Alkalmazott Matematikai Lapok **39** (2022), 1–11.
DOI: xxx

KORRELÁLT EGYENÚLY A FUZZY JÁTÉKOKBAN

MAKÓ ZOLTÁN, SALAMON JÚLIA

A cikkben a kétszemélyes, véges, nem-kooperatív, fuzzy játékok Nash- és korrelált egyensúlyai közötti összefüggést tárgyaljuk. Igazoljuk, hogy hasonlóan a klasszikus játékokhoz, a Nash-egyensúly egy olyan korrelált egyensúly, amely független peremeloszlásokat eredményez.

1. Bevezetés

A hagyományos játékelmélet feltételezi, hogy a játék kifizetései minden játékos számára pontosan ismertek és a játékosok a várható hasznukat akarják maximalizálni. Valós játékhelyzetekben, a rendelkezésre álló információk pontatlansága miatt a játékosok többnyire nem képesek pontosan értékelni a kifizetéseket. A pontatlanság és a bizonytalanság különböző típusú lehet (például: sztochasztikus, fuzzy és fuzzy sztochasztikus). A fuzzy szó jelentése: homályos, elmosódott, lágy körvonalú, életlen vonalú. Ha valamely stratégiához tartozó kifizetés például így van megadva „a kifizetés közel van az a értékhez”, akkor ez a pontatlanság fuzzy típusú. Ezt a kijelentést kvantitatívan fuzzy számmal lehet leírni.

A fuzzy számokkal megadott játékokat fuzzy játékoknak (angolul: fuzzy games) nevezzük. A fuzzy halmazokat először Butnariu használta a nem-kooperatív játékelméletben [5]. Nishizaki és Sakawa tanulmányozták a fuzzy kifizetésekkel és fuzzy célokkal egyaránt rendelkező játékokat. Eredményeiket általánosították a többcélú játékokra is [19]. Bector és Chandra olyan modellt javasoltak a kétszemélyes, nem-kooperatív, fuzzy játékok tanulmányozására, amelyben a bizonytalanság kezelése a lineáris programozási feladatok dualitásán alapul [4]. Larbani a fuzzy paraméterekkel rendelkező játékok egy olyan új osztályát vezette be, amely úgy a játékelméleti, mint a bizonytalanság melletti döntéshozatal mechanizmusát is beépíti a modellbe [13]. Maeda a lehetőségi fok (angolul: possibility degree) segítségével értelmezte a Nash-egyensúly fogalmát [14]. Cunlin és Zhang általánosították Maeda modelljét az aszimmetrikus háromszög alakú fuzzy számokra [6].

Az elméleti közgazdasági modellek egyik érdekes feladata a Nash-egyensúly [17] egyértelműségét biztosító feltételek megállapítása. De mi történik, ha a modellnek több Nash-egyensúlya van? Ebben az esetben az optimális választás csak a játékosok közötti kommunikációval vagy külső jel segítségével történhet. A külső jeleket használó döntéshozatali eljárások többek közt az úgynevezett korrelált egyensúly fogalmához vezetnek.

A korrelált egyensúly fogalmát Robert Aumann vezette be [2, 3]. Informális definíciója a következő. *Minden játékos egy jelet generáló, köztudott folyamat megfigyelése alapján választ egy cselekvést. Ha egyetlen játékosnak sem érdeke eltérni a kiválasztott cselekvéstől, feltéve, hogy a többiek sem térnek el, akkor ezt a stratégiát leíró együttes valószínűségi eloszlást* korrelált egyensúly*nak nevezzük.* A jelt generáló folyamat tulajdonképpen összehangolja (korrelálja) a cselekvéseket, de nem kötelezi a játékosokat az összehangolt cselekvésre, így nem kell elhagyni a nemkooperatív játékok körét. A korrelált egyensúlyok halmaza egy konvex politóp, és lineáris programozási módszerekkel meghatározható, lásd pl. [7, 8, 9, 11].

Tudjuk azt, hogy a klasszikus játékokban a Nash-egyensúly egy olyan korrelált egyensúly, amely független peremeloszlásokat eredményez [7, 8, 9]. A kérdés az, hogy ez az alaptulajdonság más struktúrákban is megmarad-e. Igazoljuk, hogy ez a tulajdonság érvényes marad abban az esetben is, amikor a kifizetések fuzzy számokkal vannak jellemezve és a játékosok preferenciái nem teljes előrendezések.

A cikk első része a megértéshez szükséges alapfogalmakat tartalmazza. A második részben megadjuk a korrelált és a Nash-egyensúly értelmezését a fuzzy játékok esetére, illetve a közöttük levő összefüggést. Példák segítségével szemléltetjük az egyensúlyok közti kapcsolatot.

A cikkben bemutatott általános keret lehetővé teszi az alkalmazott t-normák és a nem teljes előrendezések megfelelő megválasztásával egyedi modellek készítését és tanulmányozását.

2. Fuzzy számok előrendezése

Egy fuzzy halmazhoz való hozzátartozás fokát a tagsági függvény segítségével tudjuk leírni. Legyen $X \neq \varnothing$ egy alaphalmaz. Az X egy A fuzzy részhalmazát a $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ tagsági függvénnyel jellemezzük. Bármely $x \in X$ esetén a $\mu_A(x)$ azt fejezi ki, hogy x milyen mértékben tartozik hozzá az A-hoz. Tulajdonképpen a μ_A tagsági függvény egy halmazhoz való hozzátartozást megadó $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ karakterisztikus függvény általánosítása.

Legyen $p \in (1,+\infty)$ és $g : [0,1] \to [0,1]$ egy folytonos, szigorúan csökkenő függvény, amelyre $g(1) = 0$ és $g(0) = 1$. A $g^{[-1]} : [0,+\infty) \to [0,1]$ pszeudo-inverze a g-nek, ahol $g^{[-1]}(t) = g^{-1}(t)$, ha $0 \leq t \leq 1$, illetve $g^{[-1]}(t) = 0$, ha $t > 1$.

2.1. Definíció. ([12]) A kvázi-háromszögű fuzzy szám egy olyan $\tilde{a} = \langle a, d \rangle$-vel jelölt fuzzy halmaz, amelynek tagsági függvénye $\mu_{\tilde{a}}(t) = g^{[-1]}(|a-t|/d)$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $a \in \mathbb{R}$ az $\tilde{a}$ középpontja, $d > 0$ pedig a kiterjedése. $d = 0$ esetén $\mu_{\tilde{a}}(a) = 1$ és $\mu_{\tilde{a}}(t) = 0$, ha $t \neq a$. A továbbiakban $\mathcal{N}_{g,p} = \{\langle a, d \rangle \mid a \in \mathbb{R},\ d \geq 0\}$ jelöli a kvázi-háromszögű fuzzy számok halmazát.

Például, ha a generáló függvény $g(t) = 1 - t^2$, a kifizetés $\tilde{a} = \langle 3; 0{,}2 \rangle$, akkor az $\tilde{a}$ középpontja $a = 3$, kiterjedése $d = 0,2$ és tagsági függvénye

$$\mu_{\tilde{a}}(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - |3 - t|/0,2}, \text{ ha } t \in [2{,}8; 3{,}2], \\ 0, \text{ ha } t \in (-\infty; 2{,}8) \cup (3{,}2; +\infty). \end{cases}$$

Az „a közel van a 3-hoz" kijelentés egy lehetséges kvantitatív interpretációja az $\tilde{a} = \langle 3; 2 \rangle$ kvázi-háromszögű fuzzy szám.

A t-normákon alapuló kiterjesztési elv alapján [10] a fuzzy számok összeadási operátorának tagsági függvényét, a g által generált t-norma segítségével az alábbi módon definiáljuk:

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(t) = \sup_{t=x+y} g^{[-1]}\left(\left(g^p\left(\mu_{\tilde{a}}(x)\right) + g^p\left(\mu_{\tilde{b}}(y)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right), \text{ bármely } t \in \mathbb{R} \text{ esetén.} \quad (1)$$

Felhasználva azt a tényt, hogy két fuzzy halmaz egyenlő, ha tagsági függvényeik is egyenlők, a (1) képlettel megadott összeadási műveletre igazolható az alábbi tulajdonság.

2.2. Állítás. ([12]) Bármely $\tilde{a} = \langle a, d_1 \rangle, \tilde{b} = \langle b, d_2 \rangle \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \left\langle a + b, (d_1^q + d_2^q)^{1/q} \right\rangle \in \mathcal{N}_{g,p}, \text{ ahol } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Az összeg képlete alapján $2 \cdot \langle a, d \rangle = \langle a, d \rangle + \langle a, d \rangle = \left\langle 2a, 2^{1/q} d \right\rangle$. Ezért a skalárral való szorzás művelete: $\lambda \cdot \langle a, d \rangle = \left\langle \lambda a, \lambda^{\frac{1}{q}} d \right\rangle$, bármely $\langle a, d \rangle \in \mathcal{N}_{g,p}$ és $\lambda \geq 0$ esetén.

A [15]-ös cikk igazolja, hogy az $(\mathcal{N}_{g,p}, +)$ struktúra olyan félcsoport, amely vektortérré bővíthető, ahol a zérus elem $\tilde{0} = \langle 0, 0 \rangle$ és teljesülnek a $(\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{a} = \lambda_1 \cdot \tilde{a} + \lambda_2 \cdot \tilde{a}$, $\lambda_1\left(\tilde{a} + \tilde{b}\right) = \lambda_1 \cdot \tilde{a} + \lambda_1 \cdot \tilde{b}$, $\lambda_1\lambda_2\tilde{a} = \lambda_1(\lambda_2\tilde{a})$, $1\tilde{a} = \tilde{a}$ összefüggések, bármely $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén.

A preferencia reláció megválasztásának problémája kulcsfontosságú a fuzzy kifizetésekkel rendelkező kétszemélyes játékokban. Ebben a dolgozatban az $(\mathcal{N}_{g,p}, +)$ félcsoporttal kompatibilis, nem teljes preferencia rendezést használunk. Az alapfeltételeket formálisan a következőképpen fogalmazzuk meg.

Legyen $\preccurlyeq$ egy bináris reláció az $\mathcal{N}_{g,p}$ halmazon. Két $\tilde{a}$ és $\tilde{b}$ kvázi-háromszögű fuzzy szám $\preccurlyeq$-összehasonlítható, ha vagy $\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}$ vagy $\tilde{b} \preccurlyeq \tilde{a}$ teljesül. Ellenkező esetben $\tilde{a}$ és $\tilde{b}$ $\preccurlyeq$-összehasonlíthatatlanok. A $\preccurlyeq$ reláció teljes az $\mathcal{N}_{g,p}$ halmazon, ha bármely két $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{N}_{g,p}$ kvázi-háromszögű fuzzy szám $\preccurlyeq$-összehasonlítható. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\preccurlyeq$ reláció nem teljes.

2.3. Definíció. A $\preccurlyeq$ reláció az $\mathcal{N}_{g,p}$ összeadási és skalárral való szorzási műveleteivel kompatibilis, nem teljes előrendezés, ha bármely $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén teljesülnek az alábbi feltételek:

C1) a $\preccurlyeq$ reláció reflexív és tranzitív;
C2) bármely $\lambda \in]0,1[$ esetén az $\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\lambda\tilde{a} + (1-\lambda)\,\tilde{c} \preccurlyeq \lambda\tilde{b} + (1-\lambda)\,\tilde{c}.$$

A definícióban C1 az előrendezés, C2 pedig a kompatibilitás feltételét adja meg.

Az $\mathcal{N}_{g,p}$, az összeadási és skalárral való szorzási műveletekkel, valamint a 2.3. Definíció feltételeit teljesítő $\preccurlyeq$ relációval megadja azt a fuzzy környezetet, amelyben a kétszemélyes nem-kooperatív játékokat vizsgáljuk. Ezt a struktúrát a továbbiakban $(\mathcal{N}_{g,p},+,\cdot,\preccurlyeq)$-vel jelöljük.

3. Korrelált egyensúly a fuzzy játékokban

Egy $\tilde{\Gamma} = (I, J, S_I, S_J, \tilde{A}, \tilde{B}, \preccurlyeq_I, \preccurlyeq_J)$ kétszemélyes, véges, nem-kooperatív, fuzzy játéknál a játékosok tiszta stratégiáit az $I = \{1,2,...,m\}$ és a $J = \{1,2,...,n\}$ indexhalmazokkal jelöljük. Az első játékos jellemzésére az $(\mathcal{N}_{g_1,p_1},+,\cdot,\preccurlyeq_I)$ struktúrát, a másodikéra pedig a $(\mathcal{N}_{g_2,p_2},+,\cdot,\preccurlyeq_J)$ struktúrát használjuk. Ha az első játékos az i, a második játékos a j stratégiát választja, akkor az első játékos kifizetését az $\tilde{a}_{ij} = \left\langle a_{ij}, d_{ij}^a \right\rangle \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$, a második játékos kifizetését pedig $\tilde{b}_{ij} = \left\langle b_{ij}, d_{ij}^b \right\rangle \in \mathcal{N}_{g_2,p_2}$ fuzzy számok adják meg minden $(i,j) \in I \times J$ esetén. A továbbiakban $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$ és $\widetilde{B} = \left(\tilde{b}_{ij}\right)_{m\times n}$ jelöli a játékosok fuzzy kifizetési mátrixait. Ebben az esetben a kevert stratégiák halmazai:

$$S_I = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m | x_i \geq 0, i \in I, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\};$$

$$S_J = \left\{ (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n | y_j \geq 0, j \in J, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}.$$

Ha feltételezzük, hogy a játékosok a preferencia döntéseiknél nem teljes előrendezést használnak, akkor Aumann tétele [1] és az összeg képlete alapján a játékosok célfüggvényei

$$\tilde{E}_I(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \tilde{a}_{ij} y_j,\ \ \tilde{E}_J(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \tilde{b}_{ij} y_j, \tag{2}$$

kvázi-háromszögű fuzzy számot adó $\tilde{E}_I(x,y) \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$ és $\tilde{E}_J(x,y) \in \mathcal{N}_{g_2,p_2}$ mennyiségek lesznek, ahol $(x,y) \in S_I \times S_J$.

3.1. Definíció. Egy $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ a $\tilde{\Gamma}$ játék Nash-egyensúlya, ha $x^T \tilde{A} y^* \preccurlyeq_I x^{*T} \tilde{A} y^*$ és $x^{*T} \tilde{B} y \preccurlyeq_J x^{*T} \tilde{B} y^*$ bármely $(x,y) \in S_I \times S_J$ esetén.

Hasonló módon érvelve, mint a klasszikus játékoknál, figyelembe véve a $\preccurlyeq_I$ és $\preccurlyeq_J$ nem teljes előrendezések tulajdonságait, a fuzzy játékokra a korrelált egyensúlyt a következőképpen értelmezzük.

3.2. Definíció. ([16]) A P együttes valószínűségi eloszlás korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak, ha

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{a}_{kj} \preccurlyeq_I \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{a}_{ij} \text{ bármely } i \in I \text{ és } k \in I\setminus\{i\}\,;$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}\tilde{b}_{il} \preccurlyeq_J \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\tilde{b}_{ij} \text{ bármely } \; j \in J \text{ és } l \in J\setminus\{j\}\,.$$

3.3. Megjegyzés. Úgy a Nash-, mint a korrelált egyensúly értelmezésében azt feltételezzük, hogy a reláció két oldalán levő kvázi-háromszögű fuzzy számok összehasonlíthatóak. Ezeket a típusú értelmezéseket a szakirodalomban „erős" jelzővel illetik. A „gyenge" jelzőt használnánk, ha az értelmezések így lennének megfogalmazva: „a relációk bal és jobb oldalán szereplő két kvázi-háromszögű fuzzy szám nem összehasonlítható, vagy ha összehasonlítható, akkor teljesülnek a megadott relációk".

A következő tétel szemlélteti a fuzzy játékokban a Nash- és a korrelált egyensúlyok közötti kapcsolatot. A tétel bizonyítása a [16] cikkben található.

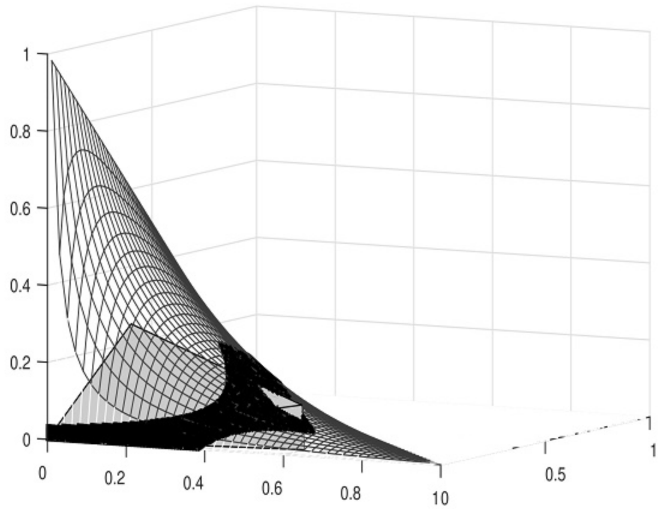
3.4. Tétel. (Makó-Salamon, 2020) Tekintsük a $\tilde{\Gamma}$ kétszemélyes, nem-kooperatív, fuzzy játékot.

i) Ha $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ egy Nash-egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak, akkor a $P = (p_{ij})_{m\times n}$ együttes valószínűségi eloszlás, ahol $p_{ij} = x_i^* y_j^*$ $(i \in I, j \in J)$ korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak.

ii) Ha $P = (p_{ij})_{m\times n}$ együttes valószínűségi eloszlás a $\tilde{\Gamma}$ játék korrelált egyensúlya, és az $(x, y) \in S_I \times S_J$ peremeloszlásokra teljesül a $p_{ij} = x_i y_j$ összefüggés bármely $i \in I$, $j \in J$ esetén, akkor (x, y) Nash-egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak.

A klasszikus játékok geometriáját Nau, Canovas és Hansen [18] tanulmányozta. Ezen játékok esetén jelöljük Π-vel az összes P együttes valószínűségi eloszlás halmazát. Geometriailag Π egy $mn - 1$ dimenziós szimplexet határoz meg. Jelöljük D-vel az egyenlőtlenségi feltételek által meghatározott korrelált egyensúlyok halmazát. Geometriailag ez egy konvex politóp.

Legyen E az összes független, együttes valószínűségi eloszlások halmaza. Ha a Nash-egyensúlyokat együttes eloszlásoknak tekintjük, akkor a Nash-egyensúlyok halmaza $D \cap E$, amely Nash tétele alapján nem üres. A klasszikus, kétszemélyes, véges, nem-kooperatív játékok esetén a Nash-egyensúlyok, mint együttes eloszlások a korrelált egyensúlyok halmazának a határán helyezkednek el [18].



1. ábra. A Nash- és korrelált egyensúlyok közötti kapcsolat Maeda modelljében.

3.5. Megjegyzés. A 3.4. Tétel állítása nem triviális, függ a preferencia rendezés tulajdonságaitól. Maeda a [14] cikkében a preferencia rendezést a lehetőségi mérték (angolul: possibility degree) segítségével értelmezte. Így az ő modelljében nem teljesül a 2.3. Definíció tranzitivitási feltétele, valamint a C2 feltétel direkt iránya. Igazolható, hogy ekkor létezik olyan fuzzy játék, amelyben a 3.4. Tétel i) tulajdonsága nem teljesül. Az ilyen játékoknál, a Maeda modelljében a korrelált egyensúlyok politópja és a Nash-egyensúlyok között a 1. ábrán szemléltetett kapcsolat mutatható ki. Fekete szín jelöli a Nash-féle egyensúlypontokat, szürke szín a korrelált egyensúlyok politópját (D), hálórács a játékosok között független eloszlások nyeregfelületét (E). Megfigyelhető, hogy $D \cap E$ szigorú részhalmaza a Nash-egyensúlypontok halmazának. Tehát vannak olyan Nash-egyensúlyok, amelyek nem korreláltak.

Sajátos esetként tekintsük azt a $\tilde{\Gamma}$ játékot, amelyben a nem teljes előrendezés az alábbi összefüggésekkel van megadva:

$$\tilde{a}_1 \preccurlyeq_I \tilde{a}_2 \;\Leftrightarrow\; a_1 - (d_1)^{q_1} \leq a_2 - (d_2)^{q_1} \text{ és } a_1 + (d_1)^{q_1} \leq a_2 + (d_2)^{q_1}$$

bármely $\tilde{a}_1 = \langle a_1, d_1 \rangle \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$, $\tilde{a}_2 = \langle a_2, d_2 \rangle \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$ esetén. Hasonlóan értelmezzük a $\preccurlyeq_J$ nem teljes előrendezést az $\mathcal{N}_{g_2,p_2}$-ben is.

Mivel $\preccurlyeq_I$ és $\preccurlyeq_J$ olyan nem teljes előrendezések, amelyek teljesítik a

2.3. Definíció feltételeit, ezért a 3.4. Tételben megfogalmazottak itt is érvényesek maradnak.

Ha $\Gamma_{bal} = \left(I, J, S_I, S_J, A^{bal}, B^{jobb}\right)$ és $\Gamma_{jobb} = \left(I, J, S_I, S_J, A^{jobb}, B^{jobb}\right)$ jelöli azokat a kétszemélyes, klasszikus játékokat, amelyek kifizetési mátrixai $A^{bal} = \left(a_{ij}^{bal}\right)_{m\times n}$, $B^{bal} = (b_{ij}^{bal})_{m\times n}$, illetve $A^{jobb} = (a_{ij}^{jobb})_{m\times n}$, $B^{jobb} = \left(b_{ij}^{jobb}\right)_{m\times n}$, ahol $a_{ij}^{bal} = a_{ij} - \left(d_{ij}^{a}\right)^{q_1}$, $a_{ij}^{jobb} = a_{ij} + \left(d_{ij}^{a}\right)^{q_1}$, $b_{ij}^{bal} = b_{ij} - \left(d_{ij}^{b}\right)^{q_2}$ és $b_{ij}^{jobb} = b_{ij} + \left(d_{ij}^{b}\right)^{q_2}$, akkor az alábbi tulajdonság fogalmazható meg.

3.6. Állítás. ([16]) Egy P együttes valószínűségi eloszlás akkor és csakis akkor korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma} = \left(I, J, S_I, S_J, \tilde{A}, \tilde{B}, \preccurlyeq_I, \preccurlyeq_J\right)$ fuzzy játéknak, ha P korrelált egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak, azaz

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}^{bal} \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{kj}^{bal}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}^{jobb} \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{kj}^{jobb}, \text{ bármely } i, k \in I;$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} b_{ij}^{bal} \geq \sum_{i=1}^{m} p_{il} b_{il}^{bal}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_{ij} b_{ij}^{jobb} \geq \sum_{i=1}^{m} p_{ij} b_{il}^{jobb}, \text{ bármely } j, l \in J.$$

Az alábbiakban olyan fuzzy játékra adunk példát, amelynek van korrelált egyensúlya, de nincs Nash-egyensúlya.

3.7. Példa. Tekintsük azt a játékot, amelyben a bal, illetve a jobb oldali játékok kifizetési mátrixai a következők:

Γ_{bal}	1	2	3
1	$(15, 2)$	$(6, 11)$	$(13, 10)$
2	$(8, 19)$	$(16, 16)$	$(5, 7)$
3	$(18, 6)$	$(11, 4)$	$(9, 15)$

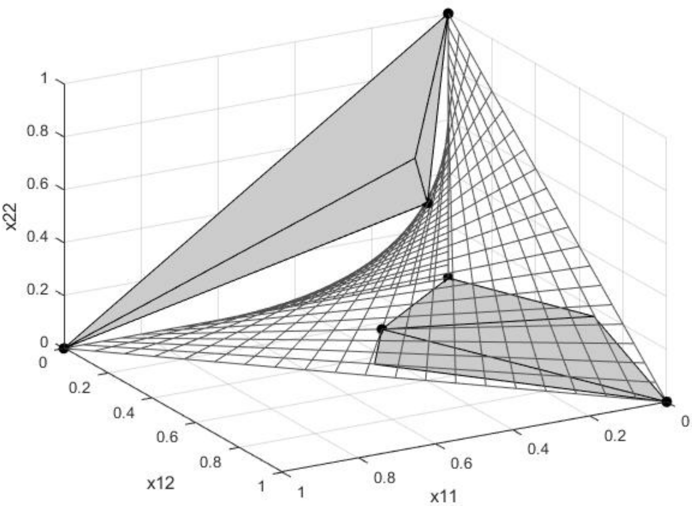
Γ_{jobb}	1	2	3
1	$(16, 5)$	$(8, 17)$	$(18, 15)$
2	$(14, 23)$	$(20, 20)$	$(12, 12)$
3	$(23, 13)$	$(15, 10)$	$(14, 20)$

A Γ_{bal} játék egyetlen Nash-egyensúlya:

$$x_0^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{19}{45}, \frac{17}{45}\right), \quad y_0^* = \left(\frac{3}{77}, \frac{25}{77}, \frac{7}{11}\right),$$

ami nem Nash-egyensúlya a Γ_{jobb} játéknak.

Ha $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ Nash-egyensúlya lenne a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak, akkor a 3.4. Tétel alapján $P = (p_{ij})_{m\times n}$, ahol $p_{ij} = x_i^* y_j^*$, korrelált egyensúlya lenne a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak. Azaz a 3.6. állítás alapján P korrelált egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak is. Ebből következik, hogy (x^*, y^*) Nash-egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak. Mivel a Γ_{bal} játéknak egyetlen Nash-egyensúlya van $(x^*, y^*) = (x_0^*, y_0^*)$. Tehát (x_0^*, y_0^*) Nash-egyensúlya a Γ_{jobb} játéknak, ami ellentmond az előző bekezdés kijelentésének. Következésképpen, a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs Nash-egyensúlya.



2. ábra. A Nash- és korrelált egyensúlyok geometriája a 3.8. Példában.

A korrelált egyensúly definícióját felhasználva könnyen igazolható, hogy a

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ és } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

együttes valószínűségi eloszlások korrelált egyensúlyai a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak.

Tudjuk, hogy a klasszikus kétszemélyes, véges játékok kevert bővítésének mindig van Nash- és korrelált egyensúlya. Az alábbi példa azt szemlélteti, hogy ezen játékokkal ellentétben nem minden fuzzy játéknak létezik korrelált egyensúlya.

3.8. Példa. Tekintsük azt a játékot, amelyben a bal, illetve a jobb oldali játszmák kifizetési mátrixai a következők:

Γ_{bal}	1	2
1	$(10, 10)$	$(7, 4)$
2	$(7, 4)$	$(10, 6)$

Γ_{jobb}	1	2
1	$(21, 22)$	$(17, 23)$
2	$(25, 19)$	$(13, 15)$

Amikor a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játék geometriáját szeretnénk szemléltetni, az előbbiekben Nau, Canovas és Hansen [18] által megfogalmazott tulajdonságot alkalmazzuk a Γ_{bal} és a Γ_{jobb} klasszikus játékokra. A 2. ábra a Nash- és korrelált egyensúlyok geometriáját mutatja. A kis fekete körök a bal, illetve a jobb oldali játék

Nash-egyensúlypontjai. Mivel ezek különböznek, a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs Nash-egyensúlya. A hálórács a játékosok között független eloszlások nyeregfelületét (E), a szürke politópok pedig a bal és jobb oldali játékok korrelált egyensúlyainak halmazait szemléltetik. Megfigyelhető, hogy a politópok az E felület különböző oldalain helyezkednek el és nincs közös pontjuk. Ezért ennek a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs korrelált egyensúlya.

Hivatkozások

[1] R.J. Aumann: *Utility theory without the completeness axiom*, Econometrica, Vol. **30**, pp. 445–462 (1962). DOI: 10.2307/1909888

[2] R.J. Aumann: *Subjectivity and correlation in randomized strategies*, J. Math. Econ., Vol. **1**, pp. 67–96 (1974). DOI: 10.1016/0304-4068(74)90037-8

[3] R.J. Aumann: *Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality*, Vol. **55**, pp. 1–18 (1987). DOI: 10.2307/1911154

[4] C.R. Bector, S. Chandra: *Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games*, Springer (2005). DOI: 10.1007/3-540-32371-6

[5] D. Butnariu: *Fuzzy games: A description of the concept*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **1**, pp. 181–192 (1992). DOI: 10.1016/0165-0114(78)90003-9

[6] L. Cunlin, Z. Qiang: *Nash equilibrium strategy for fuzzy non-cooperative games*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **176**, pp. 46–55 (2011). DOI: 10.1016/j.fss.2011.03.015

[7] F. Forgó, J. Szép, F. Szidarovszky: *Introduction to the Theory of Games, Concepts, Methods, Applications*, Kluwer Academic Publishers (1999). `https://link.springer.com/book/9780792357759`

[8] F. Forgó: *A generalization of correlated equilibrium: A new protocol*, Math. Soc. Sci., Vol. **60**, pp. 186–190 (2010). DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2010.08.002

[9] F. Forgó: *Egyensúly a játékelméletben: egzisztencia és általánosítások*, Akadémiai doktori értekezés (2014). `http://real-d.mtak.hu/728/7/dc_837_14_doktori_mu.pdf`

[10] C. Carlsson, R. Fullér: *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*, Studies in Fuzziness and Soft Computing Series, Vol. **82**, Springer (2002). DOI: 10.1007/978-3-7908-1805-5

[11] A.X. Jiang, K. Leyton-Brown: *Polynomial-time computation of exact correlated equilibrium in compact games*, Games Econ. Behav., Vol. **91**, pp. 347–359 (2015). DOI: 10.1515/crll.1902.124.1

[12] M. Kovács: *A stable embedding of ill-posed linear systems into fuzzy systems*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **45**, pp. 35–312 (1992). DOI: 10.1016/0165-0114(92)90148-W

[13] M. Larbani: *Solving bimatrix games with fuzzy payoffs by introducing Nature as a third player*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **160**, pp. 657–666 (2009). DOI: 10.1016/j.fss.2008.06.010

[14] T. Maeda: *Characterization of the equilibrium strategy of the bimatrix game with fuzzy payoff*, J Math Anal Appl., Vol. **251**, pp. 885–896 (2000). DOI: 10.1006/jmaa.2000.7142

[15] Z. Makó: *Real vector space of LR-fuzzy intervals with respect to the shape-preserving t-norm-based addition*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **200**, pp. 136–149 (2012). DOI: 10.1016/j.fss.2012.02.014

[16] Z. Makó, J. Salamon: *Correlated equilibrium of the games in fuzzy environment*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **398**, pp. 112–127 (2020). DOI: 10.1016/j.fss.2020.03.001

[17] J. Nash: *Noncooperative games*, Ann. Math., Vol. **54**, pp. 286–295 (1951). DOI: 10.2307/1969529

[18] R. Nau, S.G. Canovas, P. Hansen: *On the geometry of Nash equilibria and correlated equilibria*, Int. J. Game Theory, Vol. **32**, pp. 443–453 (2003). DOI: 10.1007/s001820300162

[19] I. Nishizaki, M. Sakawa: *Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution*, Physica-Verlag, Heidelberg, (2001). DOI: 10.1515/9781400829460

Makó Zoltán a középiskolát a sepsiszentgyörgyi Székely Mikó Kollégiumban végezte, majd a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika szakán szerzett egyetemi oklevelet. Doktorátusi tézisét a fuzzy optimalizálás témaköréből írta, amelyet 2002-ben mutatott be. Az egyetem elvégzése után, 1992-ben a kézdivásárhelyi Gábor Áron Szakközépiskolába kapott tanári kinevezést. 1997-ben a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Mechanika és Csillagászati tanszékének tanársegédje, majd adjunktusa lett. 2006-tól a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának főállású oktatója. Jelenleg (2016-tól) a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának egyetemi tanára, ahol a matematikai analízis, a gazdasági döntések matematikai modellezése és a döntéselmélet tantárgyakat oktatja. Kutatási területei: fuzzy optimalizálás, játékelmélet, mesterséges intelligencia és égi mechanika.

MAKÓ ZOLTáN
Sapientia-Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar
makozoltan@uni.sapientia.ro

Salamon Júlia a középiskolát a csíkszeredai Márton Áron Gimnáziumban végezte. A kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika-informatika szakán szerzett egyetemi oklevelet 2002-ben, majd ugyanitt folytatta doktorátusi tanulmányait. Doktorátusi tézisét a paraméteres vektor egyensúlyi feladatok témaköréből írta, amelyet 2009-ben mutatott be. 2002-től a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának főállású oktatója. Jelenleg (2013-tól) a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának egyetemi docense, ahol az informatika (Matlab), operációkutatás, programozás és adatstruktúrák tantárgyakat oktatja. Kutatási területei: vektor egyensúlyi feladatok, játékelmélet.

SALAMON JúLIA
Sapientia-Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar
salamonjulia@uni.sapientia.ro

CORRELATED EQUILIBRIA IN FUZZY GAMES

Zoltán Makó and Júlia Salamon

In this paper, we discuss the relationship between correlated and Nash equilibria for two-player, non-cooperative fuzzy games. We show that, similarly to classical games, the Nash equilibrium can be constructed as a correlated equilibrium that yields independent marginal distributions.

Keywords: Fuzzy game; Fuzzy number; Correlated equilibrium; Nash equilibrium

Mathematics Subject Classification (2000): 90C70, 91A05.