Alkalmazott Matematikai Lapok **37** (2020), 247–263.
DOI: 10.37070/AML.2020.37.2.09

EGYENSÚLYI ÁR OLIGOPOLISZTIKUS VERSENYKÖRNYEZETBEN, TÖKÉLETLEN INFORMÁLTSÁG ESETÉN

SZABÓ BALÁZS, SEBESTYÉN TAMÁS

Tanulmányunkban oligopolisztikus versenymodellben vizsgáljuk meg, hogy a szereplők nem teljes kapcsoltsága, ilyen értelemben az informáltság korlátozottsága, milyen következményekkel jár az árak alakulására. Ez a megközelítés újdonság a sztenderd modellezési kerethez képest, amelyek a szereplők teljes kapcsoltságát, így az aggregált árindex pontos ismeretét feltételezik. Modellünkben a kapcsolati szerkezet tetszőleges, ami az egyes szereplők által érzékelt árindexek különbözőségéhez vezet, így a sztenderd modell szimmetriája sérül. Piactisztítást feltételezve igazoljuk, hogy intuitív feltételek fennállása esetén egyértelműen létezik nemnegatív egyensúlyi árvektor (tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly). Munkánkban a modell módszertani oldalára fókuszálunk, elsősorban egzisztencia- és további kiegészítő bizonyítások bemutatása a célunk.

1. Bevezetés

A sztenderd oligo- és monopolisztikus versenymodellek lényeges feltevése, hogy a termelők homogének, egyrészt technológiai értelemben, másrészt pedig a tekintetben, hogy a fogyasztók valamennyi termelő termékét fogyasztják, az árakat tekintve teljes körűen informáltak, így az aggregált árindexre vonatkozóan pontos percepcióik vannak. Ha azonban feltesszük, hogy a fogyasztók nem minden termelővel állnak kapcsolatban, akkor csak egy részpiacra vonatkozóan lesznek ismereteik az árakról, így az általuk érzékelt árindex fogyasztónként eltér. Racionális termelőket feltételezve ezeket az érzékelt árindexeket a termelők is figyelembe veszik árdöntéseik meghozatalánál, aminek következtében a profitmaximalizáló ár meghatározása komplex stratégiai interakciók eredményévé válik.

Munkánkban a termelőnként potenciálisan különböző egyensúlyi ár létezésének lehetőségét vizsgáljuk oligopolisztikus versenykörülmények mellett, valamint a fentieknek megfelelően feltéve, hogy a termelőket és a fogyasztókat összekötő hálózati struktúra nem teljes. Tehát azzal általánosítjuk a sztenderd modellt, hogy az egyes fogyasztók nem feltétlenül vásárolnak minden termelőtől, a termelők pedig nem feltétlenül értékesítenek minden fogyasztónak. A termelőket és a fogyasztókat összekötő, az előbbieknek megfelelően nem feltétlenül teljes hálózatot exogén adottságnak tételezzük fel és megvizsgáljuk, hogy lehetséges-e egyensúlyi (minden termelőnél egyszerre profitot maximalizáló) ármeghatározás, illetve az egyensúlyi árak milyen tulajdonságokkal bírnak ebben az esetben.

A többszereplős, alapvetően termelők és fogyasztók kapcsolatrendszerét a fókuszba helyező modellben az előbbi kapcsolatrendszert leíró exogén hálózati struktúra mellett az egyes fogyasztók adott termékekkel szembeni lineáris keresleti függvényei is kulcsszerepet játszanak: ezek határozzák meg a modell endogén változóinak, elsősorban a termelők által beállított áraknak és termelési volumeneknek az értékeit. A lineáris keretrendszer alkalmazása a modell főbb tulajdonságait nem befolyásolja, azonban matematikailag könnyebben kezelhető formát ad a probléma vizsgálatához.

Tanulmányunk teoretikus jellegű, mikroökonómiai, valamint játékelméleti irányultságú, célja az egyensúlyi árak létezésének bizonyítása a fent vázolt környezetben. Az egzisztencia-bizonyításokból több változatot mutatunk be, ezzel bepillantást engedve a hasonló problémákat taglaló modellek lehetséges módszertani megközelítésébe.

Az utóbbi időben számos tanulmány foglalkozott termelők közötti kapcsolatrendszerek modellezésével, kiemelve ezek hálózati aspektusát, különös tekintettel a hálózati szerkezet jelentőségére (lásd például [1], [8], [11], [17], [18]). Ezek a munkák mind kiemelik, hogy egy többszereplős modellben lényeges, hogy az egyes aktorokat összekötő kapcsolatrendszer milyen jellemzőkkel bír. A [17]-ben vázolt modell egy általánosított input-output modellkeretből indul ki és az egyes ágensek közti kapcsolatokat úgynevezett interakciós függvényekkel írja le. Kimutatják, hogy a termelőket érő idioszinkratikus sokkok hatását az input-output hálózat aszimmetriája képes felerősíteni, hozzájárulva ezzel a makroszintű kibocsátás volatilitásához. Jellegéből fakadóan az input–output modellekben csak egy szereplőtípus, a termelők közötti hálózat tulajdonságai vizsgálhatók. Jelen tanulmány ezzel szemben egy piac két oldalát (fogyasztó illetve termelő) expliciten megjeleníti és a két szereplőtípus közti kapcsolatrendszert vizsgálja – azonban nem vizsgál egyedi sokkhatásokat. A [2]-ben bemutatott modell, hasonlóan az általunk használt modellhez, már két szereplőtípussal dolgozik: termelők és fogyasztók egy hálózatba rendezett struktúráját vizsgálja. Elemzésük azonban csak duopóliumra (Bertrand-duopólium) terjed ki a termelői oldalon, és a fogyasztókat összekötő hálózat szerkezetéből fakadó hálózati externáliák hatását vizsgálják a termelők egyensúlyi árazási magatartására. A fogyasztók közötti kapcsolatokra koncentrálva ez a modell nem foglalkozik a fogyasztók és a termelők nem teljes kapcsoltságából eredő korlátozott árinformációkkal, amely viszont a jelen tanulmányban bemutatott modell kulcseleme.

Általánosabb hálózati játék keretein belül a [3] szerzői megmutatják, hogy az egyedi hálózati szereplők eredményessége függ a hálózatban elfoglalt helyzetüktől (centralitásuktól), valamint a hálózati rendszer aggregált teljesítménye is összefügg a hálózati szerkezettel. A modell többszereplős, de egyetlen szereplőtípust alkalmaz, szemben az általunk használt kéttípusos felépítéssel. Ehhez hasonló többszereplős, de egy típussal dolgozó modell található [5]-ben, amelyben a szereplők kapcsoltságát reprezentáló gráf nem (feltétlenül) teljes, és exogén adottságként jelenik meg, akárcsak a mi megközelítésünkben. Egy teljes információs játékot elemeznek és a legjobb-válasz alapján a Nash-egyensúly unicitását vizsgálják. A [9]-ben bemutatott modell kvadratikus kifizetőfüggvény mellett egy súlyozatlan, exogén, nem feltétlenül teljes hálózatot vesz alapul továbbra is egyetlen ágenstípus mellett. A hálózati hatások itt a hasznossági függvényen keresztül jelentkeznek, ami az egyéni erőfeszítések hatása mellett tartalmazza a nem egyéni jellegű erőfeszítések (peer effort) hatásait is.

A [6]-ban bemutatott többszereplős modell már két szereplőtípussal, termelőkkel és fogyasztókkal dolgozik. A kapcsolati szerkezetet (hálózatot) viszont [2]-höz hasonlóan a fogyasztók között (exogén adottságként) vizsgálja. A fogyasztók hasznossági függvényében megjelenik a termékár, azonban nem viszonyítják az adott termék árát egy általuk ismert benchmarkhoz (árindexhez), ahogy ez az általunk használt modellben történik. Hasonló modell található [10]-ben, ahol a kifizetőfüggvény hátterében egy exogén, fogyasztók között értelmezett súlyozott kapcsolati háló áll. Termelői oldalon elsősorban duopóliumot feltételeznek, de megjelenik az oligopol vagy monopol struktúra is. Egy adott fogyasztó hasznossági függvénye figyelembe veszi egyrészt azt, hogy a vele kapcsolatban álló fogyasztók mennyit fogyasztanak, másrészt azt az összkiadást, amelyet az általa fogyasztani kívánt termékek mennyisége eredményez (így megjelennek a függvényekben a termékárak is). Itt sem jelenik azonban meg a kifizetőfüggvényben az árindex, mint referenciaár. Monopolisztikus verseny, termékdifferenciálás és egyfajta térbeliség (térgazdasági dimenzió) is megjelenik a [16]-ban bemutatott modell esetében. Szintén exogén, a termelők között értelmezett súlyozatlan hálózatot definiálnak, amely nem feltétlenül teljes. Ezen a struktúrán egy kvadratikus hasznossági függvényt határoznak meg, melyből olyan keresleti függvényt származtatnak, amelyben az általunk használt módszerhez hasonlóan már megjelenik egy bizonyos típusú árindex. Ez az árindex az árak súlyozott összege, a súlyokat pedig a Bonacich-centralitás (lásd [7]) alapján definiálják. Bár ez a módszer is figyelembe veszi az árazás során a hálózati szerkezetet, azonban egyrészt a termelői hálózaton belüli centralitás alapján egységesen súlyoz szemben az általunk használt termelő-fogyasztó hálózattal, másrészt az árindex súlyait közvetlenül a centralitáshoz köti, míg a mi esetünkben az árindexek az egyes fogyasztók számára különbözőek lehetnek. Fontos megkötés az is, hogy a fogyasztók és termelők száma azonos, ami azonban az általunk bemutatott modellben nem feltétel.

Összességében az látszik, hogy a hasonló problémát vizsgáló tanulmányok jellemzően hálózati játékként vizsgálják a kérdést és kiindulási pontjuk valamilyen kvadratikus hasznossági függvény. Az általunk használt modell mellőzi a hasznossági megalapozást, ezzel szemben egy jól definiált egyedi keresleti függvényre épít. Hangsúlyos szerepe van a hálózati szerkezetet megjelenítő, termelő-fogyasztó-típusú páros gráfnak, ami szintén megkülönbözteti modellünket a korábban vizsgált problémáktól – az árazási magatartásban így a kétfajta szereplő interakciós hálózatából fakadó hatásokat tudjuk vizsgálni. Ez utóbbira mindeddig nem találtunk példát a szakirodalomban.

A cikk további felépítése a következő: a jelen, szakirodalmi kitekintéssel egybekötött, bevezetést követően a második részben felírjuk az alapmodellt, a harmadikban vázoljuk a vizsgálni kívánt problémát, és ismertetjük az egyensúlyi árvektor létezésére, egyértelműségére vonatkozó bizonyítást (főbizonyítás), majd az ezt követő fejezetekben három további (kiegészítő) részbizonyítást mutatunk be. Tanulmányunkat összegzéssel zárjuk.

Itt jegyezzük meg, hogy a (fő)bizonyítást követő további bizonyítások – más-más módszertani eszközök segítségével – az első bizonyítás egyes részleteit reprodukálják. Tehát (mindössze) az első bizonyítás valamely részletét közelítik meg a további (rész)bizonyítások újabb szemszögből és eszközök felhasználásával.

2. Az alapmodell leírása

Induljunk ki egy $N \geq 2$ szereplős cseregazdaságból. Ebben a modellgazdaságban az egyes szereplők interakcióba lépnek egymással, és értékesítik egymás számára termékeiket, illetve a termeléshez szükséges munkaidejüket/munkaóráikat (röviden, munkát). Egy adott termelő csak egyetlen termékárral dolgozik. Minden termelő informált a vele kapcsolatban lévő fogyasztók döntéshozatali szabályaira, valamint a versenytársak áraira nézve. A korlátozott információk a fogyasztók oldaláról jelentkeznek, legalábbis abban az értelemben, hogy csak azon termékárakat ismerik, amely termelőkkel közvetlen kapcsolatban állnak – illetve csak ezeket veszik tekintetbe. Alkalmazzuk a versenyzői piacok szokásos feltevését, miszerint a termelők piaci súlya viszonylag kicsi, így árdöntéseik nincsenek hatással a többiek ármeghatározására, azaz *saját termékáruk az egyetlen döntési változó.* Emellett a szereplők tranzakciós költségeitől eltekintünk, valamint a termékeket végtelenül oszthatónak gondoljuk. Az alapmodellben főszabály szerint oligopolisztikus körülményeket tételezünk fel a termékpiacon, de a munkapiac tökéletesen versenyző. Feltesszük még, hogy a gazdaságban az időegységre eső munkabér homogén, azaz minden termelő ugyanakkora órabért fizet munkavállalóinak. Technikai megjegyzésként előrebocsátjuk, hogy az alábbiakban csak ott és akkor jelezzük a függvényargumentumot, ahol és amikor azt kifejezetten hangsúlyozni szeretnénk.

A szereplők közötti interakciót az (exogén) $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrix írja le, ahol a mátrix i-edik sorának j-edik eleme, $a_{ij} \in \{0,1\}$ azt mutatja meg, hogy a j-edik szereplő fogyaszt-e i-től ($a_{ij} = 1$), vagy sem ($a_{ij} = 0$).

A továbbiakban élesen elhatároljuk a termelői és fogyasztói oldalt, előbbit az $\{1, 2, ..., M\}$, míg utóbbit az $\{1, 2, ..., N - M\}$ halmazzal indexeljük, $N > M \geq 2$. Következésképpen tudjuk, hogy $\mathbf{A} \in \{0,1\}^{M \times (N-M)}$ fennáll.

Tegyük fel, hogy a j-edik szereplő keresletét az i-edik szereplő termékével szemben az x_{ij} keresleti függvény adja meg:

$$x_{ij} = b_{ij} \left[\gamma_j - \epsilon \left(p_i - \overline{p}_j \right) \right], \tag{1}$$

ahol $b_{ij} = a_{ij} / \sum_{k=1}^{M} a_{kj}$, $\gamma_j > 0$ egy rögzített konstans, $\epsilon > 0$ a termékek differenciáltságához kapcsolódó érzékenységi paraméter, p_i a i-edik szereplő termékének ára, $\overline{p}_j$ pedig a j-edik szereplő által érzékelt árindex. Utóbbit a következő súlyozott átlaggal határozzuk meg:

$$\overline{p}_j = \sum_{k=1}^{M} b_{kj} p_k, \tag{2}$$

mivel teljesül, hogy $\sum_{k=1}^{M} b_{kj} = 1$.[1]

A későbbiekre nézve, a könnyebb átláthatóság érdekében b_{ij}-t átírjuk:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_j}, \tag{3}$$

ahol $d_j = \sum_{k=1}^{M} a_{kj}$ a j-edik szereplő fokszámát, jelen kontextusban a fogyasztott termékvariánsok számát jelenti. A b_{ij} értékeket rendezzük a $\mathbf{B}$ mátrixba! Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek a mátrixnak a j-edik oszlopában 0-k és pontosan d_j számú $1/d_j$ érték áll.

Mivel modellünk oligopolisztikus versenyfeltételek között értelmezett, ezért a továbbiakban érdemes feltételezni, hogy minden fogyasztó legalább két termékváltozatot fogyaszt. Következésképpen minden j-re $d_j \geq 2$. Ez pedig azt eredményezi, hogy $b_{ij} \leq 1/2$ minden i és j párra.

[1] A (1) keresleti függvényt nem értelmezzük, ha: *(i)* $\epsilon \to 0$, tehát ha a termékeket vásárló fogyasztók érzéketlenek az árváltozásra; *(ii)* $\epsilon \to \infty$, tehát ha a termékeket vásárló fogyasztók „végtelenül” érzékenyek az árváltozásra; *(iii)* adott fogyasztó által vásárolt termékvariánsok száma minden határon túl növekszik (ez burkoltan feltételezi a termelők számának minden határon túli növekedését). Következésképpen a (1) szerinti keresleti függvény biztosan nem alkalmas a tökéletes verseny leírására. Emellett az alábbiakban bevezetünk még egy korlátozást, amely a monopóliumok modellezését zárja ki. Tehát oligopolisztikus körülményeket fogunk vizsgálni, megállapításainkat ezt szem előtt tartva kell értékelni. Megjegyezzük, hogy a vizsgált keresleti függvény egy adott fogyasztó összkeresletének a termékvariánsok egy lehetséges leosztását adja meg.

Feltételezzük, hogy a szereplők jól informáltak és ismerik a termékükkel szemben támasztott keresletet:

$$y_i = \sum_{j=1}^{N-M} x_{ij} = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j - \epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}p_i - \epsilon \sum_{k=1}^{M} b_{kj}p_k, \tag{4}$$

vagyis a termelők termékei iránti kereslet nemcsak az adott termelő, hanem elvben minden más termelő áraitól is függ. Termelési oldalról feltesszük, hogy az i-edik termelő pontosan y_i mennyiséget termel:

$$y_i(\mathbf{p}) = \alpha \ell_i, \tag{5}$$

ahol $\alpha > 0$ a munka termelékenységi paramétere, ami az időegység alatt előállított termékmennyiséget mutatja meg; $\ell_i \geq 0$ a munkaórák száma. Feltételezve még, hogy minden termelő egységesen $\omega > 0$ órabért fizet, az i-edik termelő $\pi_i(\mathbf{p}) = p_i y_i - \omega \ell_i$ nyereségfüggvénye átírható[2]:

$$\pi_i(\mathbf{p}) = p_i y_i - \frac{\omega y_i}{\alpha}, \tag{6}$$

ahol $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_M)^\mathsf{T}$ az árakat tartalmazó oszlopvektor (árvektor). A fenti forma kiemeli, hogy az egyes termelők profitja nemcsak saját, hanem minden más termelő árválasztásától is függ.

A fent leírtakat felhasználva egy tiszta stratégián alapuló játékot fogunk definiálni, megadva annak normálformáját. Ebben a játékban a játékosok $\mathcal{I}$ halmazát a termelők alkotják, ezért $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., M\}$. Az i-edik termelő stratégiahalmaza $A_i = [0, \infty]$, ami azt jelenti, hogy bármilyen nemnegatív árat megállapíthat. Az A_i elemeit az eddigieknek megfelelően p_i fogja jelölni. Következésképpen $\mathbf{p} \in \times_{i=1}^{M} A_i$ egy stratégia- vagy akcióprofilt ad meg. Bevezetjük továbbá az $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_M\}$ tiszta stratégiahalmazok alkotta halmazt. Az i-edik termelő kifizetőfüggvénye π_i, illetve $\mathcal{P} = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_M\}$ ezek halmaza.

2.1. Definíció. Az eddigieket figyelembe véve, a szóban forgó *játék normálformáján* a

$$\mathcal{G} = \langle \mathcal{I}, \mathcal{A}, \mathcal{P} \rangle \tag{7}$$

struktúrát értjük.

Célunk a továbbiakban olyan $\mathbf{p}$ árvektor létezésének és egyértelműségének igazolása, amelyre igaz, hogy

$$\pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) \geq \pi_i\big(p_i^{'}, \mathbf{p}_{-i}\big), \tag{8}$$

ahol $\mathbf{p}_{-i} = (p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_M)^\mathsf{T}$, illetve $p_i^{'} \in A_i$ a p_i egyensúlyi termékárral nem feltétlenül azonos termékár. Következésképpen egy *tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlyt keresünk.*

[2]Megjegyezzük, hogy az említett speciális alakú termelési függvény azt eredményezi, hogy munkafelhasználás nélkül nem lehetséges termelni.

3. Az egyensúlyi árvektor egzisztenciájának és unicitásának igazolása (főbizonyítás)

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy az egyes szereplők milyen feltételek mellett képesek profit-maximalizáló árat meghatározni. Az egyensúlyi, tehát minden i termelő számára optimális árvektor meghatározásához az i-edik szereplőnek meg kell oldania a

$$\pi_i^{BR}(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \arg\max_{p_i \in A_i} \left\{ p_i y_i - \frac{\omega y_i}{\alpha} \right\}, i = 1, 2, ..., M \tag{9}$$

feladatot. Ebben az összefüggésben p_i az egyetlen változó, a többi termelő termékára ($\mathbf{p}_{-i}$) pedig a korábbi feltételezésünk szerint adott. Így π_i^{BR} az i-edik termelő legjobb-válasza (erre utal a jobb felső index)[3] a versenytársak ($\mathbf{p}_{-i}$) árai mellett.

Az elsőrendű szükséges feltételt a következő egyenlet adja meg ($i = 1, 2, ..., M$):

$$\begin{aligned}
\partial_i \pi_i =& y_i + p_i \partial_i y_i - \frac{\omega}{\alpha} \partial_i y_i = 0 \\
& \Updownarrow \\
\partial_i \pi_i =& \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j + \epsilon \left[\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{k=1}^{M} b_{ij} b_{kj} p_k - p_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} - p_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\big(1 - b_{ij}\big) \right] \\
& + \frac{\epsilon\omega}{\alpha} \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\big(1 - b_{ij}\big) = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

ugyanis a korábbiakban bevezetett fogalmakból tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}
y_i(\mathbf{p}) =& \sum_{j=1}^{N-M} x_{ij} = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \left[\gamma_j - \epsilon \left(p_i - \overline{p}_j \right) \right] = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j - \epsilon p_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \\
& + \epsilon \sum_{j=1}^{N-M} \sum_{k=1}^{M} b_{ij} b_{kj} p_k
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\partial_i y_i = -\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\big(1 - b_{ij}\big). \tag{12}$$

Ezt felhasználva ellenőrizhető, hogy az elsőrendű feltételrendszert tömörítő mátrixegyenlet:

$$\mathbf{B\Gamma 1}_{N-M} + \epsilon\big(\mathbf{B}\mathbf{B}^\top - \widetilde{\mathbf{B}} - \mathbf{C}\big)\mathbf{p} + \frac{\epsilon\omega}{\alpha}\mathbf{C1}_M = \mathbf{0}_M, \tag{13}$$

[3] Be fogjuk látni, hogy π_i^{BR} valóban az i-edik termelő legjobb válasza, vagyis az egyensúlyi árvektor egyben *tiszta stratégia melletti Nash-egyensúly* (lásd [15, 16]).

ahol $\mathbf{\Gamma}$ diagonális mátrix, amely főátlójának i-edik eleme γ_i; $\widetilde{\mathbf{B}}$ diagonális mátrix, amely főátlójának i-edik eleme $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}$; $\mathbf{C}$ diagonális mátrix, amely főátlójának i-edik eleme $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\big(1-b_{ij}\big)$, illetve $\mathbf{1}_{N-M}$, $\mathbf{1}_M$ a megfelelő méretű, csupa 1-esből álló összegzővektor és $\mathbf{0}_M$ a csupa 0-t tartalmazó megfelelő méretű oszlopvektor.

Ha $\mathbf{Q}=\widetilde{\mathbf{B}}+\mathbf{C}-\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal$ invertálható, akkor a $\mathbf{p}$ árvektor egyértelműen meghatározott:

$$\mathbf{p}=\frac{1}{\epsilon}\mathbf{Q}^{-1}\left(\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}\mathbf{1}_{N-M}+\frac{\epsilon\omega}{\alpha}\mathbf{C}\mathbf{1}_M\right). \tag{14}$$

Annak érdekében, hogy a probléma megoldásához közelebb jussunk, olyan feltételt igyekszünk meghatározni, amely teljesülése esetén az említett inverz létezik. Ennek során felhasználjuk, hogy amennyiben egy mátrix főátlóján álló minden elem abszolútértéke szigorúan nagyobb a főátlón kívüli sorelemek abszolútértékeinek összegénél (*diagonális dominancia*), akkor a mátrixnak van inverze[4]. Ha $\mathbf{Q}$ i-edik sorának k-adik eleme q_{ik}, akkor az előbbi verbálisan megfogalmazott állítás formálisan azt jelenti, hogy $|q_{ii}|>\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}|q_{ik}|$. Az utóbbi feltétel a következő konkrét egyenlőtlenség teljesülését kívánja meg:

$$2\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\big(1-b_{ij}\big)>\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj}. \tag{15}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala átírható:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj}&=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}}{d_j}\frac{a_{kj}}{d_j}=\sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}}{d_j^2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}a_{kj}=\sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}(d_j-a_{ij})}{d_j^2}\\&=\sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}}{d_j}\left(1-\frac{a_{ij}}{d_j}\right)=\sum_{j=1}^{N-M}b_{ij}\big(1-b_{ij}\big).\end{aligned} \tag{16}$$

Innen pedig adódik, hogy elegendő megkövetelnünk, hogy

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\big(1-b_{ij}\big)>0.^5 \tag{17}$$

Ez teljesül, ha tetszőleges i termelő esetén létezik olyan b_{ij} érték, amelyik 0-tól és 1-től különbözik. Tehát $\mathbf{B}$-nek olyannak kell lennie, hogy minden sorában kell legyen legalább egy 0-tól és 1-től különböző érték. Ekkor viszont biztosan lesz olyan j fogyasztó minden egyes i termelő esetén, amelyre teljesül, hogy $d_j\geq 2$.

[4] Utóbbi állítás *Gersgorin tételének* (lásd [12]) a következménye.

[5] Megjegyezzük, hogy az egyenlőtlenség bal oldala a $\widetilde{\mathbf{B}}-\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal$ főátlójának i-edik eleme. Ez pedig azt jelenti, hogy $\widetilde{\mathbf{B}}\neq\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal$.

Ez pontosan akkor teljesül, ha minden termelő esetén létezik az adott termelővel kapcsolatban álló olyan fogyasztó, amely legalább kétféle terméket fogyaszt. A közgazdasági intuíció az eredmény mögött az, hogy az (1) szerint, ha valamely fogyasztó csak egyetlen termelőtől vásárol, úgy nem értelmezhető az árérzékenysége: az ártól függetlenül konstans kereslettel jelentkezik az adott termelő irányába, így utóbbi számára irrelevánssá válik az árdöntés, hiszen a konstans mennyiséget tetszőleges áron képes értékesíteni. Másképpen a (17) feltétel úgy is értelmezhető, hogy a keresett árvektor pontosan akkor létezik egy általunk használt interakciós struktúrában, ha minden termelő a saját árdöntéséhez figyelembe tud venni legalább még egy termelői árat, hiszen a vele kapcsolatban álló fogyasztó(k) érzékelt árindexét feltételezésünk szerint ismeri. Megjegyezzük, hogy $d_j \geq 2$ minden j-re teljesül, hiszen ezt már az alapmodell leírásakor feltettük.

Az iménti gondolatmenet azonban még nem kielégítő. Be kell látnunk ugyanis, hogy $\mathbf{p}$ minden koordinátája nemnegatív. Ennek igazolásához tekintsük a

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_M - \kappa \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{\kappa}(\mathbf{I}_M - \mathbf{V}) \tag{18}$$

mátrixot, ahol $0 < \kappa \leq 2/(N-M)$ konstans és $\mathbf{I}_M$ az $M \times M$-es egységmátrixot jelöli.[6] Ha teljesül, hogy $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$, akkor $\mathbf{Q}^{-1} = \kappa(\mathbf{I}_M - \mathbf{V})^{-1} = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}^n$ írható.[7] Emellett, ha még az is igaz, hogy a $\mathbf{V}$ minden eleme nemnegatív, akkor $\mathbf{Q}^{-1}$ elemei biztosan nemnegatívak, tehát $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}_M$ (sőt $\mathbf{p} > \mathbf{0}_M$, mert $\mathbf{Q}^{-1}$-nek nem lehet csupa 0 sora).

Első lépésben vizsgáljuk $\mathbf{V}$ főátlóbeli elemeinek abszolútértékét és egy adott főátlóbeli elemmel azonos sorban álló diagonálison kívüli elemek abszolútértékeinek összegét. A mátrix i-edik főátlóbeli elemének abszolútértékére igaz, hogy

$$\left| \kappa \left[\sum_{j=1}^{N-M} b_{i,j}^2 + \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(b_{ij}-1) - \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \right] + 1 \right| \leq 1 - 2\kappa \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\bigl(1 - b_{ij}\bigr), \tag{19}$$

mivel $-1/4 \leq b_{ij}(b_{ij}-1) \leq 0$ minden i-re. A főátlón kívüli elemek abszolútértékeinek összegére teljesül, hogy

$$\kappa \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M} \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} b_{kj} = \kappa \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\bigl(1 - b_{ij}\bigr). \tag{20}$$

Mindebből pedig már megkapjuk, hogy $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$, továbbá megfelelő κ választása mellett az is teljesül, hogy $\mathbf{V}$ elemei nemnegatívak, sőt legalább a főátlóbeli

[6] Látható, hogy $\mathbf{V}$ függ κ értékétől, azaz eltérő κ eltérő $\mathbf{V}$-t eredményez. Ezt azonban a jelölés szintjén nem hangsúlyozzuk.

[7] Az imént megfogalmazott állítás annak a következménye, hogy ha $\mathbf{V}$ sajátértékei a komplex egységkörön belül vannak, akkor a szóban forgó felírás létezik. Mivel pedig $\rho(\mathbf{V}) \leq \|\mathbf{V}\|_\infty$, ahol $\rho(\mathbf{V})$ a $\mathbf{V}$ mátrix spektrálsugara, így, ha $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$, akkor ez már garantálja a fenti végtelen sor konvergenciáját.

elemei pozitívak. Ezzel beláttuk, hogy az egyensúlyi árvektor koordinátái nemnegatívak, sőt egyetlen koordinátája sem 0.[8]

Az eddigieket foglaljuk össze a következő tételben:

3.1. TÉTEL. *Ha minden termelővel kapcsolatban áll (tőle vásárol) legalább egy olyan fogyasztó, amely legalább egy másik termékvariánst is fogyaszt, akkor a* (9) *problémának létezik megoldása. A bizonyítás szerkezetéből látható, hogy egyetlen megoldás adódik.*

3.1. Megjegyzés. A tétel feltétele automatikusan teljesülni fog, hiszen előzőleg feltettük, hogy $d_j \geq 2$ minden j-re.

3.2. TÉTEL. *A kapott árvektor valóban tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly, azaz* (10) *megoldása egyben megoldása a* (9) *feladatnak is.*

Bizonyítás. Ennek igazolása a $\partial_i^2 \pi_i$ másodrendű (parciális) derivált vizsgálatára korlátozható minden egyes i termelőre nézve. Ha ez minden i-re negatív, akkor a p_i termékár megoldása a (9) feladatnak. Az említett deriválást elvégezve, minden i-re adódik, hogy $\partial_i^2 \pi_i = -2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \big(1 - b_{ij}\big)$. Ez viszont negatív, hiszen $d_j \geq 2$ minden j-re. □

4. Első részbizonyítás

Ebben a szakaszban egy olyan gondolatmenetet mutatunk be $\mathbf{Q}^{-1}$ létezésére és nemnegativitására vonatkozóan, amelyik a *Perron–Frobenius tételeket* használja fel (lásd [22], [23]).

Bizonyítás. Korábbi levezetéseink miatt tudjuk, hogy a $\mathbf{Q}\mathbf{1}_M$ vektor összes koordinátája pozitív, valamint az i-edik helyen álló elem $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \big(1 - b_{ij}\big)$. Ebből persze az is következik, hogy $\|\mathbf{Q}\|_\infty > 0$. Ezután írjuk át a $\mathbf{Q}$ mátrixot $\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - (\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})$ alakúra. Ebből pedig már következik, hogy

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{1}_M > (\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})\, \mathbf{1}_M \geq \mathbf{0}_M, \tag{21}$$

sőt az első egyenlőtlenség jobb oldalán álló vektor adott koordinátája biztosan szigorúan kisebb a bal oldalon álló vektor megfelelő koordinátájánál. A $\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}$ mátrix legnagyobb sajátértékét $\rho(\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})$-val jelölve, biztosan teljesülni fog a

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty \geq \rho(\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}) \tag{22}$$

[8] A $\mathbf{Q}^{-1}$ elemeinek nemnegatívitása más módon is belátható. A *binomiális invertálás tétele* (lásd [21]) szerint: $\big(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big[(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal\big]^n (\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C})^{-1}$. Mivel $\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}$ inverze az a diagonális mátrix, amelynek i-edik főátlóbeli eleme a $\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}$ diagonálisban álló i-edik elemének az inverze, így az iménti végtelen összeg minden tagja olyan mátrix, amelynek nemnegatív elemei vannak.

egyenlőtlenség. Mivel azonban biztosan van olyan $K \in (0,1)$ valós szám, hogy

$$K\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{1}_M > \left(\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}\right)\mathbf{1}_M, \tag{23}$$

ezért megállapítható, hogy

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty > \rho(\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}). \tag{24}$$

Mindebből következik, hogy $\mathbf{Q}^{-1}$ létezik és elemei nemnegatívak. $\square$

5. Második részbizonyítás

Ebben a szakaszban a *Banach-féle fixponttételre* (lásd [4]) alapozva mutatunk egy figyelemre méltó részbizonyítást a (10) egyenletek alkotta egyenletrendszer megoldhatóságára és a megoldás egyértelműségére.

Bizonyítás. Első lépésben fejezzük ki p_i-t a (10) egyenlet alapján az alábbi módon ($i = 1, 2, ..., M$):

$$p_i = \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1-b_{ij}\right)} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k}{2\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1-b_{ij}\right)} + \frac{\omega}{2\alpha}}_{F_i(\mathbf{p})}. \tag{25}$$

A leírtakból következik, hogy a

$$p_i = F_i(\mathbf{p}), i = 1, 2, ..., M \tag{26}$$

fixpontprobléma megoldása pontosan (10) egyenletrendszer megoldását adja.

Néhány ténymegállapítással folytatjuk. Mivel a (16) gondolatmenet alapján láttuk, hogy $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1-b_{ij}\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj}$ igaz, ezért egy átosztás után teljesül, hogy

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1-b_{ij}\right)} = \sum_{j=1}^{N-M} w_{ij} = 1 \tag{27}$$

és $w_{ij} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj} / \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1-b_{ij}\right)$ ($i = 1, 2, ..., M$, $j = 1, 2, ..., N-M$).

Most nézzük a következő becslést, ahol $\widehat{\mathbf{p}}$ egy $\mathbf{p}$-vel nem feltétlenül megegyező nemnegatív árvektor:

$$\begin{aligned} |F_i(\mathbf{p}) - F_i(\widehat{\mathbf{p}})| &= \frac{1}{2}\left|\frac{\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}\left(p_k - \widehat{p}_k\right)}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1-b_{ij}\right)}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\max_k |p_k - \widehat{p}_k| \sum_{j=1}^{N-M} w_{ij} = \frac{1}{2}\max_k |p_k - \widehat{p}_k|. \end{aligned} \tag{28}$$

Mivel az egyenlőtlenséget minden F_i teljesíti adott $\mathbf{p}$ és $\widehat{\mathbf{p}}$ mellett, így

$$\max_i |F_i(\mathbf{p}) - F_i(\widehat{\mathbf{p}})| \leq \frac{1}{2} \max_k |p_k - \widehat{p}_k| . \tag{29}$$

Ha pedig $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_M)^{\mathsf{T}}$, akkor a

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{p}) - \mathbf{F}(\widehat{\mathbf{p}})\|_\infty \leq q \|\mathbf{p} - \widehat{\mathbf{p}}\|_\infty \tag{30}$$

kontrakció teljesül $q = 1/2$ kontrakciós konstanssal. Mivel $\mathbf{F}$ a $\times_{i=1}^M A_i$ halmazból önmagába képez, ezért a Banach-féle fixponttétel miatt pontosan egy nemnegatív árvektor adódik.[9] $\square$

6. Harmadik részbizonyítás

Ebben a szakaszban [19] és [20] eredményeit alkalmazva mutatunk egy további részbizonyítást a keresett Nash-egyensúly létezésére és egyértelműségére.

Bizonyítás. A $\mathbf{p}$ árvektor a (8) értelmében pontosan akkor tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly, ha eleget tesz a

$$-\mathbf{G}(\mathbf{p})\big(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{'}\big) \geq 0 \tag{31}$$

variációs egyenlőtlenségnek a $\times_{i=1}^M A_i$ halmazon, ahol

$$\begin{gathered} \mathbf{G} : \times_{i=1}^M A_i \to \times_{i=1}^M A_i, \mathbf{p} \xmapsto{\mathbf{G}} (G_1(\mathbf{p}), G_2(\mathbf{p}), ..., G_M(\mathbf{p})) \\ G_i = \partial_i \pi_i, i = 1, 2, ..., M, \end{gathered} \tag{32}$$

valamint $\mathbf{p}^{'} \in \times_{i=1}^M A_i$ tetszőleges árvektor.

Az A_i nemüres, zárt és konvex minden i-re, így a $\times_{i=1}^M A_i$ halmazra is ugyanez igaz. Korábban azt is láttuk, hogy π_i konkáv p_i-ben minden i-re, ezért [13] alapján pszeudokonkáv is. Mindez biztosítja az iménti variációs egyenlőtlenség teljesülését a $\times_{i=1}^M A_i$ halmazon.

Ezenkívül, ha $\mathbf{G}$ szigorúan monoton, akkor egyetlen egyensúlyi árvektor van. Legyen $\widehat{\mathbf{p}} > \mathbf{p}$ egy újabb egyensúlyi árvektor. Ekkor

$$-\mathbf{G}(\mathbf{p})\big(\mathbf{p} - \widehat{\mathbf{p}}\big) \geq 0 \tag{33a}$$

$$-\mathbf{G}(\widehat{\mathbf{p}})\big(\widehat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\big) \geq 0. \tag{33b}$$

[9] Megjegyezzük, hogy a Banach-féle fixponttétel egy további lényeges következménye, hogy a rendszert tetszőleges $\mathbf{p}_0 \geq 0$ kezdőpontból indítva a $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{p}_n)$ iteráció az egyensúlyi árvektorhoz konvergál. Ez rámutat arra, hogy amennyiben az árakat valamilyen sokkhatás kimozdítja az egyensúlynak megfelelő helyzetből, a termelők racionális profitmaximalizáló döntései nyomán oda visszatér akkor is, ha az ármeghatározás nem szimultán, hanem az egyes termelők a versenytársak árait megfigyelve és azokat adottnak véve fokozatosan módosítják áraikat a profitfüggvényük alapján.

Az egyenlőtlenségeket összeadva

$$\big(\mathbf{G}(\widehat{\mathbf{p}}) - \mathbf{G}(\mathbf{p})\big)\big(\mathbf{p} - \widehat{\mathbf{p}}\big) \geq 0. \tag{34}$$

Ez az egyenlőtlenség nem teljesül a szigorú monotonitás miatt, így $\widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$.

Egyszerűen igazolható, hogy ha $p_i^{''} > p_i^{'}$, akkor

$$x_{ij}\big(p_i^{''}\big) - x_{ij}\big(p_i^{'}\big) = -\epsilon b_{ij}\left(1 - b_{ij}\right)\left(p_i^{''} - p_i^{'}\right) < 0, \tag{35}$$

teljesül, illetve ezentúl

$$\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1 - b_{ij}\right)\left(p_i^{''} - p_i^{'}\right) > 0 \tag{36}$$

is igaz. Innen azonnal kapjuk, hogy a

$$\partial_i \pi_i\big(p_i^{'}\big) - \partial_i \pi_i\big(p_i^{''}\big) = 2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1 - b_{ij}\right)\left(p_i^{''} - p_i^{'}\right) > 0 \tag{37}$$

megváltozás pozitív. Ezzel beláttuk **G** szigorú monotonitását, ami tehát az unicitás elégséges feltétele. □

7. Összegzés

Ebben a dolgozatban egy olyan piaci modellt vázoltunk fel, amelyben a termelőket és a fogyasztókat exogén hálózati struktúra kapcsolja össze. Amennyiben nem teljes, ez a hálózat korlátozza az eladó-vevő interakciókat és ezáltal az árinformációk terjedését/rendelkezésre állását. Fő kérdésünk az volt, hogy az adott lineáris keresleti és termelési függvények mellett, oligopolisztikus versenykörülmények közepette és – adott esetben – korlátozott informáltság mellett létezik-e egyensúlyi árvektor, méghozzá tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly értelmében. Kérdésünket tehát alapvetően egy nemkooperatív játékelméleti kontextusban vetettük fel.

A legfontosabb eredményünk alapján egy jól meghatározott feltételrendszer (megfelelő keresleti függvény, termelési függvény stb.) mellett tetszőleges, közgazdasági szempontból releváns hálózati szerkezet esetén egyértelműen létezik egyensúlyi árvektor. Az egyensúlyi árvektor létezésére és egyértelműségére egy (fő)bizonyítást adtunk, majd a további részbizonyításokban ennek egyes részleteit láttuk be (újra) más-más módszertani eszközökkel. A (fő)bizonyítás során elsősorban a Gersgorin-tételre, a másodikban részbizonyításban a Perron–Frobenius-tételre, a harmadikban részbizonyításban a Banach-féle fixponttételre, míg az utolsó részbizonyításban a variációs egyenlőtlenségek témakörének eredményeire építettünk. Hangsúlyozzuk, hogy az általunk vizsgált feltételrendszer, illetve alapprobléma a releváns szakirodalomhoz képest új kontextust jelent: a piac két oldalát expliciten megjelenítő és korlátozott eladó-vevő kapcsoltságot feltételező modellben az ármeghatározás kérdéseit eddig nem vizsgálták. Ezenkívül a fő- és az egyes részbizonyítások során bemutatott módszerek sem feltétlenül dominálnak a szóban forgó kérdéskörrel foglalkozó munkákban, így ez is újdonságnak tekinthető.

További kutatások tárgya lehet a piaci szereplőket összekapcsoló hálózat szerkezete és az egyensúlyi árvektor egyes tulajdonságai közötti kapcsolat feltárása.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást az Innovációs és Technológiai Minisztérium Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Programja finanszírozta, a Pécsi Tudományegyetem 4. tématerületi programja keretében. A szerzők ezúton szeretnék megköszönni a bírálók körültekintő és építő jellegű észrevételeit, amely a tanulmány színvonalának javításához nagyban hozzájárult.

Hivatkozások

[1] D. Acemoglu, V. M. Carvalho, A. Ozdaglar and A. Tahbaz-Salehi: *The Network Origins of Aggregate Fluctuations*, Econometrica, Vol. **80**, pp. 1977-2016 (2012). DOI: 10.3982/ECTA9623

[2] M. Aoyagi: *Bertrand competition under network externalities*, Journal of Economic Theory, Vol. **178**, pp. 517-550 (2018). DOI: 10.1016/j.jet.2018.10.006

[3] C. Ballester, A. Calvó-Armengol and Y. Zenou: *Who's Who in Networks. Wanted: The Key Player*, Econometrica, Vol. **74**, pp. 1403-1417 (2006). DOI: 10.1111/j.1468-0262.2006.00709.x

[4] S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, Vol. **3**, pp. 133-181 (1922). DOI: 10.4064/fm-3-1-133-181

[5] M. Belhaj, Y. Bramoullé and F. Deroïan: *Network games under strategic complementarities*, Games and Economic Behavior, Vol. **88**, pp. 310-319 (2014). DOI: 10.1016/j.geb.2014.10.009

[6] F. Bloch, and N. Quérou: *Pricing in social networks*, Games and Economic Behavior, Vol. **80**, pp. 243-261 (2013). DOI: 10.1016/j.geb.2013.03.006

[7] P. Bonacich: *Power and Centrality: A Family of Measures*, American Journal of Sociology, Vol. **92**, pp. 1170-1182 (1987). DOI: 10.1086/228631

[8] Y. Bramoullé and R. Kranton: M. D'amours, *Strategic Interaction and Networks*, American Economic Review, Vol. **104**, pp. 898-930 (2014). DOI: 10.1257/aer.104.3.898

[9] A. Calvó-Armengol, E. Patacchini and Y. Zenou: *Peer Effects and Social Networks in Education*, The Review of Economic Studies, Vol. **76**, pp. 1239-1267 (2009). DOI: 10.1111/j.1467-937X.2009.00550.x

[10] Y.-J. Chen, Y. Zenou and J. Zhou: *Competitive pricing strategies in social networks*, The RAND Journal of Economics, Vol. **49**, pp. 672-705 (2018). DOI: 10.1111/1756-2171.12249

[11] J. De Martí and Y. Zenou: *Network games with incomplete information*, Journal of Mathematical Economics, Vol. **61**, pp. 221-240 (2015). DOI: 10.1016/j.jmateco.2015.10.002

[12] S. Gerschgorin: *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Izvestija Akademii Nauk SSSR, Serija Matematika, Vol. **7**, pp. 749-754 (1931).

[13] O. Mangasarian: *Pseudo-Convex Functions*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control, Vol. **3**, pp. 281-290 (1965). DOI: 10.1137/0303020

[14] J. F. Nash: *Equilibrium Points in n-Person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. **36**, pp. 48-49 (1950). DOI: 10.1073/pnas.36.1.48

[15] J. Nash: *Non-Cooperative Games*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. **54**, pp. 286-295 (1951). DOI: 10.2307/1969529

[16] P. Ushchev and Y. Zenou: *Price competition in product variety networks*, Games and Economic Behavior, Vol. **110**, pp. 226-247 (2018). DOI: 10.1016/j.geb.2018.04.002

[17] D. Acemoglu, A. Ozdaglar and A. Tahbaz-Salehi: *Networks, Shocks, and Systemic Risk*, in: Y. Bramoulle, A. Galeotti, B. Rogers (eds.), The Oxford Handbook of Economics and Networks, Ch. 21. Oxford University Press, New York, NY, pp. 569-607 (2016). DOI: 10.1093/oxfordhb/9780199948277.013.17

[18] O. Candogan, K. Bimpikis and A. Ozdaglar: *Optimal Pricing in the Presence of Local Network Effects*, in: A. Saberi (ed.), Internet and Network Economics, 6th International Workshop, WINE 2010, Stanford, CA, USA, December 13-17, 2010, Proceedings, Vol. **6484**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 118-132 (2010). DOI: 10.1007/978-3-642-17572-5_10

[19] D. Gabay and H. Moulin: *On the uniqueness and stability of Nash-equilibria in noncooperative games*, in: A. Bensoussan, P. Kleindorfer, C. S. Tapiero (eds.), Applied Stochastic Control of Econometrics and Management Science, Ch. 9. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, NE, pp. 271-293 (1980).

[20] A. Nagurney: *Network Economics*: *A Variational Inequality Approach*, revised 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, MA (1999). DOI: 10.1007/978-1-4757-3005-0

[21] S. J. Press: *Appied Multivariate Analysis*: *Using Bayesian and Frequentist Methods of Inference*, 2nd ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY. (2005).

[22] J. Woods: *Mathematical economics*: *topics in multi-sectoral economics*, Prentice Hall Press, London, UK (1978).

[23] E. Zalai: *Matematikai közgazdaságtan II.*: *Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések*, 2. átdolgozott és bővített kiadás, Akadémiai Kiadó, Budapest (2012).

Szabó Balázs a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar Gazdálkodástani Doktori Iskolájának hallgatója, emellett az FIKP pályázat keretében a karon tudományos segédmunkatárs, valamint óraadó. Kutatási területe egyrészt a matematikai közgazdaságtan (többszereplős modellek, piacszerkezetek), másrészt a kvantitatív menedzsment (beszállítói hálózatok, árdinamika) területére esik. Az utóbbi témakörben társzerzős publikációja jelent meg a Szigma matematikai közgazdaságtani folyóirat 2019/4. számában.

SZABÓ BALÁZS
Pécsi Tudományegyetem
Közgazdaságtudományi Kar
7622 Pécs, Rákóczi út 80.
szabo.balazs@pte.hu

Sebestyén Tamás a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának egyetemi docense. 2011-ben szerzett PhD fokozatot és 2017-ben habilitált a Pécsi Tudományegyetemen. Tagja a 2012-ben létrejött MTA-PTE Innováció és gazdasági növekedés kutatócsoportnak. Kutatási területe a gazdaságmodellezés, annak mainstream oldala mellett a határterületek, kifejezetten a hálózatelmélet és az ágens alapú modellezés standard közgazdasági modellekkel való összekapcsolása. Publikációi e területeken vezető hazai és nemzetközi folyóiratokban jelentek meg. Közreműködője több hazai és nemzetközi, regionális gazdasági növekedési modell kialakítását célzó kutatási projektnek.

SEBESTYÉN TAMÁS
Pécsi Tudományegyetem
Közgazdaságtudományi Kar
7622 Pécs, Rákóczi út 80.
sebestyent@ktk.pte.hu

PRICE EQUILIBRIUM UNDER OLIGOPOLISTIC CIRCUMSTANCES IN CASE OF IMPERFECT INFORMATION

Balázs Szabó, Tamás Sebestyén

In our paper under oligopolistic circumstances we analysed what does incomplete connectivity, i.e. the imperfection of information imply on price formation. This approach is a novelty in comparison with some of the standard modelling frameworks, which assume complete connectivity and the exact knowledge of the aggregate price index. In our model connectivity is arbitrary, which leads to the distinctness of perceived price indices concerning each agent, moreover, the symmetry of the standard model is also violated. Supposing market clearing we prove that in case intuitive assumptions hold, there exists a nonnegative equilibrium price vector (pure strategy Nash equilibrium). In our work we put emphasis on the methodological side of the model, first and foremost our aim is to demonstrate existence and other supplementary proofs.

Keywords: oligopolistic competition, equilibrium price vector, diagonal dominance, Gershgorin's theorem, Perron–Frobenius theorems, Banach fixed point theorem, variational inequality.

Mathematics Subject Classification (2000): 91Axx, 91Bxx.