Alkalmazott Matematikai Lapok **37** (2020), 225–232.
DOI: 10.37070/AML.2020.37.2.07

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK KONZISZTENCIÁJÁNAK KOMBINATORIKAI JELENTÉSEI

PLUHÁR ANDRÁS

Régóta ismert a lineáris algebra és a kombinatorika kapcsolata. Itt a Kronecker-Capelli tétel kombinatorikai következményeit járjuk körbe, mely kiadja Kőnig és Harary tételeit és elvezet egyfajta duálisaikhoz, valamint a nyaklánc probléma általánosításaihoz és specializációihoz.

1. Bevezetés

Nagyon sok mély kombinatorikai állítás bizonyítása lineáris algebrai eszközökkel történik, sokszor nem is ismert más módszer. A terület hatalmas, jelen esetben még a felvázolására sem tehetünk kísérletet, az érdeklődő olvasónak az alábbi kiváló könyveket ajánljuk [2, 10, 11].

A teljesség igénye nélkül megemlítjük, mely algebrai fogalmak segítenek a jól ismert kombinatorikai állításokban, a részletek a fenti hivatkozásokban megtalálhatóak:

- Fisher egyenlőtlenség ($r(AA^T) \leq r(A)$, ahol $r(A)$ az A mátrix rangja)
- Páratlan város tétel (független vektorok maximális száma egy n-dimenziós vektortérben)
- Hoffman-Singleton tétel (főtengely tétel)
- Graham-Pollak tétel ($r(A+B) \leq r(A) + r(B)$)
- Feszítőfák száma G gráfban (Laplace determináns)
- Shannon kapacitás (tenzorszorzat)

A gyakorlatban néha fordított irányban vetődik fel a kérdés, egy adott lineáris algebrai eredménynek mi lehet a kombinatorikai jelentése? Így tehát természetes lehet, van-e nem triviális kombinatorikai következménye a Kronecker-Capelli tételnek, ami a lineáris egyenlőségrendszer megoldhatóságát karakterizálja. Valószínűleg sokan vizsgálták már a problémát, látható nyoma ennek viszont nincs; e sorok írója egyedül Füredi Zoltán publikálatlan eredményéről értesült. Ennek megértéséhez az alábbi fogalmakra lesz szükségünk:

1.1. Definíció. (Hipergráf) Egy (X, E) halmazrendszer, vagy hipergráf az X n elemű alaphalmaz és részhalmazainak egy E halmazából áll. Az E elemei $e_1, \ldots, e_m$.

1.2. Definíció. (Színezés) Az (X, E) hipergráf egy kettő-színezése alatt egy $f : X \to \mathbb{F}_2$ függvényt értünk, ahol $\mathbb{F}_2$ a kételemű test.[1] Az f jó színezés, ha $|f(e) \cap \mathbb{F}_2| = 2$, azaz mindkét szín előfordul minden $e \in E$ esetén. Továbbá f páratlan színezés, ha $\sum_{x \in e} f(x) = 1$ minden $e \in E$ esetén.[2]

Vegyük észre, ha (X, E) hipergráf minden $e \in E$ éle páros méretű, akkor egy f páratlan színezés egyben jó színezés is.

1.1. TÉTEL. (Füredi) *[7] Egy (X, E) halmazrendszernek akkor és csak akkor van páratlan színezése, ha nincs olyan $H := \{e_1, \ldots, e_{2k+1}\} \subset E$, hogy bármely $x \in X$ páros sok H-beli halmaz eleme.*

1.1. KÖVETKEZMÉNY. (Kőnig) *Egy G gráfnak akkor és csak akkor van jó kettő-színezése, ha nem tartalmaz páratlan kört.*

Bizonyítás. Legyen $X = V(G)$, $E = E(G)$ és alkalmazzuk az 1.1. Tételt az (X, E) hipergráfra. A fentiek szerint G gráfnak pontosan akkor van jó kettő-színezése, ha nincs olyan páratlan élhalmaz $E(G)$-ben, amelyben minden pont foka páros, azaz egy páratlan séta. Ugyanakkor egy G gráf pontosan akkor tartalmaz páratlan sétát, ha páratlan kört is. □

A következő fejezetben bebizonyítjuk Füredi tételének általánosítását és néhány további következményét.

2. általánosított Füredi tétel és következményei

Mint említettük, szükségünk lesz a Kronecker-Capelli tételre:

2.1. TÉTEL. (Kronecker-Capelli) *Legyen $\mathbb{F}$ egy tetszőleges test, A egy $m \times n$-es mátrix, míg b egy m-dimenziós vektor $\mathbb{F}$ felett. Az $Ax = b$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha nincs olyan $y \in \mathbb{F}^m$, amelyre $y^T A = \mathbf{0}$, de $y^T b = 1$.*

Mielőtt kimondanánk és bizonyítanánk az 1.1. Tétel általánosítását, Harary stabilitási fogalmát visszük át hipergráfokra:

[1] Bármely kételemű halmazba képezhetne f, viszont az algebrai struktúra nagyon hasznos az $\mathbb{F}_2$-ben.

[2] Azaz minden e élben páratlan sok pont kapja az egyes színt.

2.1. Definíció. (Stabil színezés) Legyen (X, E, ϕ) egy élszínezett hipergráf, ahol $\phi : E \to \mathbb{F}_2$. Az (X, E) hipergráf stabil színezése olyan $f : X \to \mathbb{F}_2$ függvény, amelyre $\sum_{x \in e} f(x) = \phi(e)$ minden $e \in E$ esetén.

2.2. TÉTEL. (általánosított Füredi) *Egy (X, E, ϕ) hipergráfnak akkor és csak akkor van stabil színezése, ha nincs olyan $H := \{e_1, \ldots, e_k\} \subset E$, hogy bármely $x \in X$ páros sok H-beli halmaz eleme és a H halmaz páratlan sok elemét színezi a ϕ egyessel.*

Bizonyítás. Vegyük fel az (X, E, ϕ) hipergráf illeszkedési mátrixának transzponáltját, azaz az A mátrix sorai E, az oszlopai pedig X elemeihez tartoznak és $A_{ex} = 1$, ha $x \in e$, különben $A_{ex} = 0$. Legyen továbbá az m-dimenziós b vektor i-edik koordinátája, $b_i := \phi(e_i)$. Ekkor az $Ax = b$ egy megoldása a kételemű $\mathbb{F}_2$ test felett éppen az (X, E, ϕ) hipergráf egy stabil színezését adja. Ha nincs stabil színezés, a 2.1. Tétel szerint van olyan $y \in \mathbb{F}_2^m$, amivel $y^T A = \mathbf{0}$, és $y^T b = 1$. Vegyük azon e_i éleket, melyekre $y_i = 1$. Az ezek által lefedett pontok páros sokszor vannak fedve az $y^T A = 0$ miatt, ugyanakkor páratlan sok él színe 1 az $y^T b = 1$ miatt. □

A 2.2. Tétel Harary 1954-ben közölt eredményének hipergráfokra vett általánosítása. Harary tétele maga is egy általánosítás, mégpedig a Kőnig Dénestől származó 1.1. Tételé. A motivációja a szociológiából származott, mint a gráfelmélet sok más problémája. Az egyszerű G gráf pontjai entitások, a köztük lévő kapcsolatot mint élt címkézte $+, -$ jelekkel, amelyek barátságos vagy ellenséges viszonyra utaltak. Stabilitás akkor várható, ha két csoportra osztható a ponthalmaz úgy, hogy a csoportokon belül csak $+$, köztük pedig csak $-$ élek vannak. A 2.2. Tételből az 1.1. Következmény bizonyításához teljesen hasonló módon kapjuk Harary eredeti tételét:

2.1. KÖVETKEZMÉNY. (Harary) [8] *Egy címkézett G gráfnak akkor és csak akkor van stabil felosztása, ha minden körében páros sok negatív él van.*

2.1. Megjegyzés. A fent vázolt megközelítésnek algoritmikus jelentése is van. Az $Ax = b$ megoldásával, azaz pl. egy Gauss-elimináció végrehajtásával eldönthető, hogy egy G gráf páros (vagy előjelezett esetben stabil). Továbbá a pozitív válasz esetén kiolvasható egy színosztályokra bontása is.

2.1. Duális Kőnig és Harary tétel

Az algebrai megközelítés miatt értelmezhetjük a 2.2. és így az 1.1. és 2.1. Tételek duálisait. Formálisan felcseréljük az X és E szerepét és A helyett az A^T mátrixot vesszük, ami éppen az (X, E) hipergráf illeszkedési mátrixa.

Tegyük fel, hogy (X, E, α) színezett hipergráfban az $\alpha : X \to \mathbb{F}_2$ a pontok rögzített színezése, és egy h stabil élszínezés olyan $h : E \to \mathbb{F}_2$, amelyre $\sum_{x \in e} h(e) = \alpha(x)$ minden $x \in X$ esetén. Ekkor a 2.2. Tétel átmegy a következőbe:

2.1.1. TÉTEL. (Duális Füredi) *Egy* (X, E, α) *hipergráfnak akkor és csak akkor van stabil élszínezése, ha nincs olyan* $Y := \{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$*, hogy bármely* $e \in E$ *páros sok* Y*-beli elemet tartalmaz és az* Y *halmaz páratlan sok elemét színezi az* α *egyessel.*

Speciálisan: címkézzük egy G gráf pontjait $+$ és $-$ címkével. Stabil élfelbontás alatt olyan $E(G) = E_1 \cup E_2$ felbontást értünk, amelyre minden $+$-szal címkézett pontra páros sok, míg minden $-$-szal címkézett pontra páratlan sok E_1-beli él illeszkedik.

2.1.1. KÖVETKEZMÉNY. (Duális Harary) *Egy pontcímkézett* G *gráfnak akkor és csak akkor van stabil élfelbontása, ha nincs olyan komponense, amelyik páratlan sok negatív címkéjű pontot tartalmaz.*

2.1.2. KÖVETKEZMÉNY. (Duális Kőnig) *Egy* G *gráf* $E(G)$ *élhalmaza felbontható* E_1*,* E_2 *részre úgy, hogy minden pontra páratlan sok* E_1*-beli él illeszkedjen akkor és csak akkor, ha* G*-nek nincs páratlan komponense.*

3. Egyéb egyenletek

Az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásainak szerkezete messzire vezet, amit éppen csak érintünk ebben az írásban.

Az ún. *nyaklánc problémát* Alon és West vizsgálta 1987-ben, lásd [1]. Az eredeti változatban két tolvaj akar osztozkodni egy nyaklánc kövein. A láncon n fajta kő van, és minden fajtából páros sok. Minimálisan hány helyen kell elvágni a láncot, ha egyenlő számút akarnak kapni minden fajta kőből? Könnyű látni, hogy az $1122\ldots nn$ esetén legalább n vágás kell. Alon és West belátta, n vágás mindig elég. Ők egy klasszikus topológiai eredményt, a Borsuk-Ulam tételt használták.

3.1. TÉTEL. (Borsuk-Ulam) *Tegyük fel, hogy* f *egy folytonos függvény, amely az* $n+1$*-dimenziós gömb felszínét, jele* $\mathbb{S}^n$*, az* $\mathbb{R}^n$*-be képezi. Ekkor van olyan* $x \in \mathbb{S}^n$*, melyre* $f(x) = -f(-x)$*.*

Pontosabban ennek egy ekvivalens formáját használják, amelyben feltétel, hogy $f(x) = -f(-x)$. Ekkor van olyan $x \in \mathbb{S}^n$, melyre $f(x) = \mathbf{0}$.

Vegyük észre, ha f egy $\mathbb{R}^{n+1}$-ből $\mathbb{R}^n$-be képző lineáris függvény, melynek mátrixa az $n \times (n+1)$-dimenziós A, akkor speciálisan azt kapjuk, hogy az $Ax = \mathbf{0}$ elfajuló homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása. Ennek a segítségével bizonyította a színezési tételét Seymour [13], ill. ez a kiinduló pontja a Beck-Fiala tételnek is [4].

Epping és társai a nyaklánc probléma algoritmikus megoldhatóságát, illetve a vágások minimalizálását is vizsgálták, lásd [6]. Kitűnő összefoglalót írt erről Meunier és Neveu, lásd [12].

Néhány eredmény ezekből:

1. Ha n típusú kő van, akkor polinom időben található n megfelelő vágás.
2. A minimális vágás megtalálása NP-nehéz.
3. A mohó algoritmus n vágással megoldja az elosztást, ha minden fajta kőből pontosan két darab van, ez az ún. *Festőműhely* (Paint shop) probléma.
4. A minimális vágás megtalálása NP-nehéz a Festőműhely problémában is.

A Festőműhely problémát, illetve a 3. pont eredményét lineáris egyenletrendszerrel is megfogalmazhatjuk, ill. megoldhatjuk. Végighaladva a láncon rendeljük az x_i változót az i-edik és $i+1$-edik kő között lévő darabhoz. Az x_i változók $0, 1$ értékeket vehetnek fel, az 1-et a lánc elvágásának tekintjük. Az elosztás jó, ha bármely két azonos típusú kő között páratlan sok vágás van, ekkor kerül a két kő különböző játékoshoz. Jelölje A a következő mátrixot. A sorai a kövekhez tartoznak, és ha j-edik típusú kövek az $s_j < s'_j$ pozícióban vannak, akkor az $A_{ji} = 0$, ha $i < s_j$ vagy $s'_j < i$, különben $A_{ji} = 1$. Könnyen látható, hogy $Ax = \mathbf{1}$ egy megoldása az $\mathbb{F}_2$ test felett a Festőműhely probléma egy jó vágását kódolja. Elegendően sok vágással mindig van megoldás, így ha egy bázismegoldást használunk, n vágás biztosan elég, azaz újra bizonyítottuk a következő állítást:

3.1. Állítás. *[6] Ha a Festőműhely problémában minden kőből (színből) pontosan kettő van, és n fajta kő van összesen, akkor n vágás elegendő.*

A fenti eljárás többféleképpen általánosítható.

3.1. Intervallumok, klikkek lefogása

Klasszikus probléma egy $\mathbf{I} = \{I_i\}_{i=1}^n$ intervallumrendszer lefogó ponthalmazainak vizsgálata, azaz olyan $X \subset \mathbb{R}$ halmazé, melyre $X \cap I_i \neq \emptyset$ $i = 1, \dots, n$ esetén. Mindig van ilyen, illetve a minimális méretű X halmaz megtalálása mohó algoritmussal történhet, lásd [5]. Mi történik, ha erősebb feltételünk van a fedésre, $|X \cap I_i|$ páratlan minden i-re? Nevezzük ezt *páratlan fedésnek*.

Ekkor persze nem mindig van megoldás, pl. $\mathbf{I} = \{[0,2], [0,1], (1,2]\}$. A megoldhatóságot az alábbi algebrai konstrukcióval modellezhetjük. Rendeljük az $\mathbf{I}$ rendszerhez azt az A, n sorból álló $0-1$ mátrixot, melynek soraiban az 1-ek sorfolytonosan követik egymást, és $A_{ji} \leq A_{ki}$, ha $I_j \subset I_k$ úgy, hogy a k-adik sorban balról (jobbról) több 1-es van, ha I_j bal (jobb) végpontja nagyobb (kisebb) mint I_k bal (jobb) végpontja.

3.1.1. Állítás. (Fedhetőség) *Az $\mathbf{I}$ rendszernek akkor és csak akkor van páratlan fedése, ha az $Ax = \mathbf{1}$ rendszer megoldható $\mathbb{F}_2$ testben.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló a konstrukcióból. □

3.1.1. Következmény. (Fedhetetlenség) *Ha az* $\mathbf{I}$ *rendszernek nincs páratlan fedése akkor, van olyan* $\mathbf{I}^* \subset \mathbf{I}$ *részrendszere, hogy* $|\mathbf{I}^*|$ *páratlan és minden* $x \in \cup\mathbf{I}^*$ *pont páros sok* $\mathbf{I}^*$*-beli intervallumban van.*

Bizonyítás. Használjuk a 2.1. Tételt az $\mathbf{I}$-hez rendelt A mátrixszal az $Ax = \mathbf{1}$ megoldhatóságára az $\mathbb{F}_2$ testben. □

A fenti gondolatmenet átvihető gráfok klikkjeinek fedésére is. Első lépésben jegyezzük meg, hogy az intervallumgráfok klikk-pont illeszkedési mátrixa sorfolytonos, lásd [9], továbbá a klikkek száma nem több, mint a pontoké. Másrészt intervallumgráf klikkjeinek bármely rendszerében van legbaloldalibb klikk, így 3.1.1. Következmény szerint, ha G intervallumgráf, akkor a klikkjei páratlanul fedhetők legfeljebb $v(G)$ ponttal.

Általában is vizsgálhatók gráfok páros klikkfedései. A 3.1.1. Következmény mindig használható, csak a klikkek száma lehet exponenciális a pontszámban, illetve a szerkezetük jóval bonyolultabb.

3.2. Fák kettévágása

Egy másik lehetőség a nyaklánc probléma általánosítására, ha egy út helyett egy fára fűzzük fel a köveket. Ha minden kőtípusból (vagy színből más szóhasználat szerint) páros sok van, akkor elegendő él elvágásával pontosan kettévághatjuk őket. érdekes módon ez a kérdés már jóval a nyaklánc probléma előtt felvetődött, lásd Bhatt és Leiserson [3]. ők, többek között, az alábbi tételt mutatták meg:

3.2.1. Tétel. (Bisector) *[3] Minden bináris fákból álló, két színnel színezett* n *pontú* F *erdő pontosan kettévágható legfeljebb* $2\log_2 n$ *él elvágásával.*

Megmutatjuk, ha minden fajta kőből két darab van, a 3.1. Állítással analóg tétel áll.

3.2.2. Tétel. (2-kő) *Ha* F *egy* n *színnel színezett fa, ahol minden szín pontosan kétszer fordul elő, akkor legfeljebb* n *él elvágásával kettévágható* F*.*

Bizonyítás. Legyen A az út-él illeszkedési mátrixa F fának, ahol az utak az azonos színű köveket kötik össze, azaz egy $n \times (2n-1)$-es mátrixról van szó. Az $Ax = b$ megoldható $\mathbb{F}_2$ felett, hiszen könnyen látható, nincs különböző utak olyan nem triviális részhalmaza, mely páros sokszor fed minden élt, így használhatjuk a 2.1. Tételt. Másrészt ha van megoldás, akkor van bázismegoldás is, amelyben legfeljebb n nem zéró változó van. □

Felvetődik a kérdés, van-e a nyaklánc tételnek közvetlen általánosítása? (Azaz n kő esetén cn valamely c konstansra, akár $c = 1$-re.) Sajnos már egyfajta kő (szín) esetén nagyon sok vágásra lehet szükség, például a $K_{2k-1,1}$ csillag k vágást igényel. Az F fa fokszámának a korlátozása sem elég a cn korláthoz, hisz az egyszínű bináris fánál is $\log_2 v(F)$ vágásra van szükség (Csaba Béla észrevétele).

3.2.1. Sejtés. (általános kettévágás) *Ha F egy n-színezett fa, ahol minden színből páros sok van, akkor F-nek van olyan kettévágása, amely csak $cdn\log_2 v(F)$ élt vág el, ahol d a maximális fokszám, c pedig egy abszolút konstans, $v(F)$ a fa csúcsainak száma.*

Köszönetnyilvánítás

Jelen kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal az SNN-117879 sz. pályázatával támogatta. Köszönöm a bírálók figyelmes munkáját, amivel rengeteget javítottak a dolgozat minőségén.

Hivatkozások

[1] Alon, N. and B. West D. B.: *The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. **98** No. **4**, pp. 623-628 (1986). DOI: 10.1090/S0002-9939-1986-0861764-9

[2] Babai, L. and Frankl, P.: *Linear Algebra Methods in Combinatorics*: *With Applications to Geometry and Computer Science*, Department of Computer Science, Univ. of Chicago, (1992).

[3] Bhatt, S. N. and Leiserson C. E.: *How to assemble tree machines*, Proceedings of the fourteenth annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM (1982). DOI: 10.1145/800070.802179

[4] Beck, J. and Fiala, T.: *Integer-making theorems*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **3** No. **1**, pp. 1-8 (1981). DOI: 10.1016/0166-218X(81)90022-6

[5] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C.: *Új algoritmusok*, Scolar Kiadó, Budapest (2003).

[6] Epping, Th, Hochstättler W. and Peter Oertel P.: *Complexity results on a paint shop problem*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **136** No. **2-3**, pp. 217-226 (2004). DOI: 10.1016/S0166-218X(03)00442-6

[7] Füredi, Z.: szóbeli közlés

[8] Harary, F.: *On the notion of balance of a signed graph*, The Michigan Mathematical Journal, Vol. **2** No. **2**, pp. 143-146 (1953). DOI: 10.1307/mmj/1028989917

[9] Golumbic, M. C. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, Elsevier, Vol. **57**, (2004). DOI: 10.1002/net.3230130214

[10] Guth, L.: *Polynomial methods in combinatorics*, American Mathematical Soc., Vol. **64**, (2016). DOI: 10.1090//ulect/064

[11] Matoušek, J.: *Thirty-three miniatures: Mathematical and Algorithmic applications of Linear Algebra*, Providence, RI: American Mathematical Society, (2010). DOI: 10.1090/stml/053

[12] Meunier, F. and Neveu, B.: *Computing solutions of the paintshop-necklace problem*: Computers & Operations Research, Vol. **39** No. 11, pp. 2666-2678 (2012). DOI: 10.1016/j.cor.2012.01.014

[13] Seymour, P. D.: *On the two-colouring of hypergraphs*, Quart. J. Math. Oxford Ser., Vol. **2** No. **25**, pp. 303-312 (1974). DOI: 10.1093/qmath/25.1.303

Pluhár András 1963-ban született Gyulán, alapfokú tanulmányait Eleken, míg a középiskolait Gyulán végezte. 1982-ben fizikus szakra járt egy évig a JATE-n, majd Modellalkotó matematikus szakra jelentkezett át és szerzett diplomát 1988-ban. 1988-93 között az MTA szegedi kutatócsoportjában volt alkalmazásban, 1990-ben ösztöndíjat nyert a Rutgers egyetemre. Itt 1994-ben PhD fokozatot szerzett Beck József témavezetésével. 1993-ban átkerült a JATE (később Szegedi Tudományegyetem) Informatika intézetébe, ahol a mai napig dolgozik. Fő érdeklődési területe, gráfok, kombinatorikus játékok, gráfalapú adatbányászat. Kb. 50 megjelent publikációja van, négy doktori diák szerzett PhD fokozatot a vezetésével.

Pluhár András

Szegedi Tudományegyetem,
Informatikai Intézet,
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
pluhar@inf.u-szeged.hu

THE COMBINATORIAL MEANING OF THE CONSISTENCY OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

András Pluhár

The connection between Linear Algebra and Combinatorics is well-known. Here we explore the combinatorial meaning of the Kronecker-Capelli theorem, which provides the celebrated theorems of Kőnig and Harary and leads us to the duals of those as well as the generalizations and special cases of the Necklace problem.

Keywords: Linear Algebra method, Kőnig theorem, Necklace problem

Mathematics Subject Classification (2000): 15A06, 05C15, 05C35