Alkalmazott Matematikai Lapok (2022), 1–11.

A KLÍRINGMÁTRIXOK EGYÉRTELMŰSÉGE PÉNZÜGYI HÁLÓZATOKBAN

CSÓKA PÉTER

Az általunk vizsgált pénzügyi hálózatban az ágensek pénzügyi szerződésekkel kapcsolódnak egymáshoz. A négy legelterjedtebb elosztási szabály az arányos, az elsőbbségi, a korlátozott egyenlő díjazás és a korlátozott egyenlő veszteségek elosztási szabály. Mivel a teljesített kifizetések a beérkezett kifizetésektől függenek, koherens elszámolási egyensúlyokat (fixpontokat) keresünk, úgynevezett klíringmátrixokat. Bizonyos helyzetekben több klíringmátrix is megoldás lehet eltérő csődös ágensekkel, további rendszerkockázatot okozva. A tanulmányban összefoglaljuk és szemléltetjük a Csóka és Herings [5] által, a klíringmátrixok egyértelműségére adott elégséges monotonitási feltételeket. A feltételek alkalmazásához particionálni kell az ágenseket, és elemezni kell egy kapcsolódó irányított aciklikus gráfot.

1. Bevezetés

A pénzügyi intézmények közvetlen pénzügyi szerződésekkel vagy korrelált pénzügyi eszközök tartásával hatnak egymásra, és az intézmények közötti elszámolásban a többszörös egyensúly lehetősége további rendszerkockázathoz vezet (Jackson és Pernaud [10]). Ebben a tanulmányban olyan pénzügyi hálózatokat vizsgálunk, ahol az ágensek pénzügyi szerződésekkel kapcsolódnak egymáshoz.

Eisenberg és Noe [7] nagyhatású cikkéhez hasonlóan az általunk elemzett pénzügyi hálózatokban is van az ágenseknek egy induló, tökéletesen likvidnek tekinthető (pénz-)készlete, minden ágens tartozhat valamekkora összeggel a többieknek, a pénzügyi szerződések aktuális értéke szerint. Eisenberg és Noe [7] cikkében minden ágens az arányos felosztás szabályt alkalmazza csőd esetén, azaz a kifizetések arányosak a kötelezettségekkel. A gyakorlatban azonban az elsőbbségi elosztási szabályokat is alkalmazzák, ahol egy prioritási sorrend határozza meg a kötelezettségek rangsorát (például először az államnak, majd a dolgozóknak, majd az előresorolt hitelezőknek kell fizetni, stb.). A szakirodalomban leggyakrabban alkalmazott további két elosztási szabály a korlátozott egyenlő díjazás (mindenkinek azonos összeget fizetve, de maximum a követelését) és a korlátozott egyenlő veszteségek (mindenkinek azonos veszteséget okozva, de maximum a követelését). [16] jól összefoglalja az addigi kapcsolódó tudományos eredményeket, magyar szerzők kapcsolódó cikkei [9], [15].

A tanulmányban összefoglaljuk és szemléltetjük a Csóka és Herings [5] által, a klíringmátrixok egyértelműségére adott elégséges monotonitási feltételeket. A feltételek alkalmazásához particionálni kell az ágenseket, és elemezni kell egy kapcsolódó irányított aciklikus gráfot.

A kapcsolódó szakirodalom szerteágazó. Az aciklikus gráf megjelenik Sziklai, Fleiner és Solymosi [14] cikkében is. Számos tanulmány foglalkozott a klíringmátrixokkal ([2]), [3], [4], [8]), [11] és [13]. A pénzügyi hálózatokat magyar szerzők is elemezték empirikusan ([1], [12]). Csóka és Kondor [6] összefoglalja, hogy az elosztási szabályokon alapuló klíringmátrixok felírhatóak egy egyenletrendszer megoldásaként is, továbbá teljes hálót (complete lattice) alkotnak, mindig létezik egy legkisebb és egy legnagyobb klíringmátrix. Ebben a tanulmányban tehát azt vizsgáljuk, hogy mikor nem esik egybe a legkisebb és a legnagyobb klíringmátrix.

A 2. fejezetben definiáljuk a pénzügyi hálózatokat, a négy leggyakrabban használt elosztási szabályt és az azokon alapuló klíringmátrixokat. A 3. fejezetben egy irányított aciklikus gráffal illusztráljuk a Csóka és Herings [5] által, a klíringmátrixok egyértelműségére adott függőleges térköz elégséges monotonitási feltételeket.

2. Jelölések, definíciók

A legfontosabb jelölések és definíciók bevezetésénél Csóka és Herings [5] műhelytanulmányára támaszkodunk. Egy N *pénzügyi hálózat* az (I, z, L, d) négyessel adható meg, ahol a négy elem jelentése a következő. A véges I halmaz jelöli a a pénzügyi hálózatban lévő *ágensek* halmazát. A $z \in \mathbb{R}^I_+$ vektor jeleníti meg a nemnegatív *induló készletét (endowments)* az ágenseknek, amely az ágensek összes (de a többiekkel szembeni követeléseket nem tartalmazó), teljesen likvidnek feltételezett eszközével egyenlő. Az $L \in \mathbb{R}^{I\times I}_+$ *tartozási mátrix* adja meg az ágensek egymással szembeni tartozásait, ahol L_{ij} az $i \in I$ ágens tartozása a $j \in I$ ágens felé. Az $i \in I$ ágens összes tartozását jelölje $\overline{L}_i = \sum_{j\in I} L_{ij}$.

A $d = (d^i)_{i\in I}$ ágensspecifikus elosztási szabályok (division rule) határozzák meg, hogy ki kinek mennyit fizet. Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya azt adja meg, hogy az i ágens az $E_i \in \mathbb{R}_+$ vagyona függvényében mennyit fizet az I-ben lévő hitelezőinek. Formálisan az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya egy olyan $d^i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^I_+$ függvény, amelyre $d^i_j(E_i) \le L_{ij}$ minden $j \in I$ ágensre és $\sum_{j\in I} d^i_j(E_i) = \min\{E_i, \overline{L}_i\}$. Feltesszük, hogy $L_{ii} = 0$, így az elosztási szabály definíciójából következik, hogy $d^i_i(E_i) = 0$ minden $i \in I$ ágensre. Feltesszük még, hogy minden $i \in I$ ágensre d^i monoton, vagyis minden $j \in I$ ágensre és minden olyan $E_i, E'_i \in \mathbb{R}_+$ vagyonokra, ahol $E_i \le E'_i$, teljesül, hogy $d^i_j(E_i) \le d^i_j(E'_i)$. A klíringmátrixok egyértelműségének vizsgálatához további monotonitási tulajdonságokat definiálunk. Jelölje $\underline{a}_{ij}$ azt a vagyonértéket, amely mellett az i ágens elkezd fizetni a $j \in I$ ágensnek $L_{ij} > 0$ esetén, vagyis $d^i_j(E_i) = 0$, ha $E_i \le \underline{a}_{ij}$ és $d^i_j(E_i) > 0$, ha $E_i > \underline{a}_{ij}$.

2.1. Definíció. Legyen $N = (I, z, L, d)$ egy pénzügyi hálózat. Az $i \in I$ ágens $d^i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^I$ elosztási szabálya *erősen monoton*, ha minden olyan $j \in I$ ágensre, amire $L_{ij} > 0$, és minden olyan $E_i, E_i' \in \mathbb{R}_+$ vagyonokra, ahol $0 \leq E_i < E_i' \leq \overline{L}_i$, teljesül, hogy $d_j^i(E_i) < d_j^i(E_i')$. Egy elosztási szabály *pozitív monoton*, ha minden $j \in I$ ágensre, amire $L_{ij} > 0$, és minden $E_i, E_i' \in \mathbb{R}_+$ vagyonokra, ahol $\underline{a}_{ij} \leq E_i < E_i' \leq \overline{L}_i$, teljesül, hogy $d_j^i(E_i) < d_j^i(E_i')$.

Az erős monotonitás azt követeli meg, hogy ha egy csődben lévő ágens vagyona nő, akkor minden nem nulla követeléssel rendelkező hitelezőjének többet fizet. A pozitív monotonitás annyiban gyengébb, hogy ha a csődben lévő ágens vagyona nő, akkor csak azoknak a hitelezőknek fog többet fizetni, akiknek már addig is pozitív összeget fizetett. Lássuk, hogy a négy leggyakrabban használt elosztási szabály milyen monotonitási tulajdonságokat teljesít!

2.2. Definíció. Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya az *arányos elosztási szabály*, ha a $j \in I$ hitelezőnek fizetett összeg

$$d_j^i(E_i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } L_{ij} = 0, \\ \min\left\{\frac{L_{ij}}{\overline{L}_i} E_i, L_{ij}\right\}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az arányos elosztási szabály esetén a vagyont a követelésekkel arányosan osztjuk fel, de mindenki legfeljebb a követelését kaphatja meg. Világos, hogy az arányos elosztási szabály erősen monoton, így pozitív monoton is.

2.3. Definíció. Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya az *elsőbbségi elosztási szabály*, ha van olyan $\pi : I \to \{1, \ldots, |I|\}$ permutáció, amire a $j \in I$ hitelezőnek fizetett összeg

$$d_j^i(E_i) = \max\{0, \min\{L_{ij}, E_i - \sum_{\{k \in I | \pi(k) < \pi(j)\}} L_{ik}\}\},$$

ahol $\{k \in I | \pi(k) < \pi(j)\}$ azon ágensek halmaza, amelyek π szerint j elé soroltak.

Az elsőbbségi elosztási szabály esetén először a $j_1 = \pi^{-1}(1)$ ágens követelését fizetjük, aztán ha még marad vagyon, vagyis $E_i - L_{ij_1} > 0$, akkor a $j_2 = \pi^{-1}(2)$ követelését fizetjük, és így tovább.

Az elsőbbségi elosztási szabály nem pozitív monoton (így nem is szigorúan monoton) a következő példában. Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $L_{11} = 0, L_{12} = 4, L_{13} = 2$, a fizetési sorrend $1 = \pi^{-1}(1), 2 = \pi^{-1}(2), 3 = \pi^{-1}(3)$, és tekintsük az 1-es ágens elsőbbségi fizetési szabályát. Ekkor $E_1 = 4$ esetén $d_1^1 = 0, d_2^1 = 4, d_3^1 = 0$, $E_1 = 5$ esetén pedig $d_1^1 = 0, d_2^1 = 4, d_3^1 = 1$, a második ágensnek pozitív összeget fizettünk $E_1 = 4$ esetén, de $E_1 = 5$ esetén nem fizettünk neki többet.

Az $i \in I$ ágens korlátos egyenlő díjazás elosztási szabályának definiálásához vezessük be a következőket. Ha $E_i > \overline{L}_i$, akkor legyen $\lambda_i = \max_{j \in I} L_{ij}$. Egyébként legyen $\lambda_i \in [0, \max_{j\in I} L_{ij}]$ az

$$\sum_{j\in I} \min\{L_{ij}, \lambda\} = E_i$$

egyenlet egyértelmű megoldása.

2.4. Definíció. Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya a *korlátos egyenlő díjazás (constrained equal awards)* elosztási szabály, ha a $j \in I$ hitelezőnek fizetett összeg

$$d^i_j(E_i) = \min\{L_{ij}, \lambda_i\}.$$

A korlátos egyenlő díjazás esetén minden hitelezőnek azonos összeget fizetünk, de legfeljebb annyit, amennyivel tartozunk nekik.

A korlátos egyenlő díjazás sem pozitív monoton (így nem is szigorúan monoton) a következő példában. Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $L_{11} = 0, L_{12} = 4, L_{13} = 2$, és tekintsük az 1-es ágens korlátos egyenlő fizetési szabályát. Ekkor $E_1 = 4$ esetén $d^1_1 = 0, d^1_2 = 2, d^1_3 = 2$, $E_1 = 5$ esetén pedig $d^1_1 = 0, d^1_2 = 3, d^1_3 = 2$, a harmadik ágensnek pozitív összeget fizettünk $E_1 = 4$ esetén, de $E_1 = 5$ esetén nem fizettünk neki többet.

Az $i \in I$ ágens korlátos egyenlő veszteség elosztási szabályának definiálásához legyen $E_i > \overline{L}_i$ esetén $\mu_i = 0$. Egyébként legyen $\mu_i \in [0, \max_{j\in I} L_{ij}]$ a

$$\sum_{j\in I} \max\{L_{ij} - \mu_i, 0\} = E_i$$

egyenlet egyértelmű megoldása.

2.5. Definíció. Az $i \in I$ ágens d^i elosztási szabálya a *korlátos egyenlő veszteség (constrained equal losses)* elosztási szabály, ha a $j \in I$ hitelezőnek fizetett összeg

$$d^i_j(E_i) = \max\{L_{ij} - \mu_i, 0\}.$$

A korlátos egyenlő veszteség elosztási szabály a korlátos egyenlő díjazás duálisa, ekkor minden hitelező azonos veszteséget szenved el, de legfeljebb a teljes követelését. A korlátos egyenlő veszteség nem szigorúan monoton a következő példában. Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $L_{11} = 0, L_{12} = 4, L_{13} = 2$, és tekintsük az 1-es ágens korlátos egyenlő fizetési szabályát. Ekkor $E_1 = 1$ esetén $d^1_1 = 0, d^1_2 = 1, d^1_3 = 0$, $E_1 = 2$ esetén pedig $d^1_1 = 0, d^1_2 = 2, d^1_3 = 0$. Hiába nőtt a vagyon, a harmadik ágensnek nem fizettünk többet. Ugyanakkor a korlátos egyenlő veszteség elosztási szabály pozitív monoton, mert ha a csődben lévő ágens vagyona nő, akkor minden olyan ágensnek többet fog fizetni, akinek már elkezdett fizetni. Ez teljesül az előző példában is, de nézzük meg két másik vagyonra is ugyanazt a példát. $E_1 = 4$ esetén $d^1_1 = 0, d^1_2 = 3, d^1_3 = 1$, $E_1 = 6$ esetén pedig $d^1_1 = 0, d^1_2 = 4, d^1_3 = 2$.

Az elosztási szabályok az ágensek vagyonától függenek, de pénzügyi hálózatokban az ágensek vagyona a többi ágens fizetésétől is függ, endogénné téve a vagyonszinteket. A pénzügyi hálózatok elemzéséhez vezessük be a $P \in \mathbb{R}_+^{I \times I}$ *fizetési mátrix* fogalmát, ahol P_{ij} adja meg, hogy az $i \in I$ ágens mennyit fizet a $j \in I$ ágensnek. A P fizetési mátrix esetén az i ágens E_i vagyona az eszközérték $a_i(P)$ által adott, ahol

$$a_i(P) = z_i + \sum_{j \in I} P_{ji}.$$

Az $i \in I$ ágens eszközértékből kivonva az általa teljesített kifizetéseket megkapjuk az i ágens saját tőkéjének $e_i(P)$ értékét, ahol

$$e_i(P) = a_i(P) - \sum_{j \in I} P_{ij} = z_i + \sum_{j \in I} (P_{ji} - P_{ij}).$$

A klíringmátrixok definiálásához meg kell ragadnunk, hogy milyen kifizetések lehetségesek. Egy d_i elosztási szabály $\mathcal{F}_i$ értékkészlete megadja a lehetséges fizetések halmazát, ahol

$$\mathcal{F}_i = d_i(\mathbb{R}_+) = \{d_i(E_i) \in \mathbb{R}_+^I \mid E_i \in \mathbb{R}_+\}.$$

Egy P fizetési mátrix *lehetséges*, ha minden $i \in I$ ágensre fennáll, hogy az elosztási szabálya szerint fizet, vagyis $P_i \in \mathcal{F}_i$, ahol P_i a P fizetési mátrix i. sora. A lehetséges fizetési mátrixok halmazát jelölje $\mathcal{P}$, ahol

$$\mathcal{P} = \{P \mid \forall i \in I,\ P_i \in \mathcal{F}_i\}.$$

2.6. Definíció. ([5]) Egy P fizetési mátrix *klíringmátrix* az $N = (I, z, L, d)$ pénzügyi hálózat esetén, ha igaz rá a következő három feltétel:

1. *Lehetségesség:* $P \in \mathcal{P}$.
2. *Korlátolt felelősség:* minden $i \in I$ ágensre $e_i(P) \geq 0$.
3. *Hitelezők elsőbbsége:* minden $i \in I$ ágensre, ha $P_i < L_i$, akkor $e_i(P) = 0$.

A lehetségesség azt követeli meg, hogy minden ágens az elosztási szabálya értékkészletéből válasszon egy elemet. A korlátolt felelősség teljesülése esetén minden ágens saját tőkéje nemnegatív. A hitelezők elsőbbsége szerint ha egy ágens nem fizeti ki az összes tartozását (csődöt jelent), akkor a saját tőkéje nulla lesz. Eisenberg és Noe [7] hasonló definíciót használ akkor, amikor minden ágens csak az arányos elosztási szabályt használhatja. Csóka és Herings [3] megenged ágensspecifikus elosztási szabályokat, de az egészértékű esetet vizsgálja, amikor van egy legkisebb elszámolási egység (pl. cent).

Számos tanulmány foglalkozott a klíringmátrixokkal. Csóka és Kondor [6] összefoglalja, hogy az elosztási szabályokon alapuló klíringmátrixok felírhatóak egy egyenletrendszer megoldásaként is, továbbá a Tarski-féle fixponttételt használva teljes hálót (complete lattice) alkotnak. A mátrixokat elemenként összehasonlítva ebből nemcsak az következik, hogy mindig létezik klíringmátrix, hanem az is, hogy mindig létezik egy legkisebb és egy legnagyobb klíringmátrix is, amelyek persze egybeeshetnek. Ebben a tanulmányban azt vizsgáljuk, hogy mikor nem esik egybe a legkisebb és a legnagyobb klíringmátrix, mint például a következő, Csóka és Herings [5] által adott példában.

2.1. Példa. Legyen $N = (I, z, L, d)$ egy pénzügyi hálózat három ágenssel, $I = \{1, 2, 3\}$, akik az elsőbbségi elosztási szabályt használják a $\pi = (3, 2, 1)$ permutációval. Az 1. táblázatban láthatjuk az induló készleteket, a tartozásokat, a legkisebb (P^-) és a legnagyobb (P^+) klíringmátrixot és az általuk indukált eszköz és saját tőke értékeket.

z		L			P^-		$a(P^-)$	$e(P^-)$
1	0	2	1	0	0	1	1	0
1	2	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	3	3
z		L			P^+		$a(P^+)$	$e(P^+)$
1	0	2	1	0	2	1	3	0
1	2	0	1	2	0	1	3	0
1	0	0	0	0	0	0	3	3

1. táblázat. A P^- és P^+ klíringmátrixok és az általuk indukált eszköz és saját tőke értékek a 2.1. példában

Könnyen ellenőrizhető, hogy a klíringmátrix mindhárom feltétele teljesül mindkét klíringmátrixra, és tetszőleges konvex kombinációjukra is. Vegyük észre, hogy a végső saját tőke vektora mindkét mátrixra azonos, de a csődös ágensek halmaza eltér. A P^- mátrix esetén az 1-es és a 2-es ágens is csődös, míg P^+ esetén nincs csődös ágens.

3. Az egyértelműség egy elégséges feltétele

A klíringmátrixok egyértelműségének vizsgálatához szükségünk van néhány gráfelméleti fogalomra Csóka és Herings [5] műhelytanulmánya alapján. Irányított útnak hívjuk $k' \geq 2$ különböző ágens $(i_1, \ldots, i_{k'})$ sorozatát az M mátrixban, ha minden $k \in \{1, \ldots, k'-1\}$-ra $M_{i_k i_{k+1}} > 0$. A $j \in I$ ágens kapcsolódik az $i \in I$ ágenshez M-ben, ha van egy $(i_1, \ldots, i_{k'})$ irányított út M-ben, amire $i_1 = i$ és $i_{k'} = j$.

Legyen $N = (I, z, L, d)$ egy pénzügyi hálózat. Az ágensek $S \subset I$ halmazát *erősen összekapcsolt komponensnek* hívjuk L-ben, ha S-ben bármely két különböző ágens kapcsolódik egymáshoz L-ben és az S halmaz ebben a tulajdonságban a lehető legnagyobb.

Minden $i \in I$ ágensre legyen $O(i)$ az az erősen összekapcsolt komponens L-ben, amely tartalmazza i-t. Az $\mathcal{O} = \{O(i) \mid i \in I\}$ halmazok particionálják az ágensek I halmazát, ahogy azt egy példában hamarosan illusztráljuk.

Az erősen összekapcsolt komponensekre definiálhatunk egy $(\mathcal{O}, D)$ (meta) irányított gráfot:

$$D = \{(O, O') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid \exists i \in O,\ \exists j \in O',\ L_{ij} > 0\},$$

vagyis az $O, O' \in \mathcal{O}$ különböző elemekre akkor van él O-ból O'-be, ha létezik $i \in O$ és $j \in O'$, amikre $L_{ij} > 0$. Az $O \in \mathcal{O}$ komponens utódai az $(\mathcal{O}, D)$ irányított (meta) gráfban azok az erősen összekapcsolt komponensek, amelyek kapcsolódnak O-hoz $(\mathcal{O}, D)$-ben. Az $(\mathcal{O}, D)$ irányított gráfban nincs kör, különben azt felhasználhatnánk egy nagyobb erősen összekapcsolt komponenshez és ellentmondásra jutnánk. A tartozások irányított gráfját tehát felbonthatjuk olyan komponensekre, amelyeknél egyértelmű, hogy merre „folyik” a tartozások útja a komponensek között. Ezért sorba rendezhetjük az $\mathcal{O}$-ban lévő halmazokat $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_R\}$ módon, ahol $(O_r, O_{r'}) \in D$-ből az következik, hogy $r < r'$, vagyis az utódok számozása mindig magasabb. Természetesen ez a számozás általában nem egyértelmű.

Az $i \in I$ ágens *ciklikus ágens* és a hozzá tartozó $O(i)$ komponens *ciklus*, ha $O(i)$ legalább két elemet tartalmaz. A ciklikus komponensek körbetartozó ágenseket tartalmaznak. A ciklikus ágensek halmazát jelölje C.

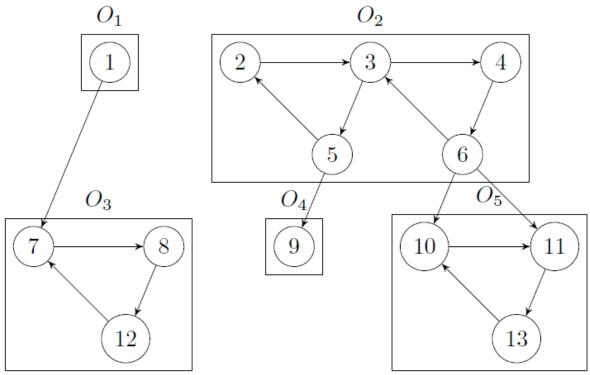
Az $(\mathcal{O}, D)$ irányított (meta) gráfot a Csóka és Herings [5] által adott 3.1. példában illusztráljuk.

3.1. Példa. Tekintsük az $I = \{1, 2, \ldots, 13\}$ ágensek által adott pénzügyi hálózatot. Az 1. ábrán akkor van él i-ből j-felé, ha az i ágensnek pozitív tartozása van j felé.

Az L-beli erősen összekapcsolt komponensek halmaza $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$, ahol $O_1 = \{1\}$, $O_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $O_3 = \{7, 8, 12\}$, $O_4 = \{9\}$, és $O_5 = \{10, 11, 13\}$. Az erősen összekapcsolt komponensek közötti (egyszeres) élek halmaza $D = \{(O_1, O_3), (O_2, O_4), (O_2, O_5)\}$. Az O_1 utóda O_3, O_2 utódai pedig O_4 és O_5. Az $(\mathcal{O}, D)$ irányított gráfban nincs kör. Az O_2, O_3 és O_5 halmazok ciklikusak, a bennük lévő ágensek ciklikus ágensek. Az $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ értékekre az O_r-beli ágenseknek csak olyan $O_{r'}$-beli ágensek felé van pozitív tartozása, ahol $r' \geq r$. Világos, hogy az egy szinten lévő komponensek számozása tetszőlegesen permutálható.

Csóka és Herings [5] a következő elégséges, csak ciklikus ágensekre vonatkozó feltételt bizonyítja a klíringmátrixok egyértelműségére.

3.1. Állítás. *Legyen $N = (I, z, L, d)$ olyan pénzügyi hálózat, amelyre a következő három feltétel teljesül.*



1. ábra. Ágensek, tartozások és az $\mathcal{O}$-ban lévő rendezett halmazok a 3.1. példában.

1. *Ha $O \in \mathcal{O}$ utód nélküli ciklikus komponens, akkor $\sum_{i \in O} z_i > 0$.*
2. *Minden $i \in C$ ágensre, ahol $z_i > 0$, teljesül, hogy d^i pozitív monoton.*
3. *Minden $i \in C$ ágensre, ahol $z_i = 0$, teljesül, hogy d^i erősen monoton.*

Ekkor N klíringmátrixa egyértelmű.

A 3.1. Állítás első feltétele, hogy ha van utód nélküli ciklikus komponens, akkor legalább egy ágens ebben a komponensben pozitív induló készlettel kell rendelkezzen. A második és harmadik feltétel azt várja el, hogy a pozitív induló készletekkel rendelkező ciklikus ágensek elosztási szabálya pozitív monoton, a zérus induló készletekkel rendelkezőké pedig erősen monoton legyen. Ez alapján ha nincs ciklikus ágens (körbetartozás), akkor az ágensek tetszőleges elosztási szabályt használhatnak, a lánc mentén mindenkinél egyértelmű, hogy mennyit fizet, a klíringmátrix egyértelmű.

A bizonyítás alapötlete a következő. Először belátható, hogy minden ciklikus komponensre igaz az állítás. Utána meg kell mutatni, hogy az O_1-ben lévő ágens (ha O_1-nek egy eleme van) vagy ágensek (ha O_1 ciklikus) klíringmátrixa egyértelmű. Ha az erősen összekapcsolt komponensek számára igaz, hogy $R > 2$, akkor indukcióval lehet befejezni a bizonyítást. Ha feltesszük, hogy az állítás igaz minden $r < R$ komponensre, akkor belátható, hogy igaz $r + 1$-re is.

Ha vannak ciklikus ágensek, akkor a leggyakrabban használt négy elosztási szabályra a következőket tudjuk mondani. Mivel az arányos elosztási szabály erősen monoton, ha minden ágens azt használja, akkor az első feltétel teljesülése esetén a klíringmátrix egyértelmű. Mivel sem az elsőbbségi, sem a korlátos egyenlő díjazás nem pozitív monoton, ezért mindkettőnél lehet olyan körbetartozásos példát adni, ahol a klíringmátrix nem lesz egyértelmű. Ha minden ágens a korlátos egyenlő veszteség elosztási szabályt használja, akkor minden ciklikus ágens pozitív induló készlete esetén a klíringmátrix egyértelmű.

4. Köszönetnyilvánítás

A tanulmány a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készült.

Hivatkozások

[1] Berlinger, E., Michaletzky, M., és Szenes, M.: *A fedezetlen bankközi forintpiac hálózati dinamikájának vizsgálata a likviditási válság előtt és után*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **3**, pp. 229–252 (2011).

[2] Csóka, P.: *Az arányos csődszabály karakterizációja körbetartozások esetén*, Közgazdasági Szemle, Vol. **64** No. **9**, pp. 930–942 (2017). DOI: 10.18414/KSZ.2017.9.930

[3] Csóka, P. and Herings, P. J.-J.: *Decentralized clearing in financial networks*, Management Science, Vol. **64** No. **10**, pp. 4681–4699 (2018). DOI: 10.1287/mnsc.2017.2847

[4] Csóka, P. and Herings, P. J.-J.: *An axiomatization of the proportional rule in financial networks*, Management Science, Vol. **67** No. **5**, pp. 2799–2812 (2021). DOI: 10.1287/mnsc.2020.3700

[5] Csóka, P. and Herings, P. J.-J.: *Uniqueness of Clearing Payment Matrices in Financial Networks*, GSBE Research Memoranda, (014) (2021). DOI: 10.26481/umagsb.2021014

[6] Csóka, P. és Kondor G.: *Csődszabályok pénzügyi hálózatokban*, Alkalmazott Matematikai Lapok, 37 (2), 1-13.(2020). DOI: 10.37070/AML.2020.37.2.08

[7] Eisenberg, L. and Noe, T. H.: *Systemic risk in financial systems*, Management Science, Vol. **47** No. **2**, pp. 236–249 (2001). DOI: 10.1287/mnsc.47.2.236.9835

[8] Groote Schaarsberg, M., Reijnierse, H., and Borm, P.: *On solving mutual liability problems*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. **87** No. **3**, pp. 383–409 (2018). DOI: 10.1007/s00186-017-0621-1

[9] Habis, H.: *Sztochasztikus csődjátékok - avagy hogyan osszunk szét egy bizonytalan méretű tortát?*, Közgazdasági Szemle, Vol. **59** No. **12**, pp. 1299–1310 (2012).

[10] Jackson, M. O. and Pernoud, A.: *Systemic risk in financial networks: A survey*, Annual Review of Economics, Vol. **13**, 171-202 (2021). DOI: 10.1146/annurev-economics-083120-111540

[11] Koster, M.: *A note on uniqueness of clearing prices in financial systems*, SSRN (2019). DOI: 10.2139/ssrn.3427039

[12] Lublóy, Á.: *Dominóhatás a magyar bankközi piacon*, Közgazdasági Szemle, Vol. **52** No. **4**, pp. 377–401 (2005).

[13] Schuldenzucker, S., Seuken, S., and Battiston, S.: *Default ambiguity: Credit default swaps create new systemic risks in financial networks*, Management Science (2019). DOI: 10.1287/mnsc.2019.3304

[14] Sziklai, B., Fleiner, T., and Solymosi, T.: *On the core and nucleolus of directed acyclic graph games*, Mathematical Programming, Vol. **163** No. **3**, pp. 243-271 (2017). DOI: 10.1007/s10107-016-1062-y

[15] Tasnádi, A.: *On probabilistic rationing methods*, Mathematical Social Sciences, Vol. **44** No. **2**, pp. 211–221 (2002). DOI: 10.1016/S0165-4896(02)00014-8

[16] Thomson, W.: *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update*, Mathematical Social Sciences, Vol. **74**, pp. 41-59. (2015). DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2014.09.002

Csóka Péter 2003-ban szerzett közgazdász diplomát a Budapesti Corvinus Egyetem jogelődjén. Doktori fokozatát 2008-ban a Maastrichti Egyetemen szerezte. 2008 óta a Budapesti Corvinus Egyetem oktatója és kutatója, 2019 óta egyetemi tanár. 2011-óta a Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont Játékelméleti kutatócsoportjának kutatója. Kutatásaiban elméleti közgazdaságtani módszereket használ befektetések, kockázatkezelés, vállalati pénzügyi kérdések, likviditási problémák és pénzügyi hálózatok vizsgálatára. 16 angol és 11 magyar referált cikk szerzője, jelenleg az MTMT-ben a független hivatkozásainak száma 317, h-indexe 11. 2012 óta az évenként Budapesten megrendezett Annual Financial Market Liquidity Conference egyik főszervezője. 2019-ben a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület elnökségi tagja lett. 2019-ben Bolyai János kutatási ösztöndíjat nyert. 2021-től tag az MTA Közgazdaság-tudományi Bizottságában. 2022-től tag az NKFIH Bölcsészet- és Társadalomtudományok Kollégiumban.

CSÓKA PÉTER

Budapesti Corvinus Egyetem és Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont.
peter.csoka@uni-corvinus.hu

ON THE UNIQUENESS OF CLEARING MATRICES IN FINANCIAL NETWORKS

Péter Csóka

In the financial network we study, agents are linked by financial contracts. The four most common division rules are the proportional, priority, constrained equal awards, and constrained equal losses division rules. Since the payments made depend on the payments received, we look for coherent accounting equilibria (fixed points), called clearing matrices. In some situations, multiple clearing matrices may be a solution with different bankrupt agents, causing additional systemic risk. In this paper, we summarize and illustrate the sufficient monotonicity conditions given by Csóka and Herings [5] for the uniqueness of clearing matrices. To apply these conditions, one has to partition the agents and analyze an associated directed acyclic graph.