

## DINAMIKUS RENDSZEREK SZÉTCSATOLÁSA BE- ÉS KIMENETI TRANSZFORMÁCIÓKKAL

BAÁR TAMÁS, LUSPAY TAMÁS

Jelen kézirat egy olyan szétcsatolási eljárást mutat be, amely segítségével dinamikus rendszerek alrendszerre bonthatók. Ezt a szétcsatolást a rendszer be- és kimeneteinek megfelelő transzformációival érjük el. Ezen transzformációkat úgy határozzuk meg, hogy az átvitelt a kiemelni kívánt alrendszeren keresztül maximalizáljuk, míg a lecsatolni kívánt alrendszereken keresztül minimalizáljuk. Az ehhez szükséges vektorok kiszámítása a robusztus irányítások témakörében ismert lineáris mátrix egyenlőtlenségekkel megfogalmazott optimalizálási feladatra vezethető vissza. Egy demonstrációs példa bemutatása után részletesen tárgyaljuk a felmerült és még nyitott kérdéseket.

### 1. Bevezetés

Adott munkapont körül egy rendszer viselkedése leírható egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet rendszerrel, melyet a rendszerelméletben állapotterez alaknak nevezünk. Amennyiben a differenciálegyenlet rendszer együtthatómátrixa diagonalizálható, úgy a sajátvektorok segítségével a rendszer blokkdiagonális struktúrára hozható, ez az úgynevezett modális alak. Ahogyan ezt később bemutatjuk, ebben a reprezentációban a rendszert alkotó módusok az együtthatómátrixban szétcsatoltak egymástól, azonban a rendszer bemenetén és kimenetén keresztül kölcsönhatásba lépnek egymással. Ez azt is jelenti, hogy a rendszer válasza a különböző módusok válaszainak szuperpozíciójaként is meghatározható. A módusokat tulajdonságaik vagy az elérendő irányítási cél alapján alrendszerekbe sorolhatjuk.

Nagydimenziós komplex rendszerek irányításánál gyakran célszerű a tervezési probléma egyszerűsítése, amire az irodalomban többféle megközelítés is létezik. A kéziratban dinamikus rendszerek szétcsatolásával foglalkozunk, ami lehetővé teszi, hogy kiválasztott alrendszereket úgy irányítsunk, hogy közben nem lépünk interakcióba a rendszer fennmaradó részével. Ez a tervezési eljárás az úgynevezett strukturált szabályzótervezési megoldások irányába mutat [1]; esetünkben az egyes alrendszerek irányításához egymástól független, az adott alrendszerhez tar-

tozó szabályzó tartozik<sup>1</sup>. A megközelítés lehetővé teszi, hogy egyszerűbb, kisebb együtthatómátrixszal leírható szabályozókat tervezzünk, melyek nem lépnek kölcsönhatásba egymással.

A vonatkozó irodalomban többféle szétcsatolási eljárás létezik (lásd [3], [4]), melyeknek egy közös pontja, hogy a rendszer be- és kimenetén megfelelően megválasztott transzformációs vektorokat alkalmaznak. Ezen transzformációk segítségével úgy összegzik skalár jelekké a rendszer be- és kimeneteit, hogy azok a lehető legjobban jellemezzék az irányítani kívánt alrendszert, miközben nem lépnek interakcióba a fennmaradó dinamikával. [4] egy nemlineáris  $\mathcal{H}_2$  norma maximalizáláson alapuló transzformációs vektor számítását mutat be, ahol az irányítandó alrendszer  $\mathcal{H}_2$  normáját maximalizálják, miközben biztosítják, hogy a transzformációs vektorok merőlegesek legyenek a lecsatolandó alrendszerek be- és kimeneti mátrixaira.

A jelen cikkben bemutatott megközelítés hasonló alapelvekre támaszkodik, azonban az optimalizálási feladatot lineáris mátrix egyenlőtlenségek segítségével fogalmazzuk meg. A megközelítés előnye a konvexitáson túl, hogy könnyen kiterjeszhető a rendszerelmélet szempontjából fontos rendszerosztályokra, többek között bizonytalan, valamint lineárisan változó paraméterű (LPV) rendszerekre.

A cikk célkitűzése tehát a következő. Olyan be- és kimeneti transzformációs vektorokat keresünk, melyek segítségével egy modális alakban adott rendszer egy kiválasztott alrendszerét leválaszthatjuk a fennmaradó dinamikáról. A transzformációs vektorokat úgy tervezzük meg, hogy egyrészt az átvitel  $\mathcal{H}_-$  index által leírt minimális érzékenységet maximalizálják az irányítandó alrendszeren keresztül. Ugyanakkor a lecsatolás érdekében a transzformációs vektorok az átvitel  $\mathcal{H}_\infty$  norma által leírt maximális érzékenységet csökkentik a fennmaradó alrendszereken keresztül. A transzformációs vektorok alkalmazása után az eredmény így egy olyan egy bemenetű és egy kimenetű rendszer, melyben a kiválasztott alrendszer a domináns. A feladat megoldásához felhasznált lineáris mátrix egyenlőtlenségekben a transzformációs vektorok diadikus szorzata jelenik meg, így a számítások során a be- és kimenethez tartozó egy rangú transzformációs mátrixokat kell meghatározunk, melyekből a transzformációs vektorok a későbbiekben visszaszámíthatóak. A rangfeltétel betartása nélkül konvex optimalizálási feladatokat kell megoldani, melyek globális optimumot szolgáltatnak. Az egy rangú transzformációs mátrixra vonatkozó kitétel azonban egy nem konvex feltételt jelent, aminek kielégítésére két lehetséges megközelítést vizsgáltunk eddigi munkánk során. Ezek változó mértékben ugyan, de minden esetben valamilyen szintű heurisztikát tartalmaznak, így globális optimum nem garantálható a feladat megoldása során.

---

<sup>1</sup>Jelen cikkben a szétcsatolási eljárás matematikai hátterére fókuszálunk és azt mutatjuk be, hogy egy alrendszer hogyan irányítható a többitől függetlenül. A [2] cikk a 4.3. fejezetben részletesen kitér arra az esetre, amikor több alrendszert szeretnénk egymástól független szabályzókkal irányítani.

A cikk célja, hogy bemutassa a megközelítésünket, majd a még nyitott kérdésekre kitérve párbeszédet indítson a különböző tudományterületek képviselői között a módszer további fejlesztése érdekében. Az algoritmus részletes bemutatása megtalálható a [2] cikkben. A felvetett kérdések között szerepel a részletes alkalmazási feltételek kidolgozása, valamint egy rang minimalizációs probléma heurisztikáktól mentes megoldása.

A 2. fejezetben bemutatjuk az alkalmazott matematikai eszközöket, kitérve a kiindulópontként felhasznált modális alakra, illetve a rendszer legkisebb és legnagyobb érzékenységének számításához szükséges tételekre. Ezen ismeretek birtokában a 3. fejezetben bemutatott problémamegfogalmazás már könnyen követhető. A 4. fejezetben mutatjuk be az általunk javasolt megközelítést, míg az 5. fejezet egy egyszerű példán keresztül szemlélteti a megközelítést. Az általunk megvitatásra érdemesnek ítélt kérdéseket a 6. fejezetben tárgyaljuk.

## 2. Matematikai háttér

Ebben a fejezetben röviden tárgyaljuk az eredményekhez szükséges matematikai eszközöket.

### 2.1. Az alkalmazott állapotter modell

Olyan rendszerekkel foglalkozunk, melyek egy munkapont körüli viselkedése leírható elsőrendű lineáris differenciálegyenlet rendszerekkel. Ezen egyenletrendszert nevezzük a rendszer állapotteres alakjának. Kiindulásként vizsgáljuk a folytonos idejű Lineáris Időinvariáns (LTI) rendszerosztályt, mely az alábbi alakban adott

$$\mathcal{P}_{n_y \times n_u} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1)$$

a szokásos jelölésekkel:  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  az állapotvektor,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  a bemenőjel és  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  a kimenőjel vektora. Továbbá feltételezzük, hogy a rendszer az alábbi alrendszer alakban adott:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} B_c \\ B_d \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_c & C_d \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Az  $A$  mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz létezik egy invertálható  $T$  és egy blokkdiagonális  $X$  mátrix, hogy  $T^{-1}AT = X$  teljesül. Lineáris időinvariáns rendszerek esetében ha  $A$  diagonalizálható, a (2) alak mindig elérhető és a rendszer modális alakjának nevezzük [5]. Az ehhez szükséges  $T$  transzformáció az  $A$  sajátvektorai alapján számítható. A konstrukció sajátossága, hogy

minden blokk a rendszer egy dinamikai módusának felel meg, melyek mindegyike egy darab valós ( $\Re$ ), vagy egy komplex (melynek képzetes része ( $\Im$ )) póluspárral jellemezhető. Ezek alapján a blokkdiagonális  $A$  felírható  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$  alakban, ahol az egyes blokkok a következőképpen definiáltak:

$$A_i = \begin{cases} \lambda_i, & \text{ha } \Im(\lambda_i) = 0 \\ \begin{bmatrix} \Re(\lambda_i) & \Im(\lambda_i) \\ -\Im(\lambda_i) & \Re(\lambda_i) \end{bmatrix}, & \text{ha } \Im(\lambda_i) \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

A (2) reprezentáció egy speciális modális alaknak tekinthető, ahol a módusokat aszerint csoportosítottuk, hogy melyeket szeretnénk irányítani, és melyeket lecsatolni. Ez a blokkok egyszerű permutációjával elérhető. A későbbiekben az irányítandó alrendszerre a  $\{\cdot\}_c$  jelölést (control), míg a lecsatolandó alrendszerre a  $\{\cdot\}_d$  (decouple) jelölést alkalmazzuk. A probléma bemutatása során a tárgyalás egyszerűsítése céljából feltételezzük hogy az irányítandó alrendszer csak egy módust tartalmaz. Ez a megszorítás azonban könnyen feloldható, ahogy az bemutatásra került a [2] cikkben. Felhívjuk a figyelmet, hogy a (2) blokkdiagonális reprezentáció nincs szétcsatolva, ugyanis az alrendszerek a ki- és bemeneti mátrixokon keresztül kapcsolatba léphetnek egymással. Átviteli függvény mátrix alakban a rendszer felírása

$$\mathcal{G}(s) = \sum_{i \in \{c,d\}} \{C_i(sI - A_i)^{-1}B_i + D/2\} = \mathcal{G}_c(s) + \mathcal{G}_d(s), \quad (4)$$

ahol  $\mathcal{G}_c(s)$  az irányítandó,  $\mathcal{G}_d(s)$  a lecsatolandó alrendszert,  $s$  a Laplace operátort, és  $I$  a megfelelő dimenziójú egységmátrixot jelöli.

## 2.2. Minimális érzékenység

Egy dinamikus rendszer minimális érzékenysége a rendszer- és irányításelméletben, azon belül is a hibadetektálás irodalmában, gyakran használt és kutatott mérték (lásd [6] és [7]). Ezen cikkben a véges frekvencia intervallum felett értelmezett  $\mathcal{H}_-$  indexet használjuk a minimális érzékenység leírására, mely az alábbi módon van definiálva

$$\|\mathcal{G}_c(s)\|_{-}^{[\underline{\omega}, \bar{\omega}]} := \inf_{\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]} \underline{\sigma} \left[ \mathcal{G}_c(j\omega) \right], \quad (5)$$

ahol  $\underline{\sigma}$  jelöli a rendszer legkisebb szinguláris értékét. Továbbá  $j$  az imaginárius egységet,  $\omega$  a frekvencia változót (a Fourier transzformáció változóját),  $\underline{\omega}$  és  $\bar{\omega}$  pedig a vizsgált frekvenciatartomány alsó és felső határát jelöli. Egy dinamikus rendszer minimális érzékenységének kiszámítására számos módszer létezik, mi az általánosított Kalman - Yakubovich - Popov (GKYP) lemmán alapuló megközelítést [8] követjük, mely egy konvex optimalizálási feladatra vezet, ún. Lineáris Mátrix Egyenlőtlenség (Linear Matrix Inequality - LMI) típusú korlátozások mellett. A vonatkozó tétel a következőképpen fogalmazható meg:

2.1. TÉTEL. *Minimális érzékenység véges frekvenciatartomány felett [9]. Adott a rendszer állapotterez alakja (1) és átviteli függvény mátrixa (4). Legyen  $\Pi = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \beta^2 I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_y) \times (n_x+n_y)}$ , továbbá  $\omega, \bar{\omega}$  jelölje a frekvencia tartomány legkisebb és legnagyobb elemét, valamint legyen  $\tilde{\omega} = \frac{\omega+\bar{\omega}}{2}$ . Ekkor  $\|\mathcal{G}_c(s)\|_{\left[\frac{\omega}{-}, \bar{\omega}\right]} > \beta$  akkor és csak akkor, ha létezik  $P_c$  hermitikus,  $Q_c > 0$  pozitív definit mátrix, valamint  $\beta > 0$  skalár, hogy*

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_c & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C_c & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (6)$$

$$\text{ahol } \Xi = \begin{bmatrix} -Q_c & P_c + j\frac{\tilde{\omega}}{2}Q_c \\ P_c - j\frac{\tilde{\omega}}{2}Q_c & -\omega\bar{\omega}Q_c \end{bmatrix}.$$

*Bizonyítás.* A bizonyítás elérhető a [9] cikkben. □

### 2.3. Legnagyobb érzékenység

Egy dinamikus rendszer legnagyobb érzékenysége a robusztus irányítások irodalmában a  $\mathcal{H}_\infty$  norma, ami az alábbi módon definiált

$$\|\mathcal{G}_d(s)\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma} \left[ \mathcal{G}_d(j\omega) \right], \quad (7)$$

itt  $\bar{\sigma}$  jelöli a rendszer legnagyobb szinguláris értékét. Hasonlóan a  $\mathcal{H}_-$  index számításához,  $\mathcal{H}_\infty$  norma esetében is az LMI alapú megközelítést használjuk, amely az irodalomban Bounded Real Lemma-ként ismeretes és a következőképpen fogalmazható meg:

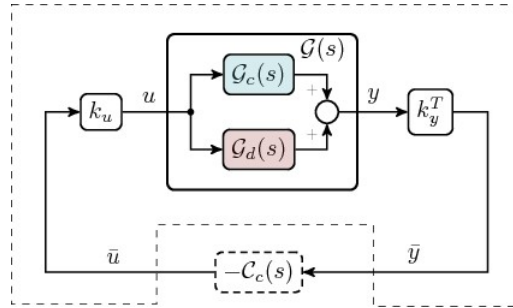
2.1. LEMMA. *A Bounded Real Lemma [10]. Legyen  $\gamma \geq 0$  egy nemnegatív konstans skalár. Ekkor  $\|\mathcal{G}_d(s)\|_{\infty}^{[0,\infty)} < \gamma$ , akkor és csak akkor, ha létezik olyan pozitív definit szimmetrikus  $P_d$  mátrix, hogy*

$$\begin{bmatrix} A_d^T P_d + P_d A_d + C_d^T C_d & P_d B_d + C_d^T D \\ B_d^T P_d + D^T C_d & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (8)$$

*Bizonyítás.* A bizonyítás megtalálható a [10] könyvben. □

## 3. Probléma megfogalmazás

Miután bevezettük a szükséges matematikai fogalmakat és jelöléseket, rátérünk a kitűzött feladat részletes ismertetésére. Tekintsük ehhez az 1. ábrát! Tervezzük



1. ábra. A zárt rendszer be- és kimeneti transzformációkra épülő irányítási struktúrája

meg a szaggatott vonallal jelölt „környezetet” úgy, hogy az lehetővé tegye a kiválasztott  $\mathcal{G}_c(s)$  alrendszer irányítását a hozzá tartozó  $\mathcal{C}_c(s)$  szabályzó segítségével, miközben a szabályzó a lehető legkisebb hatást gyakorolja a  $\mathcal{G}_d(s)$  alrendszerre. Matematikailag ez a minimális érzékenység  $\bar{u}$ -ról  $\bar{y}$ -ra történő maximalizálása a  $\mathcal{G}_c(s)$  alrendszeren keresztül, miközben az átvitel maximális érzékenységét minimalizáljuk a  $\mathcal{G}_d(s)$  alrendszeren keresztül. Ahogyan ez az 1. ábrán látható, a szétcsatolást be- és kimeneti transzformációk segítségével kívánjuk elérni. Vezessük be tehát a be- és kimeneti  $k_u \in \mathbb{R}^{n_u \times 1}$  és  $k_y \in \mathbb{R}^{n_y \times 1}$  normált ( $\|k_u\| = \|k_y\| = 1$ ) transzformációs vektorokat. Ezek a rendszer be- és kimeneteit egy-egy jellé vonják össze, egy SISO (Single Input Single Output) irányítási feladatot eredményezve. A bemeneti vektor szétesztja a beavatkozó jelet ( $u = k_u \bar{u}$ ), hogy az csak az irányítani kívánt alrendszerre hasson. Hasonlóan az  $\bar{y} = k_y^T y \in \mathbb{R}$  vektorral az irányítandó módusra vonatkozó információkat maximalizáljuk, míg a lecsatolandó módusra vonatkozókat minimalizáljuk. A bemutatott problémát a következőképp formalizálhatjuk a bevezetett  $\mathcal{H}_-$  és  $\mathcal{H}_\infty$  mértékek segítségével:

*3.1. Probléma.* Szétcsatolási probléma. Keressük azokat a normált  $k_u$  és  $k_y$  vektorokat, melyekkel az irányítandó alrendszer minimális erősítését maximalizáljuk, azaz

$$\begin{aligned} \max_{k_u, k_y} \quad & \beta \\ \text{korlátozások:} \quad & \|k_y^T \mathcal{G}_c(s) k_u\|_{-}^{[\omega, \bar{\omega}]} > \beta, \quad \beta \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

míg a lecsatolandó alrendszer maximális erősítését minimalizáljuk, azaz

$$\begin{aligned} \min_{k_u, k_y} \quad & \gamma \\ \text{korlátozások:} \quad & \|k_y^T \mathcal{G}_d(s) k_u\|_\infty < \gamma, \quad \gamma \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

a meghatározott  $[\omega, \bar{\omega}]$  frekvencia intervallum felett. A  $\beta$  és  $\gamma$  változók két nem-

negatív skalárt jelölnek, melyek a rendszer minimális és maximális erősítését jellemzik.

A következőkben röviden kitérünk a véges frekvenciatartomány bevezetésének szükségességére. A [11] cikk a minimális érzékenység LMI alapú számítását tárgyalja végtelen frekvenciaintervallum felett. Ez a megközelítés a 2.1. Lemmához hasonló eredményre jut, azonban a megoldhatóság feltétele hogy  $D \neq 0$ . A 4. fejezetben látni fogjuk, hogy a megoldandó feladatokban  $D$  értéke 0. Ezekben az esetekben a minimális érzékenység kiszámítása véges frekvencia intervallum felett lehetséges, ami viszont a több változó miatt növeli a probléma komplexitását. Az előbbiekkal szemben a maximális érzékenység számítása a 2.1. Lemma alapján  $D = 0$  mellett is megoldható. Így bár létezik véges frekvenciatartományra megfogalmazott formája is az említett lemmának (lásd [8], [12]), nem szükséges azt használnunk. Ezáltal egy kevesebb optimalizálási változót magába foglaló, egyszerűbb optimalizálási feladatot kell megoldanunk (a véges frekvenciaintervallumra vonatkozó megközelítés helyett), miközben a nem kívánt dinamika hatását a teljes frekvenciatartományon csökkenthetjük.

Logikus kérdésként merülhet fel, hogy egy egyszerűbb optimalizálási problémára vezet-e, ha  $k_u$ -t  $B_d$  sorvektor-terére merőleges vagy minimális normájú vektorként keressük (valamint  $k_y$ -t hasonló módon a  $C_d$  oszlopterére merőlegesen). LTI rendszerek esetében található lehet olyan  $k_u$  és  $k_y$ , ami a lecsatolandó alrendszer átvitelét csökkenti. További megfelelő korlátozások bevezetésével  $B_c$  és  $C_c$  figyelembevételével az irányítandó alrendszeren történő átvitelt is növelhetjük. Azonban más rendszerosztályokra, figyelembe véve azok speciális tulajdonságait, ez a megközelítés nehézkes. Ezzel szemben a 3.1. probléma megfogalmazása a rendszerelméletben széles körben alkalmazott Lineáris Mátrix Egyenlőtlenségekkel megfogalmazható rendszernormákon (a  $\mathcal{H}_\infty$  index esetében kvázi normán) alapul. A megközelítés előnye, hogy más rendszerosztályokra is könnyen kiterjeszhető, könnyen beilleszthető az azok vizsgálatára az irodalomban kialakult keretrendszerbe. A 6. fejezet megemlíti, hogy a módszert ezen tulajdonságának köszönhetően már sikeresen alkalmaztuk Lineáris Változó Paraméterű (LPV), valamint bizonytalan rendszerekre is.

#### 4. A javasolt szétcsatolási módszer

A be- és kimeneti transzformációs vektorokat egymásra épülő iterációs lépések során határozhatjuk meg. Első lépésben egy  $k_u$  bemeneti vektor számítását mutatjuk be, majd a második lépésben a hozzá tartozó  $k_y$  kimeneti vektort tervezük meg. Megjegyezzük, hogy a számítás sorrendje felcserélhető. Az algoritmus a rendszer  $D$  mátrixát nem veszi figyelembe, így a későbbiekben ettől eltekintünk. Amennyiben a rendszerben van  $D$  mátrix, a [2] cikkben bemutatott, a  $D$  hatását kompenzáló megközelítést javasoljuk. Ez a tervezés menetét nem befolyásolja.

#### 4.1. Bemenet szétcsatolás

Ebben az alfejezetben olyan  $k_u$  vektort kívánunk meghatározni, mely biztosítja, hogy a kiválasztott alrendszer állapotainak gerjesztése maximális legyen, miközben a többi alrendszer állapotaira való hatást minimalizálja. Ennek érdekében a rendszer kimeneteit ebben a lépésben úgy módosítjuk, hogy azok a rendszer állapotainak gerjesztését közvetlenül tükrözzék. Az új performancia kimeneteket az állapotok összegeként határozzuk meg<sup>2</sup>, azaz

$$A = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_c \\ B_d \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} J_c & J_d \end{bmatrix}, \quad (11)$$

ahol  $J_c \in \mathbb{R}^{1 \times n_{x_c}}$  és  $J_d \in \mathbb{R}^{1 \times n_{x_d}}$  egyesekből álló vektorok. A cél, hogy a  $\mathcal{H}_-$  index által jellemzett minimális érzékenységet maximalizáljuk az irányítandó alrendszer performancia kimenetére, míg a  $\mathcal{H}_\infty$  normával jellemzett maximális érzékenységet minimalizáljuk a lecsatolandó alrendszer esetében.

A részletek tárgyalása előtt megjegyezzük, hogy annak érdekében, hogy változóiban lineáris feladatot kapjunk, ebben a lépésben a (11) rendszer duális reprezentációját alkalmazzuk, amely

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_c^T & 0 \\ 0 & A_d^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} J_c^T \\ J_d^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} B_c^T & B_d^T \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Nyilvánvaló, hogy a duális reprezentáció nem módosítja egy rendszer minimális, illetve maximális érzékenységet.

Ezek után, ha a (6) és (8) egyenlőtlenségeket felírjuk a duális reprezentációra, majd behelyettesítjük az eredeti rendszerleírás mátrixait, úgy az alábbi alakokat kapjuk:

$$\begin{bmatrix} A_c^T & J_c^T \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A_c^T & J_c^T \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} B_c^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (13)$$

és

$$\begin{bmatrix} P_d A_d^T + A_d P_d + B_d K_u B_d^T & P_d J_d^T \\ J_d P_d & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (14)$$

ahol  $\Pi = \begin{bmatrix} -K_u & 0 \\ 0 & \beta^2 I \end{bmatrix}$ . Itt bevezettük a  $K_u = k_u k_u^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  ún. bemenetfúziós

---

<sup>2</sup>Az új kimeneti egyenletek megfelelő dimenziós egységmátrixokként történő definiálása is egy logikus választás lehetne, azonban ez problémákat eredményezne a (13) egyenlőtlenség megoldásakor. A [2] cikk A.1. fejezetében megmutattuk, hogy a (6) képletben megadott LMI feltétel csak ún. magas vagy négyzetes rendszerek esetében oldható meg (vagyis ahol  $n_y \leq n_u$ ). Az  $J_c, J_d$  választással garantálhatjuk, hogy a (12) rendszer négyzetes vagy magas reprezentációt eredményezzen.



mátrixot: a bemenet transzformációs vektorok diadikus szorzatát. Az egyenlőtlenségekben  $K_u$  csak a duális reprezentáció miatt jelenik meg, mely használata nélkül bilineáris mátrix egyenlőtlenségekre vezetne a feladat. Azonban  $K_u$  definíciójából következően egy 1-rangú mátrix, amit a feladat megoldása során figyelembe kell venni. Mivel ebben a lépésben a mérési egyenletektől eltekintünk, ezért  $D = 0$ .

Ezeket figyelembe véve, a keresett bemeneti fúziós vektor meghatározására az alábbi optimalizálási feladaton alapuló módszert javasoljuk.

*4.1. Módszer.* Bemeneti fúziós vektor tervezés. Az (1) rendszerhez tartozó  $k_u$  optimális fúziós vektor kiszámítható mint a  $K_u$  fúziós mátrix legnagyobb szinguláris értékéhez tartozó baloldali szinguláris vektora, ahol  $K_u$  a következő optimalizálási feladat eredménye

$$\begin{aligned} & \min_{P_d, K_u, P_c, Q_c, \beta^2, \gamma^2} \quad -\beta^2 + \gamma^2 \\ & \text{korlátozások: (13), (14), } P_d = P_d^T, P_d \succeq 0, \\ & P_c = P_c^T, Q_c = Q_c^T, Q_c \succeq 0, \\ & K_u = K_u^T, 0 \preceq K_u \preceq I, \text{ és } \text{rang}(K_u) = 1, \end{aligned} \tag{15}$$

ahol  $I$  a megfelelő dimenziójú egységmátrix.

Megjegyezzük, hogy a 4.1. módszer több optimalizálási változó egyidejű minimalizálását írja elő, ami gyakori a  $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$  hibadetektáló szűrő tervezési problémáknál [6]. Azonban a  $\text{rang}(K_u) = 1$  feltétel egy nem konvex feltétel, melynek kielégítése több módszerrel is megvalósítható, melyeket röviden az alábbiakban foglalhatunk össze:

*4.1. Megoldás.* Egy korábbi publikációban a  $K_u$  mátrix nyomának minimalizációjára alapuló heurisztikus eljárást alkalmaztunk a rangfeltétel betartására [13]. Az eljárás lényege, hogy egy négyzetes mátrix rangjának minimalizálása visszavezethető a mátrix nyomának minimalizálására. Ebben az esetben a nem konvex rang feltételt felváltja egy, a célfüggvényhez hozzáadott, a  $K_u$  nyomának minimalizálására vonatkozó tag. Azonban ez a heurisztikus megközelítés a gyakorlatban sokszor nem eredményez valóban 1-rangú megoldást.

*4.2. Megoldás.* Egy másik lehetséges megközelítés a váltakozó vetítések módszere, melyet a [2] cikkben alkalmaztunk a vonatkozó problémára, a [14] cikk alapján. Ebben a szerzők egy csökkentett dimenziós  $\mathcal{H}_\infty$  szabályzó tervezési feladat során elégítik ki a felmerülő rangfeltételt a váltakozó vetítések módszerének segítségével. Az alapötlet a következő. Vezessünk be egy  $\Gamma_{\text{konvex}}$  konvex halmazt, melyet (15) definiál a  $K_u$ -ra vonatkozó rangfeltétel nélkül. Továbbá a  $K_u$ -ra vonatkozó nem-konvex rangfeltételt értelmezzük egy  $\Gamma_{\text{rang}}$  halmaz felett. Feltételezzük, hogy

a két halmaznak van nem üres metszete, tehát létezik 1-rangú megoldása az optimalizálási feladatnak. A célunk, hogy ebben a metszetben találjunk megfelelő  $K_u$  mátrixot. A váltakozó vetítések módszerével a feladat megoldható a két halmaz közötti merőleges vetítések egymásutáni alkalmazásával. A módszer garantálja, hogy minden egyes vetítés során a vetített mátrix képe a másik halmazon a lehető legközelebb esik a vetített mátrixhoz. Továbbá bizonyítható, hogy a vetítések egyértelműek [15]. Azonban a módszer egy bizonyos szintű heurisztikát még mindig hordoz magában, amiből fakadóan csak lokális konvergencia garantálható, globális nem, de a gyakorlatban kielégítőnek bizonyul.

A módszer több merőleges vetítés egymásutáni sorozatából áll. A teljes rangú megoldásból kiindulva minden egyes sorozatban eggyel csökkentjük a  $K_u$  mátrix rangját, amíg el nem érjük a kívánt 1-rangú megoldást. A vetítések során a következő két lemmát használjuk.

4.1. LEMMA. *Merőleges vetítés a  $\Gamma_{\text{rang}}$  halmazra [14]. Legyen  $Z \in \Gamma_{\text{rang}}^{n \times n}$  és legyen  $Z = USV^T$  a  $Z$  szinguláris érték felbontása. A  $Z^* = \mathcal{P}_{\Gamma_{\text{rang}}^{n-k}} Z$ , merőleges vetítése  $Z$ -nek a  $\Gamma_{\text{rang}}^{(n-k) \times (n-k)}$   $n - k$  dimenziós halmazra a*

$$Z^* = US_{n-k}V^T \quad (16)$$

összefüggéssel definiálható, ahol az  $S_{n-k}$  diagonális mátrixot úgy kapjuk, hogy  $S$ -nek a  $k$  darab legkisebb szinguláris értékét 0-val helyettesítjük.

4.2. LEMMA. *Vetítés az LMI-k által definiált  $\Gamma_{\text{konvex}}$  konvex halmazra [14]. Legyen  $\Gamma_{\text{konvex}}$  konvex halmaz, egy LMI-vel definiálva. Akkor az  $X^* = P_{\Gamma} X$  vetítés egyértelműen számítható az alábbi  $Y$ -ra vonatkozó szemidefinit optimalizálási probléma segítségével a következőképp*

$$\begin{aligned} & \min \quad \text{trace}(S) \\ & \text{korlátozások:} \quad \begin{bmatrix} S & (Y - X)^T \\ Y - X & I \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & Y \in \Gamma_{\text{konvex}}, \quad S, Y, X \in R^{n \times n}, \end{aligned} \quad (17)$$

ahol  $S = S^T$ .

Megjegyezzük, hogy a Schur-komplement tétel [16] alkalmazásával a (17)-ben adott LMI átírható  $S - (Y - X)I(Y - X)^T \succeq 0$  alakba. Így figyelembe véve a Frobenius norma ( $\|A\|_F^2 = \text{trace}(AA^T)$ ) definícióját  $A = Y - X$  helyettesítés mellett látható, hogy (17) az  $X$  és  $Y$  mátrixok Frobenius normából származtatott távolságát minimalizálja. A váltakozó vetítésekkel kapcsolatos további részleteket az érdeklődő olvasó a [14] cikkben találhat.

A bemeneti transzformációs vektor tervezés a 4.1. módszer segítségével megtehető, a fentebb vázolt megoldásokat felhasználva. Az eredményül kapott  $k_u$  vektort alkalmazzuk az alrendszer bemeneteire, majd használjuk a kimeneti transzformációs vektor számítása során az alábbi jelölésrendszert:  $\bar{A}_{\{c,d\}} = A_{\{c,d\}}$ ,  $\bar{B}_{\{c,d\}} = B_{\{c,d\}}k_u$ ,  $\bar{C}_{\{c,d\}} = C_{\{c,d\}}$ .

#### 4.2. Kimenet szétcsatolás

Miután meghatároztuk a bemeneti szétcsatolás vektorát, figyelmünket a kimeneti transzformációs vektor meghatározására fordítjuk.  $k_y$  egy összevont kimenetben maximalizálja az irányítani kívánt alrendszerre vonatkozó információt, míg minimalizálja a többi alrendszerre vonatkozókat. Az előző alfejezethez hasonlóan az irányítani kívánt alrendszeren keresztül maximalizáljuk a minimális érzékenységet, míg a lecsatolandó alrendszereken keresztül minimalizáljuk a legnagyobb érzékenységet. Mivel a  $D$  mátrixot a bemeneti transzformáció során nem vettük figyelembe, így itt is eltekintünk tőle, ennek hatása figyelembe vehető a zárt körben egy  $-k_y^T Dk_u$  előreccsatoló tag bevezetésével.

Alkalmazva az előző alfejezet végén bevezetett jelöléseket, a feladat megoldásához szükséges LMI korlátozások a következőképpen írhatóak

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{B}_c \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{B}_c \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \bar{C}_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (18)$$

és

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_d^T P_d + P_d \bar{A}_d + \bar{C}_d^T K_y \bar{C}_d & P_d \bar{B}_d \\ \bar{B}_d^T P_d & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (19)$$

ahol  $\Pi = \begin{bmatrix} -K_y & 0 \\ 0 & \beta^2 I \end{bmatrix}$ . Hasonlóan az előző alfejezethez, itt is bevezetésre került

a diadikus szorzatként adódó  $K_y = k_y k_y^T$  kimenet transzformációs mátrix.

*4.2. Módszer.* Kimeneti transzformációs vektor tervezése. A rendszerhez tartozó  $k_y$  optimális kimeneti transzformációs vektor a  $K_y$  mátrix legnagyobb szinguláris értékéhez tartozó baloldali szinguláris vektoraként számítható.  $K_y$  kielégíti a következő optimalizálási feladatot.

$$\begin{aligned} & \min_{P_d, K_y, P_c, Q, \beta^2, \gamma^2} && -\beta^2 + \gamma^2 \\ & \text{korlátozások: (18), (19), } && P_d = P_d^T, P_d \succeq 0, \\ & && P_c = P_c^T, Q = Q^T, Q \succeq 0, \\ & && K_y = K_y^T, 0 \preceq K_y \preceq I, \text{ és rang}(K_y) = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Ezen probléma megoldása szintén a javasolt 4.1., valamint 4.2. eljárásokkal lehetséges.

Végezetül a kapott  $k_u$  és  $k_y$  vektorokat alkalmazva az egyes alrendszerekre, a szétcsatolt rendszerfelírás a következő alakban adódik:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\{c,d\}}(t) &= A_{\{c,d\}}x_{\{c,d\}}(t) + B_{\{c,d\}}k_u\bar{u}(t), \\ \bar{y}_{\{c,d\}}(t) &= k_y^T C_{\{c,d\}}x_{\{c,d\}}(t).\end{aligned}\quad (21)$$

## 5. Demonstrációs példa

A kidolgozott eljárást egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be, ahol a rendszer az alábbiak szerint adott

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.6 & 0 \\ -1.6 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -1.4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_c \\ B_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 & 0.3 \\ -0.4 & -0.2 & 0.1 \\ -0.6 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_c & C_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & -0.8 \\ -0.8 & -0.7 & -0.9 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (22)$$

A rendszer két stabil módból áll, ahol az elsőt szeretnénk irányítani, és a másodikat lecsatolni. Mielőtt a rendszer szétcsatolásával foglalkoznánk, vizsgáljuk meg annak viselkedését irányíthatóság és megfigyelhetőség szempontjából! A rendszer állapotainak irányításához szükséges energia, illetve az állapotok megfigyelhetőségének mértéke az úgynevezett irányíthatósági és megfigyelhetőségi Gram mátrixok sajátértékeivel számszerűsíthető. Az irányíthatósági Gram mátrix az

$$AW + WA^T + BB^T = 0, \quad (23)$$

egyenlet pozitív definit  $W$  megoldásaként számítható. Ezek az egyes alrendszerekre lebontva

$$\lambda_c(W_c) = [0.4096 \quad 0.5904], \quad \text{és} \quad \lambda_d(W_d) = 0.3714 \quad (24)$$

értékeket veszik fel a szétcsatolás előtt.

A  $k_u$  és  $k_y$  transzformációs vektorokat az előző fejezet alapján számíthatjuk. A frekvencia tartományt, ami felett a szétcsatolást el szeretnénk érni, a  $[0 \quad \omega_n]$  rad/s intervallumként határoztuk meg, ahol  $\omega_n$  az első módus természetes frekvenciája. A 4.2. megoldási megközelítést alkalmazva a

$$k_u^T = [-0.7979 \quad -0.0167 \quad -0.6026]^T \quad \text{és} \quad k_y^T = [-0.6956 \quad 0.7185]^T$$

vektorokat kaptuk eredményül. Ha alkalmazzuk őket a rendszer bemenetére és kimenetére, a reprezentáció a következőképp módosul:

$$Bk_u = \begin{bmatrix} B_c \\ B_d \end{bmatrix} k_u = \begin{bmatrix} -0.7376 \\ 0.2622 \\ \approx 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$k_y^T C = k_y^T \begin{bmatrix} C_c & C_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5748 & -1.0594 & -0.0902 \end{bmatrix}.$$

Az eredményekből látható, hogy az algoritmus nagy súlyokat rendel az irányítandó alrendszerhez tartozó elemekhez, míg minimalizálni igyekszik a lecsatolandókhoz tartozó elemeket. Ennek megfelelően az irányíthatósági Gram mátrix sajátértékei is úgy változnak, hogy a lecsatolandó alrendszerhez tartozóak jelentősen csökkennek

$$\lambda_c(\tilde{W}_c) = \begin{bmatrix} 0.2901 & 0.4759 \end{bmatrix}, \text{ és } \lambda_d(\tilde{W}_d) = 3.58 \cdot 10^{-14} \approx 0. \quad (26)$$

Mivel az irányításhoz szükséges energia a Gram mátrix sajátértékeinek reciprokával arányos, ezért látszik, hogy a transzformációk alkalmazása után egy SISO szabályzó gyakorlatilag nem tud hatást gyakorolni a leválasztandó alrendszerre. Mindeközben az irányítandó alrendszerhez tartozó sajátértékek csak kis részben változtak, tehát nem romlott jelentősen az irányíthatóságuk.

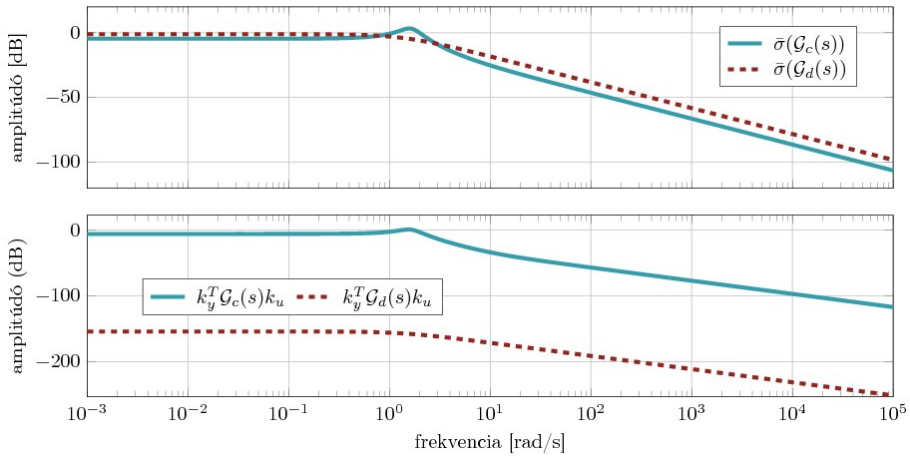
Az eredmények átfogó grafikus szemléltetése az alrendszerek szinguláris érték görbéinek segítségével adható meg. Így áttekinthető, hogy a teljes frekvencia tartományon hogyan változik a gerjesztő jelek átvitele a transzformációk alkalmazásának hatására. A 2. ábra felső alábrája szemlélteti az alrendszerek maximális érzékenységét a frekvencia függvényében. A transzformációk alkalmazása után már minden alrendszerhez csak egy átviteli függvény és így csak egy szinguláris érték görbe tartozik. Ezen görbét a 2. ábra alsó alábrája szemlélteti. Jól látható, hogy az irányítandó alrendszer az elérhető maximális érzékenységét közel megőrizte, miközben a lecsatolandó alrendszer átvitele minden frekvencián jelentősen gyengült.

## 6. Nyitott kérdések

A kidolgozott módszertan számos új kutatási területet nyit meg, illetve matematikailag is érdekes feladatokat fogalmaz meg, melyeket röviden ismertetünk.

### Szétcsatolhatósági feltétel

Jelenleg nem ismert olyan metrika, amely segítségével az alrendszerek szétcsatolhatóságát jellemezhetnénk. A korábban hivatkozott [2] cikkben azonban röviden foglalkoztunk a szétcsatolhatóság feltételével az alábbiak szerint.



2. ábra. Felső: Az alrendszerek legmagasabb szinguláris érték görbéi transzformációk nélkül. Alsó: A szinguláris értékek a transzformáció alkalmazása után.

A [17] cikk bemutatja, hogy a  $|q_i^T b_j| = |q_i| |b_j| \cos(\theta_{ij})$  elem nagysága az  $i$ . módus  $j$ . bemenetről történő irányíthatóságának egy megfelelő jellemzése. Az összefüggésben  $q_i$  az  $i$ . módus baloldali sajátvektora,  $b_j$  a  $j$ . bemenethez tartozó bemeneti vektor (a  $B$  mátrix  $i$ . módushoz tartozó partíciójának  $j$ . oszlopa),  $\theta_{ij}$  pedig a két vektor által bezárt szög. Annak érdekében, hogy az alrendszer irányítható legyen a  $j$ . bemenetről, a  $b_j$  vektor nem tartalmazhat csupa 0 elemeket. Továbbá ezen vektor elemeinek nagysága jellemzi, hogy mekkora hatást tudunk gyakorolni a kiválasztott alrendszerre az adott bemeneten keresztül, így az irányíthatóság egy mérőszáma. Modális alakban az érvelés tovább egyszerűsödik, hiszen nem szükséges a két vektor és a közbezárt szögük kiszámítása. Ebben az esetben a modális alak  $B$  mátrixából kiolvasott  $b_j$  vektor közvetlenül jellemzi az adott bemenet hatását a módusra. Ezek alapján a bemenet transzformáció során a  $B_c k_u$  vektornak az elemeit maximalizálni kell, miközben a  $B_d k_u$  vektor elemeit minimalizálni. Ez nyilvánvalóan elérhető, ha a  $B_c$  mátrix sorai által kifizített altér távol fekszik a  $B_d$  sorai által kifizített altértől. Hasonló érvelés mondható el a rendszer kimenetéhez kapcsolódóan is.

Kérdés, hogy lehet-e ennél szisztematikusabb eljárást bemutatni arról, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie ahhoz, hogy két alrendszert szétcsatlóssunk egymástól. Illetve, hogy milyen feltételek szerint határozható meg, hogy legfeljebb hány alrendszert lehet egymástól függetlenül irányítani.

## Nem konvex rang feltétel

Ahogy az optimalizálási feladat javasolt megoldásai során bemutattuk, a rangfeltétel teljesítéséhez alkalmazott megoldások bizonyos fokú heurisztikát tartalmaznak, és így nem garantálnak globális optimumot a probléma megoldása során. Nyitott kérdésként merül fel, hogy vajon megoldható-e úgy a rangfeltétel kielégítése, hogy az ne heurisztikus eljárásokon alapuljon, vagy átfogalmazható-e úgy a problémafelírás, hogy elkerüljük az egy rangú transzformációs mátrixok bevezetését. Ígéretes irányvonalnak tekintjük az elmúlt években kidolgozásra került Lagrange-dualitáson alapuló megoldásokat, melyek konvex feladatra vezetnek vissza a rangfeltételt.

## Változó paraméterű rendszerek

Az eljárás kiterjeszthető Lineáris Változó Paraméterű rendszerekre is, ahogyan azt [18] megmutattuk. Mindamellett, hogy erre a rendszerosztályra is sikerült szétcsatolást elérnünk, számos nyitott kérdéssel találkoztunk. Példaként említjük a változó paraméterű rendszerekre vonatkozó rangfeltételnek a definícióját és számítási módját. Hogyan definiálható egy mátrixfüggvény esetén a rangfeltétel, illetve hogyan számítható az?

## Bizonytalan rendszerek

Legújabb kutatási eredményeink bizonytalan rendszerek szétcsatolására vonatkoznak. Ennek első lépéseként kiterjesztést kellett adnunk a minimális érzékenységnek olyan esetekre is, amikor a rendszer leírása nem pontosan ismert. Ez lényegében egy legrosszabb eset (worst-case) érzékenységgént értelmezhető. Ennek számítása különböző bizonytalansági struktúrák esetén (pl. politopikus, Lineáris Tört Transzformációval, vagy Kvadratikus Integrál Korlátozással leírt) hasonló alapelvek mentén történik, azonban számos új kihívást tartogat.

## 7. Konklúzió

Be és kimeneti transzformációs vektorok alkalmazásán alapuló szétcsatolási eljárást mutattunk be dinamikus rendszerek alrendszerre bontásához kapcsolódóan. Az alkalmazott megközelítés segítségével a rendszerhez egyszerűbb felépítésű strukturált szabályzó tervezhető, miközben a különböző szabályzási körök közti interakció minimálisra csökkenthető. Egy egyszerű példán keresztül bemutattuk az algoritmus működését, és szemléltettük hogy megfelelő transzformációs vektorok alkalmazásával a kiválasztott alrendszerek a teljes frekvenciatartományon szétcsatolhatóak egymástól.

## 8. Támogatások

A bemutatott eredményekhez vezető kutatást az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatta az Új Nemzeti Kiválóság Program ÚNKP-19-4 pályázatán keresztül.



A jelen publikációban megjelenő kutatások az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott TKP2020 Intézményi Kiválóság Alprogram támogatásával, a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal által kibocsátott támogatói okirat alapján valósultak meg (projekt azonosító: TKP2020 BME-IKA-MIFM).

A publikációban szereplő kutatást, amelyet a SZTAKI valósított meg, az Innovációs és Technológiai Minisztérium és a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatta az Autonóm Rendszerek Nemzeti Laboratórium keretében.

## Hivatkozások

- [1] P. APKARIAN, M. N. DAO, AND D. NOLL: *Parametric robust structured control design*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. **60** No. **7**, pp. 1857-1869 (2015). DOI: [10.1109/TAC.2015.2396644](https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2396644)
- [2] T. BAÁR AND T. LUSPAY: *Decoupling through input-output blending*, International Journal of Control, Vol. just-accepted, pp. 1-15 (2020). DOI: [10.1080/00207179.2020.1773540](https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1773540)
- [3] B. P. DANOWSKY, P. THOMPSON, D.-C. LEE, AND M. J. BRENNER: *Modal isolation and damping for adaptive aeroservoelastic suppression*, in AIAA Atmospheric Flight Mechanics (AFM) Conference, (2013). DOI: [10.2514/6.2013-4743](https://doi.org/10.2514/6.2013-4743)
- [4] M. PUSCH AND D. OSSMANN: *H<sub>2</sub>-optimal blending of inputs and outputs for modal control*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, pp. 1-8 (2019). DOI: [10.1109/TCST.2019.2942281](https://doi.org/10.1109/TCST.2019.2942281)
- [5] T. KAILATH: *Linear systems*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, Vol. **156**, (1980). ISBN 0 13 536961 4
- [6] J. L. WANG, G.-H. YANG, AND J. LIU: *An LMI approach to H<sub>-</sub> index and mixed H<sub>-</sub>/H<sub>∞</sub> fault detection observer design*, Automatica, Vol. **43** No. **9**, pp. 1656-1665 (2007). DOI: [10.1016/j.automatica.2007.02.019](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.02.019)
- [7] K. GLOVER AND A. VARGA: *On solving non-standard H<sub>-</sub>/H<sub>2</sub>/∞ fault detection problems*, in 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, IEEE, pp. 891-896 (2011). DOI: [10.1109/CDC.2011.6160723](https://doi.org/10.1109/CDC.2011.6160723)
- [8] T. IWASAKI, G. MEINSMA, AND M. FU: *Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma*, Mathematical Problems in Engineering, Vol. **6** No. **2-3**, pp. 305-320 (2000). DOI: [10.1155/S1024123X00001368](https://doi.org/10.1155/S1024123X00001368)



- [9] H. WANG AND G.-H. YANG: *A finite frequency domain approach to fault detection observer design for linear continuous-time systems*, Asian Journal of Control, Vol. **10**, No. **5**, pp. 559-568 (2008). DOI: [10.1002/asjc.56](https://doi.org/10.1002/asjc.56)
- [10] C. SCHERER AND S. WEILAND: *Linear matrix inequalities in control*, Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands, (2000).  
<https://www.imng.uni-stuttgart.de/mst/files/LectureNotes.pdf>
- [11] J. LIU, J. L. WANG, AND G.-H. YANG: *An LMI approach to minimum sensitivity analysis with application to fault detection*, Automatica, Vol. **41** No. **11**, pp. 1995-2004 (2005). DOI: [10.1016/j.automatica.2005.06.005](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.06.005)
- [12] T. IWASAKI AND S. HARA: *Generalization of Kalman-Yakubovic-Popov lemma for restricted frequency inequalities*, in Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003., IEEE, Vol. **5**, pp. 3828–3833 (2003). DOI: [10.1109/ACC.2003.1240432](https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1240432)
- [13] T. BAÁR AND T. LUSPAY: *An  $H - /H_\infty$  blending for mode decoupling*, in 2019 American Control Conference (ACC). IEEE, pp. 175-180 (2019).  
DOI: [10.23919/ACC.2019.8814947](https://doi.org/10.23919/ACC.2019.8814947)
- [14] K. M. GRIGORIADIS AND E. B. BERAN: *Alternating projection algorithms for linear matrix inequalities problems with rank constraints*, in Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control, SIAM, pp. 251-267 (2000).  
<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898719833.ch13>
- [15] D. G. LUENBERGER: *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, (1997). ISBN 9780471181170.
- [16] P. RÓZSA AND G.-NÉ STUBNYA: *Lineáris algebra és alkalmazásai*. Tankönyvkiadó (1991). ISBN 963 18 3163 9.
- [17] A. HAMDAN AND A. NAYFEH: *Measures of modal controllability and observability for first- and second-order linear systems*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. **12** No. **3**, pp. 421-428 (1989). DOI: [10.2514/3.20424](https://doi.org/10.2514/3.20424)
- [18] T. BAÁR, P. BAUER, AND T. LUSPAY: *Parameter varying mode decoupling for LPV systems*, Presented at the 2020 IFAC World Congress, (2020). Conference date: July 11-17, 2020.



Baár Tamás 1989-ben született Budapesten. A budapesti Toldy Ferenc gimnáziumban érettségizett, majd tanulmányait a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Karán folytatta. 2016-ban szerezte járműmérnöki mesterszakos diplomáját. Doktori tanulmányait Luspay Tamás vezetésével a Kandó Kálmán Doktori Iskolában végzi. Kutatása során nagy komplexitású rendszerek analízisének és szintézisének egyszerűsítésével foglalkozik, a be- és kimeneti jelek optimális felhasználását alapul véve. Emellett a Számítástechnikai és Automatizálási

Kutató Intézet Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólabor tudományos segédmunkatársaként dolgozik.

#### BAÁR TAMÁS

ELKH, SZTAKI, Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólabor  
1111 Budapest, Kende u. 13-17.  
baartamas@sztaki.hu



Luspay Tamás 2006-ban végzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedésmérnöki Karán. 2006-tól fiatal kutatóként dolgozott a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetében. PhD fokozatát 2011-ben szerzett a BME Baross Gábor Közlekedéstudományi Doktori Iskolában. 2011-től 2015-ig a University of Houston Mechanical Engineering karán végezte poszt-doktori kutatásait. 2015-től a SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólabor tudományos munkatársa. Kutatási területe a dinamikus rendszerek irányítása, analízise, különös tekintettel a nagyméretű, nemlineáris (változó paraméterű) komplex rendszerekre.

#### LUSPAY TAMÁS

ELKH, SZTAKI, Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólabor  
1111 Budapest, Kende u. 13-17.  
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék  
1111 Budapest, Stoczek u. 2. St. épület, 1. emelet 110.  
tluspay@sztaki.hu

DECOUPLING OF DYNAMICAL SYSTEMS BY INPUT AND OUTPUT  
TRANSFORMATIONS

TAMÁS BAÁR, TAMÁS LUSPAY

The paper presents a novel decoupling method, based on blending the input and output signals of linear dynamical systems. For this purpose, blend vectors are introduced and calculated such that the minimum sensitivity of the controlled mode is maximized, while the worst case gain of the other subsystems is minimized from the blended input to the blended output. The problem is transformed to a standard optimization program subject to Linear Matrix Inequality constraints. An academic example is given to validate the method and to illustrate how the proposed approach can be applied for control engineering problems.