E(2)$ feszültségforrás. Az utóbbinak a spektruma $\{1,\ 2\}$; négy megengedett beágyazása van, ugyanis $E(1)$ mindenképp norátor és $E(2)$ mindenképp nullátor lesz, de a 3. és a 4. kapura vagy egy feszültség- és egy áramforrást kell kötnünk (tetszőleges sorrendben), vagy egy nullátort és egy norátort (szintén tetszőleges sorrendben).

Nyilván minden n-kapu spektruma a $\{0, 1, \ldots, m\}$ halmaz nemüres részhalmaza, ahol m-mel $n/2$ alsó egészrészét jelöltük. Az n-kapu összes lehetséges beágyazásainak száma 4^n, ezek közül a szabályosaké csak $\sum_{d=0}^{m} \binom{n}{d} \binom{n-d}{d} 2^{n-2d}$. Mivel a szabályos beágyazások az $\mathbf{M}$ maximális $n \times n$-es részmátrixainak felelnek meg, adódik, hogy a szumma értéke $\binom{2n}{n}$.

A nullátorok és norátorok fogalmát Carlin vezette be [3] és Oono [19] vetette fel, hogy mely n-kapuknak létezik legalább egy hibrid leírása. Természetesen egy adott $\mathbf{M}$ mátrix esetén ez elvben eldönthető mind a 2^n lehetséges partíció végigpróbálásával (minden esetben egy-egy $n \times n$-es részmátrix szingularitását kell vizsgálni), de – mint ezt a következő szakaszban látni fogjuk – létezik polinom idejű algoritmus is (Iri és Tomizawa, [11]). Ennek természetes általánosításaként kérdezhetjük, mi az egész spektrum meghatározásának a bonyolultsága.

2. A matroidelméleti megoldás

Iri és Tomizawa [11] fent említett eredményéhez matroidelméleti eszközökkel juthatunk el. Az $\mathbf{M}$ mátrix meghatároz egy $\mathcal{M}$ matroidot az oszlopvektorainak S halmazán. Definiáljunk ugyanezen az S halmazon egy másik $\mathcal{N}$ matroidot is, melyben egy részhalmaz akkor és csak akkor független, ha az $\{u_1, i_1\}, \{u_2, i_2\}, \ldots, \{u_n, i_n\}$ párok mindegyikét legfeljebb egy elemben metszi. Vegyük észre, hogy ez épp egy partíciós matroid [22].

2.1. Állítás. *(Iri és Tomizawa [11]) Az $\mathbf{M}$ által meghatározott n-kapunak akkor és csak akkor létezik hibrid leírása, ha ennek a két matroidnak létezik közös bázisa, ez pedig polinom idő alatt ellenőrizhető [6].*

Jegyezzük meg, hogy mai szemmel ez az állítás teljesen kézenfekvő, de a hetvenes évek elején egyike volt annak a néhány eredménynek [11, 18, 22], amelyek felhívták a figyelmet a matroidok műszaki területeken való alkalmazhatóságára.

2.2. Állítás. *[28] Általánosabban a mátrixával adott n-kapu spektruma polinom idő alatt meghatározható.*

A bizonyítás három részből áll. Iri és Tomizawa eredményének kézenfekvő módosításával belátható, hogy ha a két fenti matroidnak nincs közös bázisa (amely esetben a matroid-metszet algoritmus egy maximális méretű közös független X halmazt talál), akkor a spektrum legkisebb értéke $n - |X|$. Frank András egy javító utas algoritmussal [8] tetszőleges matroidokra bebizonyította, hogy ha a spektrum egynél több elemet tartalmaz, akkor mindig szomszédos egészek halmaza. Így csak a spektrum legnagyobb értékét kell meghatároznunk. Ez viszont nem más, mint annak a maximuma, hogy az $\{u_1, i_1\}, \{u_2, i_2\}, \ldots, \{u_n, i_n\}$ párok közül hányat tartalmazhat egy $\mathcal{M}$-beli független halmaz. Ez a kérdés tetszőleges matroidok körében nem válaszolható meg polinom idő alatt, ld. [12, 16], de létezik hatékony algoritmus [15], ha az $\mathcal{M}$ reprezentálva van a valós test felett, márpedig esetünkben épp az $\mathbf{M}$ mátrix adja ezt a reprezentációt.

3. A kapcsolódó statikai kérdés

Egy n pontú, e élű egyszerű gráfot elképzelhetünk síkbeli rúdszerkezetként, melyben az élek merev rudaknak, a pontok gömbcsuklóknak felelnek meg. Intuíciónk alapján érezzük, hogy pl. a 3 hosszú körnek megfelelő rúdszerkezet merev lesz, a 4 hosszú körnek megfelelő szerkezet deformálható, de merevvé tehetjük egy átló hozzávételével.

A pontos definíció érdekében jelölje (x_i, y_i) az i-edik csukló helykoordinátáit; ekkor a gráf i-edik és j-edik pontja közötti élnek megfelelő rúd azt jelenti, hogy az $((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2}$ távolság állandó marad a rúdszerkezet mozgása során. Ezeknek az egyenleteknek a négyzetre emelésével, az idő szerinti deriválásával, majd 2-vel való osztásával nyerjük az $(x_i - x_j)(x'_i - x'_j) + (y_i - y_j)(y'_i - y'_j) = 0$ egyenleteket. Ezeket együtt egy $\mathbf{Wz} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerként tekinthetjük, ahol $\mathbf{z}$ elemei az $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ mennyiségek (a csuklók sebességkoordinátái) és az $e \times 2n$ méretű $\mathbf{W}$ mátrixnak a sorai a gráf éleinek felelnek meg: a gráf i-edik és j-edik pontja közötti élnek megfelelő sor i-edik eleme $x_i - x_j$, j-edik eleme $x_j - x_i$, $(n+i)$-edik eleme $y_i - y_j$, $(n+j)$-edik eleme $y_j - y_i$, az összes többi eleme 0 lesz.

Ha az egész rúdszerkezet deformáció nélkül, merev testként mozog, akkor a csuklók sebességkoordinátái kielégítik ezt az egyenletrendszert. A síkban ezek a mozgások (eltolások, forgatások) a $2n$-dimenziós térnek egy 3-dimenziós alterét alkotják. Így $r(\mathbf{W}) \le 2n - 3$ mindig teljesül; akkor tekintünk *merevnek* egy rúdszerkezetet, ha $r(\mathbf{W}) = 2n - 3$.

Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban (ld. pl. [10]) ezt a fogalmat infinitezimális merevségnek nevezik, más merevségi fogalmak is ismeretesek.

A korábban említett rúdszerkezet esetén, amelynek gráfja egy 4 hosszú kör volt, az egyenletrendszer mátrixa

$$\mathbf{W} =$$
$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & y_1 - y_2 & y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_3 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - x_4 & x_4 - x_3 & 0 & 0 & y_3 - y_4 & y_4 - y_3 \\ x_1 - x_4 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & y_1 - y_4 & 0 & 0 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}$$

Ennek rangja legfeljebb 4 (vagyis kisebb, mint $2 \cdot 4-3$), tehát a rúdszerkezet biztosan nem merev. A továbbiakban tekintsünk el az olyan „elfajuló” esetektől, amikor a 4 csukló közül valamelyik 3 „véletlenül” egy egyenesre esik (mert akkor a csukló-koordináták közötti algebrai kapcsolat csökkentené a rangot), így a mátrix rangja ténylegesen 4 lesz. Vizsgáljunk meg néhány példát, hogy mely oszlopnégyesek elhagyásával kapunk nemszinguláris mátrixot.

(a) Hagyjuk el az 1., 3., 5. és 7. oszlopokat – ez annak felel meg, hogy egyértelműen meghatározható-e minden más sebességkoordináta, ha megadjuk az x_1', x_3', y_1', y_3' mennyiségek értékét. Legyen ez a négy érték 0, ez fizikailag annak felel meg, hogy az 1. és 3. csuklót *leszúrjuk*, hisz sem x, sem y irányban nem mozdulhatnak el. Ilyenkor a maradék két csukló sem mozdulhat el.

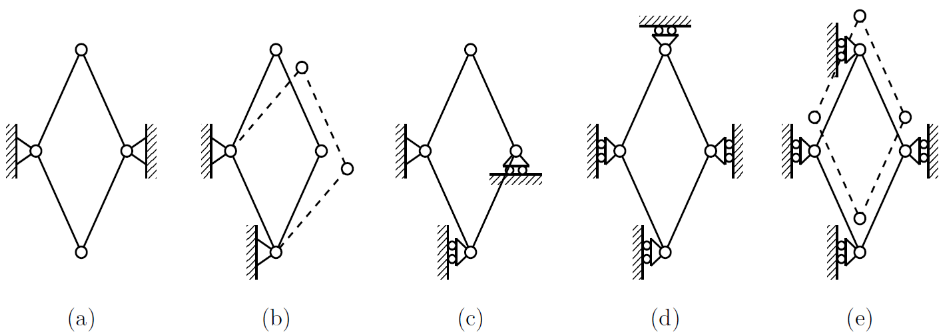
(b) Nem kapnánk viszont nemszinguláris mátrixot, ha az 1., 2., 5. és 6. oszlopokat hagynánk el, hisz a fentiekhez hasonlóan ez annak felelne meg, hogy az 1. és 2. (tehát két szomszédos) csuklót szúrunk le, ilyenkor viszont a másik két csukló még elmozdulhat.

(c) Nemszinguláris mátrixhoz jutnánk az 1., 2., 5. és 7. oszlopok elhagyásával. Ez fizikailag az 1. csukló leszúrásán kívül azt jelenti, hogy a 2. csukló x-irányú és a 3. csukló y-irányú mozgását akadályoztuk meg – szemléletesen a 2. csukló csak egy függőleges, a 3. pedig csak egy vízszintes *sínen* mozoghat.

(d) Nemszinguláris mátrixhoz jutnánk az 1., 2., 3. és 8. oszlopok elhagyásával is – ez fizikailag az 1., 2. és 3. csukló függőleges, a 4. csukló vizszintes sínre helyezésének felel meg.

(e) Nem kapnánk viszont nemszinguláris mátrixot, ha az 1., 2., 3. és 4. oszlopokat hagynánk el – ez fizikailag annak felel meg, hogy akkor mindegyik csukló függőleges sínen mozoghatna.

A 4. ábra öt rajza szemlélteti a fenti lehetőségeket. Általában is megállapíthatjuk, hogy pontosan akkor jutunk nemszinguláris mátrixhoz, ha a rúdszerkezetet *rögzítettük*, vagyis az összes csukló mozgását megakadályoztuk.



4. ábra

Ha a fenti $\mathbf{W}$ mátrix egy villamos hálózat valamelyik 4-kapujának a leíró mátrixa lenne, akkor minek felelne meg ez az öt eset?

Az (a) és (b) esetekben 2-2 kapunak (az 1. és 3., ill. az 1. és 2. számúaknak) mind a feszültségét, mind az áramát előírnánk és azt kérdeznénk, hogy ezek egyértelműen meghatározzák-e a maradék két kapu feszültségét és áramát – vagyis azt kérdeznénk, hogy egyértelműen megoldható-e az a villamos hálózat, melynek az 1. és 3., ill. az 1. és 2. számú kapujaira nullátort, a maradék két kapura pedig norátort kötünk.

A (c) eset annak felel meg, hogy az 1. kapura nullátort, a 2.-ra feszültségforrást, a 3.-ra áramforrást, végül a 4. kapura norátort kötünk.

A (d) és (e) eseteknek megfelelő hálózatokban viszont nem alkalmaztunk nullátor-norátor párt, hanem csak feszültségforrásokat (és a (d) esetben áramforrást is).

Ez a formális analógia a villamos hálózatok és a síkbeli rúdszerkezetek között (ahol tehát a nullátorok felelnek meg a csuklók leszúrásának, a feszültség- és áramforrások a csuklók sínre helyezésének, a norátorok pedig annak, hogy a csuklóval „nem csinálunk semmit”, vagyis a helyzetét csak a szomszédos csuklókhoz csatlakozó rudak határozzák meg), már mintegy 35 éve ismert, ld. [23-26].

Ennek megfelelően definiálhatjuk a *rúdszerkezet spektrumát* is: egy k szám akkor és csak akkor tartozzék bele ebbe a számhalmazba, ha van a rúdszerkezetnek olyan *minimális* rögzítése, ahol pontosan k csuklót szúrtunk le. A minimális jelző arra utal, hogy a sínre helyezett csuklók t számára teljesülnie kell, hogy $t + 2k = 2n - r(\mathbf{W})$.

(Hangsúlyozzuk ki, hogy itt a (gráf által meghatározott) rúdszerkezet spektrumáról van szó – ne tévesszük össze a gráf spektrumával, ami teljesen más gráfelméleti fogalom [2].)

Hogyan határozható meg egy rúdszerkezet spektruma? A 3. szakaszban látottak alapján ez bármely numerikusan adott mátrix esetén polinom időben lehetséges: az intervallum legkisebb értékét a matroid partíciós algoritmussal, a legnagyobb értékét a jóval nehezebb lineáris matroid párosítási algoritmussal határozzuk meg és Frank András idézett tétele minden matroidra érvényes, nem csak az n-kapuk mátrixa által reprezentáltakra. Tekintettel azonban arra, hogy itt a mátrix nagyon szabályos szerkezetű, elképzelhető, hogy a feladat egyszerűbb lesz.

Ahogy a korábbi példában (a 4 hosszú körnél) feltettük, hogy semelyik három csukló nem esik egy egyenesre, a továbbiakban általánosságban feltesszük, hogy a rúdszerkezet a gráfot a „lehető legszabálytalanabb módon” valósította meg, a csuklók „általános” helyzetűek, vagyis koordinátáik között semmilyen „véletlen” algebrai kapcsolat nincs. A merevség irodalmában ezt a gráf *generikus* megvalósításának nevezik, ez elérhető például, ha a koordináták algebrailag függetlenek a racionális test felett. Erre a feltevésre azért van szükség, mert ezáltal a merevség tényleg a gráf tulajdonsága lesz (nem pedig az adott gráf valamely konkrét megvalósításának a tulajdonsága, amely a gráf kombinatorikai tulajdonságain kívül a rudak hosszától is függne).

Feltehetjük, hogy a rúdszerkezet gráfja összefüggő, hisz különben komponensenként vizsgálnánk a kérdést. Az is világos, hogy merev rúdszerkezetek spektruma mindig a $\{0, 1\}$ halmaz lesz, ugyanis alapvetően kétféle minimális rögzítése lehet egy síkbeli merev rúdszerkezetnek: vagy leszúrunk egy csuklót és sínre teszünk egy másikat, vagy három csuklót teszünk sínre úgy, hogy a sínek között vízszintes is, függőleges is legyen.

Könnyen belátható, hogy a spektrum minimuma minden összefüggő gráf esetén 0 vagy 1, éspedig 1 a fákra és 0 a kört tartalmazó gráfokra. Az alapötlet az, hogy egy kör rögzítéséhez nincs szükség leszúrásra – gondoljunk a 4. ábra (d) rajzára –, a fákat viszont nem lehet csak sínekkel rögzíteni: a fent látott $t + 2k = 2n - r(\mathbf{W})$ egyenlet nem teljesülhet $k = 0$ esetén, mert a mátrixnak csak $n - 1$ sora van.

Így az egyetlen nyitott kérdés a spektrum maximumának a minél egyszerűbb (az általános eset matroidos apparátusát nem alkalmazó) meghatározása maradt. Ez egy nehezebb feladat, azonban, ahogy [21] észrevette, már megoldották [31], természetesen nem használva a spektrum itt bevezetett terminológiáját. A megoldás első lépése Fekete [7] eredménye, aki rúdszerkezetek olyan rögzítéseit vizsgálta, ahol kizárólag a csuklók leszúrását engedjük meg, sínre helyezésre nincs lehetőség. A rögzítéshez szükséges leszúrások minimális számának meghatározását visszavezette egy (nem feltétlenül páros) segédgráfban maximális élszámú párosítás keresésére. (A visszavezetés módja és helyességének egyszerű bizonyítása megtalálható [9]-ben is.)

Ennek az eredménynek az ismeretében azonnal adódik a kérdés, hogy az így kapott minimális leszúrás megfeleltethető-e a spektrum egy maximális elemének? Mivel minden minimális rögzítésre teljesül a $t + 2k = 2n - r(\mathbf{W})$ egyenlőség, vagyis a $t + 2k$ mennyiség egy rögzített érték, ezért k akkor maximális, amikor $t + k$, vagyis a valamilyen módon rögzített csuklók együttes száma minimális. Ha egy minimális rögzítésben a sínre helyezett csuklókat is teljesen leszúrjuk, akkor a rúdszerkezet továbbra is rögzített marad, ezért $t + k$ nem lehet kisebb, mint egy minimális leszúrás elemszáma. Így csak az a kérdés, hogy ha adott egy minimális leszúrás, akkor ebből mindig megkaphatunk-e egy minimális rögzítést úgy, hogy néhány, a leszúrásban szereplő csukló rögzítését leszúrás helyett sínre cseréljük. Az igenlő válasz Streinu és Theran [31] eredményéből következik.

Ahhoz, hogy a kérdést pusztán kombinatorikai apparátussal vizsgálhassuk, először azt érdemes észrevenni, hogy nem fontos megkülönböztetnünk egymástól a vízszintes, illetve függőleges sínre helyezett csuklókat. Ehelyett beszélhetünk egyszerűen a sínre helyezett csuklók halmazáról, amelynek minden csuklóját egy tetszőleges irányú sínre helyezzük úgy, hogy az irányok együttesen *generikusak* legyenek. Az világos, hogy ha adott egy vízszintes és függőleges sínre helyezéseket tartalmazó rögzítés, akkor az ebben szereplő csuklók generikus sínre helyezése is rögzít. A fordított irány, hogy a generikusan sínre helyezett csuklókhoz hogyan tudunk hozzárendelni csak vízszintes és függőleges síneket úgy, hogy a rúdszerkezet rögzített maradjon, nem triviális, egy lehetséges megoldást mutat [31].

Mielőtt rátérnénk Streinu és Theran fő eredményére, érdemes bemutatnunk egy arra vonatkozó klasszikus tételt, hogy, rögzítésekről egyelőre nem beszélve, hogyan írhatjuk le kombinatorikai eszközökkel egy rúdszerkezet merevségét.

3.1. Definíció. Egy $G = (V, E)$ gráfot *ritka gráfnak* nevezünk, ha minden $X \subseteq V, |X| \geq 2$ ponthalmazra $i(X) \leq 2|X| - 3$ teljesül, ahol $i(X)$ az X által indukált élek halmaza.

3.1. Állítás. (Laman-tétel). *[13] Egy gráf egy generikus megvalósításához tartozó* **W** *merevségi mátrix sorai akkor és csak akkor függetlenek, ha a gráf ritka.*

Streinu és Theran egy ezzel analóg tételt bizonyított ritka gráfok minimális rögzítéseiről:

3.2. Definíció. Legyen $G = (V, E + L)$ egy olyan gráf, amely hurokéleket is tartalmazhat, és ahol E jelöli a gráf „valódi”, L a hurokéleinek halmazát. Azt mondjuk, hogy G *hurok-ritka*, ha (V, E) ritka és még az is teljesül, hogy minden $X \subseteq V$ ponthalmazra $i_{E+L}(X) \leq 2|X|$.

3.2. Állítás. *[31] Legyen adott egy $G = (V, E)$ ritka gráf és ennek egy leszúrásokból és sínre helyezésekből álló rögzítése. Legyen a G' gráf a G kibővítése hurokélekkel úgy, hogy minden olyan csúcshoz, amely egy leszúrt csuklónak felel meg, hozzáveszünk két hurokélet, és minden olyan csúcshoz hozzáveszünk egy hurokélet, amely sínre helyezett csuklónak felel meg. Ekkor G rögzítése akkor és csak akkor minimális, ha G' hurok-ritka.*

A minimális rögzítésekkel kapcsolatos algoritmusok alapja pedig a következő eredmény:

3.3. Állítás. *[14] Egy rögzített V csúcshalmazon megadható összes hurok-ritka gráf élhalmazai egy matroid független halmazait alkotják.*

3.1. Megjegyzés. Az így kapott matroid bázisait pontosan azok a hurok-ritka gráfok alkotják, amelyeknél az $i_{E+L}(X) \leq 2|X|$ egyenlőtlenség V-re egyenlőséggel teljesül, vagyis az élszám a csúcsszám kétszerese. A hurok-ritkasághoz megkövetelt másik, $i_E(X) \leq 2|X| - 3$ egyenlőtlenség V-n való egyenlőséggel teljesülése nem szükséges ahhoz, hogy egy gráf bázis legyen.

Mielőtt a fenti állításokat alkalmaznánk, még azt kell megjegyeznünk, hogy a rögzítések vizsgálatánál mindig feltehetjük, hogy a rögzítendő rúdszerkezetet leíró gráf ritka. Egy rögzítés ugyanis pontosan akkor rögzít egy gráfot, mint amikor annak egy maximális független részgráfját, maximális független részgráf keresésére pedig ismertek hatékony algoritmusok (pl. [1]). Ezzel pedig választ is kaptunk arra, hogy egy minimális leszúrásból kapható-e azonos számú csukló rögzítését tartalmazó minimális rögzítés: ha egy ritka gráf minden, egy minimális leszúrásában szereplő csúcsához hozzáveszünk két hurokélt, akkor egy olyan gráfot kapunk, amely az adott csúcshalmazon a hurok-ritkasági matroid szerint maximális rangú, így a matroid-tulajdonság miatt az eredeti ritka gráf élhalmaza ezen hurokélek egy részének hozzáadásával bázissá bővíthető, ami pedig egy minimális rögzítésnek felel meg.

A Fekete által adott algoritmus tehát elegendő arra, hogy meghatározzuk a spektrum maximális elemét, ha azonban egy konkrét minimális rögzítést is meg szeretnénk kapni, akkor nem elég tudnunk, hogy a minimális leszúráshoz tartozó, hurokélekkel kibővített gráf tartalmazza a hurok-ritkasági matroid egy bázisát, hanem meg is kell határoznunk egy ilyen bázist. Erre Lee, Streinu és Theran [14] algoritmusa használható. Végül, ha generikus sínre helyezések helyett egy kizárólag függőleges és vízszintes síneket tartalmazó rögzítést akarunk kapni, egy [31]-ben leírt algoritmus használható. Ennek az utolsó két lépésnek az elvégzésére egy alternatív eljárást ad [21].

Mivel már Fekete algoritmusa is feltételezi, hogy a gráf, amelyben minimális leszúrást keresünk, ritka, egy minimális rögzítést megtaláló algoritmus a következő három lépésből áll:

1. Megkeressük a kiindulási gráf egy maximális független élhalmazát.
2. A kapott ritka gráfhoz elkészítünk egy segédgráfot, és ebben maximális párosítást keresünk.
3. Az előző lépésben megkapott minimális leszúrás által meghatározott hurokélek felhasználásával a hurok-ritkasági matroid egy bázisává bővítjük a ritka gráfot.

Az 1. lépés futásideje az ismert legjobb algoritmusokkal $O(n^2)$, ahol n a kiindulási gráf csúcsszáma. A 2. lépésbeli segédgráfnak $O(n)$ csúcsa és $O(n)$ éle van, így a Micali-Vazirani-algoritmussal [17] a lépés futásideje $O(n^{1{,}5})$. A 3. lépés futásideje ismét $O(n^2)$, így azt kaptuk, hogy a spektrum maximális eleme meghatározható $O(n^2)$ futásidőben.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást az NKFI (OTKA#124171), valamint az EMMI BME Mesterséges Intelligencia FIKP (BME FIKP-MI/SC) programja támogatta.

Hivatkozások

[1] Berg, A. and Jordán, T.: *Algorithms for graph rigidity and scene analysis*, Proc. 11th Annual European Symposium on Algorithms (ESA) 2003, (G. Di Battista, U. Zwick, eds) Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. **2832**, pp. 78-89 (2003). DOI: 10.1007/978-3-540-39658-1_10

[2] Brouwer, A. E. and Haemers, W. H.: *Spectra of graphs*, Springer, New York (2012). DOI: 10.1007/978-1-4614-1939-6

[3] Carlin, H. J.: *Singular network elements*, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. **11** No. **1**, pp. 67-72 (1964). DOI: 10.1109/TCT.1964.1082264

[4] Chua, L. O. and Lam, Y. F.: *A theory of algebraic n-ports*, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. **20** No. **4**, pp. 370-382 (1973). DOI: 10.1109/TCT.1973.1083715

[5] Chua, L. O. and Lam, Y. F.: *Dimension of N-ports*, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. **21** No. **3**, pp. 412-416 (1974). DOI: 10.1109/TCS.1974.1083876

[6] Edmonds, J.: *Minimum partition of a matroid into independent subsets*, J. Res. Nat. Bur. Stand. Vol. **69B** Nos. **1** and **2**, pp. 67-72 (1965). DOI: 10.6028/jres.069B.004

[7] Fekete, Zs.: *Source location with rigidity and tree packing requirements*, Operations Research Letters, Vol. **34** No. **6**, pp. 607-612 (2006). DOI: 10.1016/j.orl.2005.10.005

[8] Frank, A.: személyes közlés, 2017. október.

[9] Frank, A. and Jordán, T.: *Diszkrét optimalizálás*, Typotex, Budapest (2014).

[10] Graver, J., Servatius, B. and Servatius, H.: *Combinatorial rigidity*, American Math. Soc. Graduate Studies in Mathematics, Vol. **2** (1993). DOI: 10.1090/gsm/002

[11] Iri, M. and Tomizawa, N.: *A unifying approach to fundamental problems in network theory by means of matroids* (in Japanese), Trans. Inst. Electron. & Commun. Eng. Jpn. Vol. **57A**, pp. 35-41 (1975).

[12] Jensen, P. M. and Korte, B.: *Complexity of matroid property algorithms*, SIAM J. Computing, Vol. **11** No. **1**, pp. 184-190 (1982). DOI: 10.1137/0211014

[13] Laman, G.: *On graphs and rigidity of plane skeletal structures*, J. Eng. Math. Vol. **4**, pp. 331-340, 1970. DOI: 10.1007/BF01534980

[14] Lee, A., Streinu, I. and Theran, L.: *Graded sparse graphs and matroids*, J. Univ. Comput. Sci., Vol. **13** No. **11**, pp. 1671-1679 (2007). DOI: 10.3217/jucs-013-11-1671

[15] Lovász, L.: *Matroid matching and some applications*, J. Combinatorial Theory Ser. B, Vol. **28** No. **2**, pp. 208-236 (1980). DOI: 10.1016/0095-8956(80)90066-0

[16] Lovász, L.: *The matroid matching problem*, Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **25**, pp. 495-517 (1981).

[17] Micali, S. and Vazirani, V. V.: *An $O(\sqrt{V}E)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs*, IEEE 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 17-27 (1980). DOI: 10.1109/SFCS.1980.12

[18] Narayanan, H.: *Theory of matroids and network analysis*, PhD thesis, Indian Institute of Technology, Bombay (1974).

[19] Oono, Y.: *Formal realizability of linear networks*, Proc. Symp. Active Networks and Feedback Systems, Polytechn. Inst. Brooklyn, pp. 475-485 (1960).

[20] Oxley, J.: *Matroid theory*, Oxford Univ. Press, Oxford (2006). DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198566946.001.0001

[21] Péterfalvi, F.: *Síkbeli rúdszerkezetek spektrumának algoritmikus vizsgálata*, BSc szakdolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnoki és Informatikai Kar, Budapest (2020).

[22] Recski, A.: *On partitional matroids with applications*, Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **10**, pp. 1169-1179 (1973).

[23] Recski, A.: *A network theory approach to the rigidity of skeletal structures 1. Modelling and interconnection*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **7** No. **3**, pp. 313-324 (1984). DOI: 10.1016/0166-218X(84)90007-6

[24] Recski, A.: *A network theory approach to the rigidity of skeletal structures 2. Laman's theorem and topological formulae*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **8** No. **1**, pp. 63-68 (1984). DOI: 10.1016/0166-218X(84)90079-9

[25] Recski, A.: *A network theory approach to the rigidity of skeletal structures 3. An electric model for planar frameworks*, Structural Topology, Vol. **9**, pp. 59-71 (1984).

[26] Recski, A.: *Statics and electric network theory: a unifying role of matroids*, W. Pulleyblank (ed): Progress in Combinatorial Optimization, Academic Press, London, pp. 307-314 (1984). DOI: 10.1016/B978-0-12-566780-7.50024-6

[27] Recski, A.: *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics*, Springer, Berlin (1989). DOI: 10.1007/978-3-662-22143-3

[28] Recski, A.: *Hybrid description and the spectrum of linear multiports*, IEEE Trans. Circuits and Systems - II: Express Briefs, Vol. **66** No. **9**, pp. 1502-1506 (2019). DOI: 10.1109/TCSII.2018.2890305

[29] Recski, A. and Zoller, V.: *On the parametrization of linear memoryless 2-ports*, Internat. J. Circuit Th. Appl. Vol. **10** No. **1**, pp. 57-67 (1982). DOI: 10.1002/cta.4490100106

[30] Someda, C.: *The bigenerator - an active pathological network*, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. **16** No. **1**, pp. 125-126 (1969). DOI: 10.1109/TCT.1969.1082916

[31] Streinu, I. and Theran, L.: *Slider-pinning rigidity: a Maxwell-Laman-type theorem*, Discrete & Computational Geometry, Vol. **44**, pp. 812-837 (2010). DOI: 10.1007/s00454-010-9283-y

[32] Willson, A. N.: *New theorems on the equations of nonlinear DC transistor networks*, Bell Syst. Tech. J., Vol. **49** No. **8**, pp. 1713-1738 (1970). DOI: 10.1002/j.1538-7305.1970.tb04287.x

Péterfalvi Ferenc

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Villamosmérnöki és Informatikai Kar,
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
1521 Budapest, Pf. 91.
fpeterfalvi@gmail.com

Recski András 1971-ben szerzett okleveles matematikusi diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen (ELTE), 1971-1984 között a Távközlési Kutatóintézet kutatója. 1972 óta oktat az ELTE-n, 1990 óta a Budapesti Műszaki Egyetemen (BME). 1988 óta egyetemi tanár, 1990-2011 között tanszékvezető a BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszékén, majd 2012-2017 között a BME Matematika és Számítástudományi Doktori Iskola vezetője. 2009 óta az Aquincumi Technológiai Intézet tudományos igazgatója. Hosszabb ideig volt vendégprofesszor az USA-ban (Cornell University, Yale University), Kanadában, Németországban és Japánban. Kutatási területe: matroidelmélet, kombinatorikus optimalizálás és ezek műszaki alkalmazásai. 1969 óta a Bolyai János Matematikai Társulat tagja, 2006-2015 között a Társulat főtitkára. 1999-2005 között az MTA Matematikai Bizottságának alelnöke.

Recski András

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Villamosmérnöki és Informatikai Kar,
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
1521 Budapest, Pf. 91.
recski@cs.bme.hu

A PROBLEM IN ELECTRIC NETWORK THEORY, ITS SOLUTION VIA MATROID THEORY AND A COROLLARY IN STATICS

Ferenc Péterfalvi and András Recski

Oono asked more than 50 years ago, how one can determine if an n-port has a hybrid description. Iri and Tomizawa solved this problem in the early seventies, using tools of matroid theory. Here we study a natural generalization of this question. We show that stronger matroidal tools are required for the more general problem. Using the well-known analogy between frameworks and electric networks we also present the corresponding problem in statics.