

## A FŰTÖTT HATÁRRÉTEGET LEÍRÓ EGYENLETRENDSZER ÖNHASONLÓ MEGOLDÁSAI

BARNA IMRE FERENC, MÁTYÁS LÁSZLÓ, HRICZÓ KRISZTIÁN

Dolgozatunkban a hővezetési határréteget leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer (PDE) időfüggő önhasonlós megoldásait elemzzük. A tanulmányozás során kétféle hővezetési modellt vizsgálunk és hasonlítunk össze. A reguláris hővezetési modell esetén a sebesség, nyomás és hőmérséklet dinamikai változóinak tér és időfüggését kifejezzük speciális függvények alkalmazásával. Abban az esetben, ha a hővezetési egyenletben egy további, úgynevezett viszkózus melegedési tagot is figyelembe veszünk (amely nagyobb, realisabb folyadék sebességek esetén érvényes), akkor a hőmérséklet eloszlás nem adható meg analitikus alakban. A viszkózus növekedési tag alkalmazásakor a hőmérséklet eloszlás korábbi oszcillációi kisimulnak.

### 1. Bevezető

Evidenciának tekinthetjük, hogy a térben és időben lejátszódó folytonos természeti és társadalmi jelenségeket PDE-vel tudjuk adekvát módon leírni. Az áramlástan köztudottan egy ilyen tudományterület. Ennek a diszciplínának egyik igen fontos ága a határrétegekben lejátszódó fizikai folyamatokkal foglalkozik.

Ludwig Prandtl volt ezen tudományterület úttörője, aki a huszadik század elején skálázási érveléssel bebizonyította, hogy a kétdimenziós Navier-Stokes egyenletek tagjainak hozzávetőleg fele elhagyható a határrétegekben lejátszódó áramlási jelenségek vizsgálata esetén [1]. Blasius 1908-as dolgozatában [2] megadta az összenyomhatatlan stacioner két dimenziós határrétegben való áramlás profilját. A határrétegekben lejátszódó fizikai folyamatokat Schlichting mára már klasszikussá vált tankönyvéből bárki részletekbe menően elsajátíthatja [3].

A fenti folyamatok jelenkori, aktuális tudományos és mérnöki alkalmazásait pedig Hori [4] monográfiájából ismerhetjük meg. Az elmúlt évtizedek során számos kutató foglalkozott a határréteget leíró PDE-vel, a továbbiakban a teljesség igénye nélkül megemlítünk néhány számunkra releváns dolgot. Libby és Fox [5] perturbációs módszerekkel adott néhány megoldást. Ma és Hui [6] önhasonlós megoldásokat mutatott be a határrétegekre vonatkozóan. A kilencvenes években Burde

[7, 8, 9] publikált különböző analitikus megoldásokat a témában. Weidman [10] további megoldásokat publikált határrétegekre keresztirányú áramlásban. Ludlow és munkatársai [11] szintén önhasonló megoldásokat származtattak. Stacionárius nem-newtoni határrétegeket Bognár [12] analizálta és adott önhasonló megoldásokat. A későbbiek során pedig általánosította a megoldásait a stacioner hővezetési mechanizmust is figyelembe véve [13, 14, 15]. Korábbi publikációink során már vizsgáltuk a kétdimenziós nem-newtoni folyadékokat leíró Navier-Stokes egyenletet, illetve a Rayleigh-Bénard-féle hővezetési problémákat [16, 17, 18]. Kijelenthetjük, hogy bizonyos szempontból a fűtött határréteg problémája részben egy Rayleigh-Bénard feladathoz is hasonlít. Jelenlegi dolgozatunkban a Sedov által bevezetett önhasonló Ansatz-ot [19, 20] alkalmazzuk és ezáltal a kezdeti PDE rendszert egy nemlineáris csatolt közönséges differenciálegyenlet-rendszerré (KDE) tudjuk transzformálni. A származtatott KDE rendszert kvadratúrával tudjuk megoldani és így analitikus eredményeket kapunk a sebességre, a hőmérsékletre, illetve a nyomásra mint eredeti dinamikai változókra.

Az alkalmazott vizsgálati módszerünket két megfontolás teszi indokolttá. Az első, hogy a nemlineáris jelenségeket leíró nemlineáris PDE-k megoldásának nincsen általános, egzaktul kidolgozott matematikai elmélete, vagyis nem létezik általános megoldási módszer. A vizsgálatok néhány módszertől eltekintve ad-hoc technikát igényelnek. Az egyik ilyen módszer a redukciós technika, amikor valamilyen új (a hely és időváltozó kombinációjából adódó) változó segítségével a kezdeti PDE-k KDE-ké transzformálhatóak, amelyeket sok esetben kvadratúrával integrálva analitikus végeredményt kapunk. A kezdeti fizikai paraméterek pl. a hővezetési állandó, a sűrűség a végső KDE-ben mint szabad paraméterek továbbra is megmaradnak és hatásuk direkt módon vizsgálhatóvá válik.

Véleményünk szerint két ilyen fajta fizikailag releváns redukciós Ansatz (vagy másnéven próbafüggvény) létezik, amelyek eredete a két ismert lineáris időfüggő PDE-ben keresendő. Ez a két alapvető egyenlet a hullám-, illetve a diffúziós (vagy hővezetési) egyenlet. Linearitásukból adódóan megoldásaikra igaz a szuperpozíció tétele. Mindkét PDE-re létezik természetes próbafüggvény vagy Ansatz. A hullámegyenlet egy tetszőleges fizikai változóra felírva  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  alakú, ahol  $c$  a hullám terjedési sebességét jelöli. A megoldásokat a közismert haladó hullámú Ansatz-cal,  $u = f(x \pm ct)$ -vel számíthatjuk ki, amelyet szinte minden fizika szakkönyv említ. A diffúziós egyenlet esetén a Gauss-féle megoldás többféle módon származtatható, amelyeket szinte minden szak-, illetve tankönyv részletesen le is ír, viszont a megfelelő és természetes próbafüggvényt, az önhasonló Ansatz-ot nem említik. Néhány sorban megmutatható, hogy az önhasonló Ansatz ( $t^{-\alpha} f[x/t^\beta]$ ) a két szabad kitevőjével ( $\alpha, \beta$ ) természetes módon adja meg az időben lecsengő, ugyanakkor a térben szétfolyó (diszperzív) Gauss alakú fundamentális megoldást [21].

Ezen két Ansatz segítségével tetszőleges nemlineáris PDE (vagy PDE rendszer) érdemben vizsgálható és az eredményekből megítélhetjük, hogy az egyenlet

milyen mértékben mutat hullám, illetve diszperzív szétfolyó tulajdonságokat. A teljesség érdekében megemlítjük a Lie szimmetrián [22] alapuló vizsgálati módszereket. Ezekkel a módszerekkel általában többféle, de leginkább csak matematika-ilag érdekes és a fizikai elveknek sok esetben ellentmondó pl. divergens, végtelen energiájú megoldások származtathatóak. Személyes tapasztalataink szerint a Lie szimmetriát alkalmazó szerzők dolgozataikban eredményként kapott függvényeiket egyáltalán nem prezentálják ábrákon, illetve a megoldások paraméter függéseit és ezek fizikai diszkusszióit is mellőzik.

A jelenlegi cikk szerzői egy jó évtizede kutatják a hidrodinamikai [23, 24], kvantummechanikai [25] és elektrodinamikai folyamatokat [26] a haladó hullámú, illetve a fent említett (és a továbbiakban részletezésre kerülő) önhasonló Ansatz-ok segítségével. Ezáltal a vizsgált jelenségek *globális* hullám, illetve diffúzív (időben „szétfolyó”) természetére vonatkozóan kapunk releváns információkat. A feladat további kihívását adja, hogy némely hullámszerű folyamatnál a két módszer összefüggővé válik [27]. A továbbiakban a fűtött határréteget leíró PDE-et fogjuk az önhasonló Ansatz-cal elemezni. Tudomásunk szerint a szakirodalomban a fűtött határréteg egyenleteinek még nem léteznek ilyenfajta analitikus időfüggő megoldásai.

## 2. Az alkalmazott modell és a származtatott eredmények

Vizsgálatainkat az alábbi PDE rendszeren mutatjuk be:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

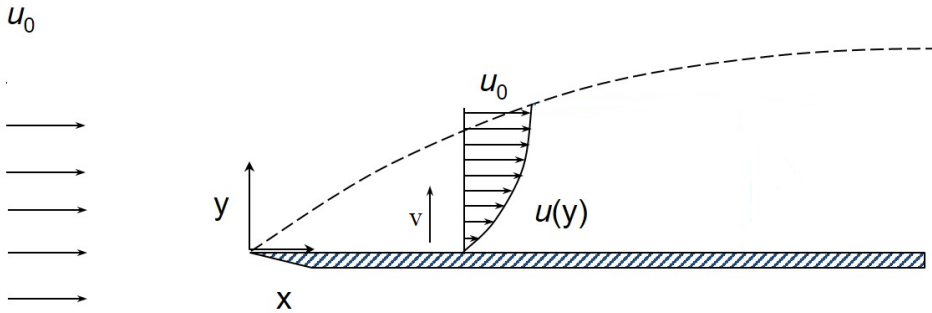
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\rho_{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_{\infty} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\rho_{\infty} c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_{\infty} c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (4)$$

ahol a dinamikai változók az alábbiak:  $u(x, y, t), v(x, y, t)$  a határréteg fallal párhuzamos, illetve arra merőleges sebesség komponensei,  $p(x, y, t)$  a nyomás,  $T(x, y, t)$  pedig a hőmérséklet, ez esetben az a rész, amely az átlagtól való eltérést mutatja. A rendszer első egyenlete az összenyomhatatlan folyadékokra vonatkozó anyagmegmaradást leíró kontinuitási egyenlet, a második a felületre merőleges nyomásra vonatkozó egyenlet, a harmadik a felülettel párhuzamos sebesség komponensre vonatkozó egyszerűsített Navier-Stokes egyenlet. A bal oldal első tagja a lokális gyorsulásért, a második a konvektív gyorsulásért felelős. A jobb oldal első tagja a nyomás gradiens, ez hajtja az áramlást, a második tag pedig a belső

súrlódásért felel. Az utolsó, negyedik egyenlet pedig egy hővezetési egyenlet. A bal oldal első tagja a lokális hőmérséklet változásért, a második pedig a konvekció okozta hőmérséklet változásért felelős. A jobb oldal első tagja térbeli hőmérséklet változásáért, utolsó tagja pedig disszipatív viszkózus fűtésért felelős. A vizsgált rendszer geometriai viszonyait az első ábra szemlélteti.



1. ábra. A vizsgált rendszer geometriáját szemléltető sematikus ábra. A szaggatott vonal egy, az origóból induló félig végtelen felület mentén mutatja a vízszintes sebesség komponens  $u(y)$  nagyságát az  $y$  tengely mentén.

Mind a négy dinamikai változó a két térbeli Descartes-féle koordináta, illetve az idő folytonos függvénye. A számított megoldásainkat a  $C^2$  kétszer folytonosan differenciálható függvények terén értelmezzük és nem tételezünk fel pl.  $L^2$  térbeli integrálhatóságot. Az egyenletben szereplő további fizikai paraméterek  $\rho_\infty, c_p, \mu, \kappa, a$  pedig a folyadék sűrűsége aszimptotikus távolságokon és időkből, az állandó nyomáson vett fajhő, a kinematikai viszkozitás, a termikus diffúziós állandó, valamint a viszkózus fűtési tag erőssége. A hővezetési egyenlet utolsó tagja felelős a viszkozitásból adódó hőforrásért, amelynek hatása magasabb áramlási sebességek esetén jelentős. Dolgozatunk második felében eredményeinket összehasonlítjuk azon fűtött határrejteget leíró eredményekkel, amelyekben nem szerepel ez a fajta viszkózus forrástag.

A fenti egyenletrendszer megoldását az alábbi önhasonló Ansatz alkalmazásával keressük [19, 20]:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= t^{-\alpha} f(\eta), & v(x, y, t) &= t^{-\delta} g(\eta), \\ T(x, y, t) &= t^{-\gamma} h(\eta), & p(x, y, t) &= t^{-\epsilon} i(\eta), \end{aligned} \quad (5)$$

ahol  $\eta = \frac{x+y}{t^\beta}$  az új, úgynevezett hasonlósági változó,  $f, g, h$  és  $i$  pedig a redukált rendszer hasonlósági függvényei. A maradék öt kis görög betű  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  és  $\epsilon$  pedig az önhasonló exponenseket jelenti, amelyek tetszőleges valós értékeket vehetnek

fel. A hasonlósági függvényekről feltesszük, hogy megfelelő simasággal rendelkeznek, tehát léteznek a fenti egyenletnek megfelelő első és másodrendű deriváltakkal. Az általunk alkalmazott Ansatz geometriáját és további tulajdonságait részletesen elemeztük előző tanulmányainkban [16, 17, 18].

A hasonlósági függvények, illetve az önhasonló exponensek pontos alakjára vonatkozó számítások menete a következő. Kiszámítjuk a dinamikai változók (5) megfelelő helykoordináta és idő deriváltjait és visszahelyettesítjük őket az eredeti (4) rendszer megfelelő egyenleteibe, így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$t^{-\alpha-\beta} f' + t^{-\alpha-\delta} g' = 0, \quad (6)$$

$$t^{-\epsilon-\beta} i' = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_\infty (-\alpha t^{-\alpha-1} f - \beta t^{-\alpha-1} f' \eta) + \rho_\infty (t^{-2\alpha-\beta} f f' + t^{-\alpha-\delta-\beta} g f') = \\ + \mu t^{-\alpha-2\beta} f'' - t^{-\epsilon-\beta} i', \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho_\infty c_p (-\gamma t^{-\gamma-1} h - \beta t^{-\gamma-1} h' \eta) + \rho_\infty c_p (t^{-\alpha-\gamma-\beta} f h' + t^{-\delta-\gamma-\beta} g h') = \\ \kappa t^{-\gamma-2\beta} h'' + a t^{-2\alpha-2\beta} (f')^2. \end{aligned} \quad (9)$$

A jobb átláthatóság érdekében a hasonlósági függvények  $\eta$  argumentum szerinti deriválását  $'$ -vel jelöljük (pl.  $\frac{df(\eta)}{d\eta} = f'(\eta)$ ). Az önhasonló Ansatz-cal a redukció során a kezdeti  $(x, y, t)$  változókról az új  $\eta$  változóra térünk át, de csak akkor, ha a fenti egyenletrendszer függetlenné válik az időtől. Tehát el kell érjünk, hogy az összes időbeli hatvánnyal (pl.  $t^{-\alpha-1}$ ) minden egyenlet minden tagját egyszerűsíthessük. Így egy lineáris egyenletrendszert kapunk a kitevőkre vonatkozóan, amely jelen esetben ellentmondásmentesen és egyértelműen megoldható. Minden exponens az alábbi pozitív racionális vagy egész értéket veszi fel:

$$\alpha = \beta = \delta = 1/2, \quad \epsilon = 1, \quad \gamma = 1. \quad (10)$$

Megjegyezzük, hogy az 1/2-es kitevő értékek a reguláris hővezetés esetén adják meg a Gauss megoldást. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a kapott sebességtér lényegében egyfajta diffúziós folyamat eredménye. Ez a kijelentés igaz a Navier-Stokes egyenletekre is [23, 24]. Egy fontos megjegyzés, hogy az önhasonló Ansatz (5) nem minden PDE rendszerre alkalmazható automatikusan, sok esetben az exponensek közötti feltételek ellentmondásra vezetnek.

A redukált KDE rendszer az alábbi alakot ölti:

$$f' + g' = 0, \quad (11)$$

$$i' = 0, \quad (12)$$

$$\rho_\infty \left( -\frac{f}{2} - \frac{f' \eta}{2} \right) + \rho_\infty (f f' + g f') = \mu f'' - i', \quad (13)$$

$$\rho_\infty c_p \left( -h - \frac{h' \eta}{2} \right) + \rho_\infty c_p (f h' + g h') = \kappa h'' + a (f')^2. \quad (14)$$

Rendszerünk egy hiányos csatolt nemlineáris másodrendű KDE, ami néhány algebrai lépéssel szétcsatolható. Vegyük észre, hogy az első két egyenlet teljes differenciál és így automatikusan integrálható. Eredményeit közvetlenül behelyettesítve a (13) egyenletbe, a sebesség változására vonatkozó KDE alakja a következő:

$$\frac{1}{\rho_\infty}(\mu f' + c_2 \eta + c_3) + \frac{f \cdot \eta}{2} - c_1 f = 0, \quad (15)$$

megoldását kvadratúrával kiszámíthatjuk:

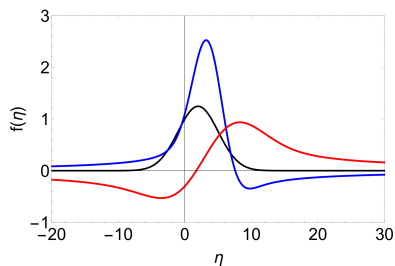
$$f = \left[ \frac{-2c_2}{\rho_\infty} \exp\left(\frac{\rho_\infty \eta^2}{4\mu} - \frac{c_1 \eta \rho_\infty}{\mu}\right) - \sqrt{\frac{-\pi}{\mu \rho_\infty}} \exp\left(\frac{-c_1^2 \rho_\infty}{\mu}\right) \right] \cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-\rho_\infty}{4\mu} + \frac{c_1 \rho_\infty}{\sqrt{-\mu \rho_\infty}}}\right) (2c_1 c_2 + c_3) + c_4 \exp\left(\frac{\eta(-\eta + 4c_1)\rho_\infty}{4\mu}\right). \quad (16)$$

a kifejezésben szereplő erf a hibafüggvényt jelenti, tulajdonságairól a NIST kézikönyvből [28] tájékozódhatunk részletesebben. (A teljesség és eredményeink jövőbeni reprodukálhatóságának érdekében meg kell említenünk, hogy a levezetett KDE-k megoldásait a Maple 12 matematikai programcsomaggal számítottuk ki, majd deriválással és visszahelyettesítéssel ellenőriztük.) Vegyük észre, hogy pozitív valós fizikai  $\rho_\infty, \mu$  paraméter értékek esetén egy komplex mennyiség  $\sqrt{-\rho_\infty/\mu}$  adódik a hibafüggvény argumentumában, ám a további komplex multiplikatív prefaktorral együtt a végső megoldás tisztán valóssá válik. Az eredmény lényeges paramétere a  $\rho_\infty/\mu$  hányados, amely ha nagyobb mint egy, akkor a függvény elkezd a Gauss görbéhez hasonlóvá válni. A második ábra általános sebesség hasonlósági függvényeket (16) mutat különféle paraméterértékekre. Az alkalmazott paraméterek önkényes értékűek, amelyek segítségével megpróbáltunk a lehető legáltalánosabb alakú megoldásokat szemléltetni. A harmadik ábra magát a sebességteret ábrázolja a  $z = 0$  projekcióra vonatkozóan. A függvénynek az origóban nagyon hegyes maximuma, illetve minimuma van, ezt követően nagyon gyorsan csökken mind térben, mind pedig időben.

A sebességter megoldásfüggvényének ismeretében a hőmérséklet változásra vonatkozó KDE egyértelműen meghatározható:

$$\kappa h'' - \rho_\infty c_p h' \left(c_1 - \frac{\eta}{2}\right) + \rho_\infty c_p h + a(f')^2 = 0. \quad (17)$$

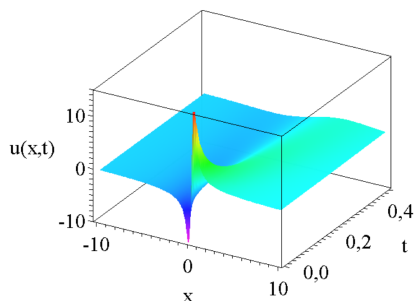
Még a legegyszerűbb Gauss görbe alakú sebesség hasonlósági függvény esetén sem kaphatunk analitikus, zárt alakú megoldást. Azonban, hogy vizsgálhassuk eredményünket, rögzítjük a  $(\rho_\infty, c_p, \kappa)$  fizikai paramétereket és az integrálási konstansokat bizonyos értékekre. A negyedik ábra három különféle  $a$  viszkozus hőforrás erősség értékre mutat megoldásfüggvényeket. Megjegyezzük, hogy magasabb  $a$  paraméterérték magasabb végső függvény értéket jelent. Az ötödik ábrán megmutatjuk a hőmérséklet eloszlás viselkedését az  $a = 1$  esetre. A kapott függvény alakja hasonló maradt a hasonlósági függvényéhez.



2. ábra. A sebesség tér  $f(\eta)$  hasonlósági függvényének (16) grafikonjai három különféle paraméter halmazra vonatkozóan

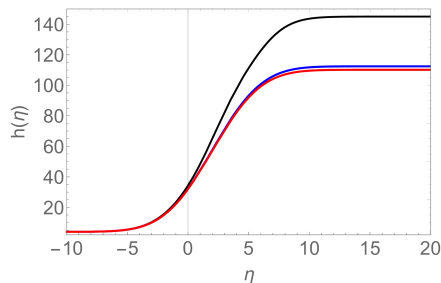
$$(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty).$$

A fekete, a kék, illetve a piros vonal a  $(1, 0, 1, 0, 4.1, 0.9)$ ,  $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$  és a  $(2, 2, 0.3, 0, 10, 1)$  paraméter kombinációt jelenti.



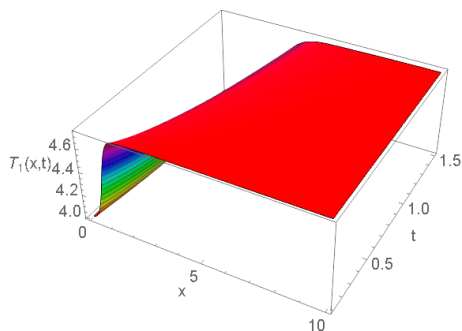
3. ábra. Az  $x$  irányú sebesség komponens

$u(x, y = 0, t) = t^{-1/2}f(\eta)$  grafikonja ahol a  $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$  paraméterek a  $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$  értékeket veszik fel.



4. ábra. A hőmérséklet  $h(\eta)$  hasonlósági függvényének (17) grafikonja három különböző

viszkózus hőforrás paraméter esetére megadva. A fekete, kék és a piros folytonos vonal a  $a = 10, 1$  és  $0.1$  értékre számított görbe. A többi paraméter  $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$  értéke pedig  $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$ .



5. ábra. A hőmérséklet eloszlás  $T(x, y = 0, t) = t^{-1/2}h(\eta)$  grafikonja az  $a = 1$  viszkózus hőforrás erősség értékre. A többi paraméter  $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$  numerikus értéke pedig  $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$ .

A teljesség érdekében megadjuk a nyomástérre vonatkozó eredményeket is. A nyomásváltozásra vonatkozó KDE és a megoldása is triviális:

$$i' = 0, \quad i = c_4, \quad (18)$$

Ebből következően a nyomásfüggvény alakja:

$$p(x, y, t) = t^{-\epsilon} \cdot i(x, y, t) = \frac{c_4}{t}, \quad (19)$$

ami annyit jelent, hogy a nyomás konstans az egész térben egy adott időpontban, ám van egy  $1/t$  alakú időbeli lecsengése, ami gyorsabb, mint a sebességtér esetében. Vegyük észre, hogy a nyomás és a hőmérséklet időbeli lecsengése azonos alakú.

Tanulmányunk fő célkitűzése, hogy eredményeinket összehasonlítsuk a viszkózus fűtési tagot nem tartalmazó  $(a(\partial u/\partial y)^2 = 0)$  hidrodinamikai rendszer eredményeivel.

A felhasznált Ansatz megegyezik az előzővel (5. egyenlet), ám a kapott önhasználó exponensek alakja némileg megváltozott:

$$\alpha = \beta = \delta = 1/2, \quad \epsilon = 1, \quad \gamma = \text{tetszőleges valós}. \quad (20)$$

Mivel kevesebb a kényszer feltétel az exponensek között, ezért lehetséges, hogy a  $\gamma$  exponens értéke határozatlanná vált. Tehát a hőmérséklet eloszlás időbeli lecsengése (vagy negatív értékek esetén végtelenhez való tartása) tetszőleges alakúvá vált. Mint a későbbiekben látni fogjuk, egy határozatlan önhasználó exponens, (mivel megjelenik a megoldásban) gazdag és sokrétű matematikai struktúrát eredményez. Értelemszerűen a származtatott KDE rendszer is nagyon hasonló alakú. A sebességre és a nyomásra vonatkozó eredmények teljes mértékben változatlanok, így ezekkel most nem foglalkozunk, ám a hőmérséklet hasonlósági függvényére adódó KDE egyszerűbbé vált:

$$\kappa h'' - \rho_\infty c_p h' \left( c_1 - \frac{\eta}{2} \right) + \rho_\infty c_p \gamma h = 0. \quad (21)$$

Ezzel ellentétben (17)-nek viszont már létezik zárt alakú megoldása:

$$h = c_2 M \left( \gamma, \frac{1}{2}; -\frac{c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2}{4\kappa} \right) + c_3 U \left( \gamma, \frac{1}{2}; -\frac{c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2}{4\kappa} \right), \quad (22)$$

ahol az  $M$  és az  $U$  a reguláris és irreguláris Kummer függvényeket jelöli. Ezen függvények tulajdonságairól részletekbe menően olvashatunk a már említett NIST kézikönyvben [28]. A továbbiakban a reguláris Kummer  $M$  megoldással foglalkozunk (tehát  $c_3 = 0$ ), amelyik véges értéket vesz fel az origóban. A Kummer  $M$  és  $U$  függvények komplett ortonormált rendszert alkotnak, ha a függvények



argumentumai lineárisak. Jelen esetben azonban az argumentum négyzetes. Hasonló négyzetes argumentumú függvényekkel (amelyek lineáris argumentum esetén ortonormált rendszert alkotnak) eddigi vizsgálataink során már találkoztunk a Navier-Stokes [23, 24] és a Madelung [25] egyenletek hasonló analízisével.

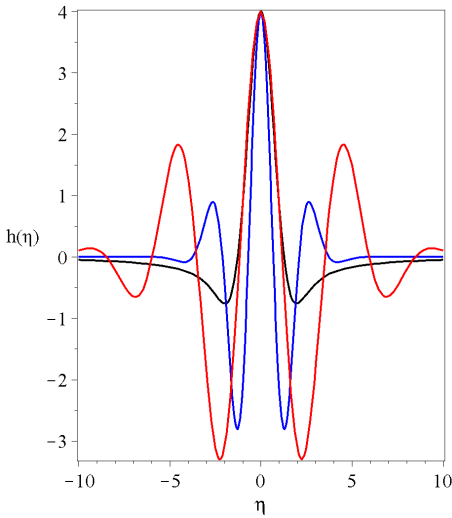
A hatodik ábra a hőmérséklet hasonlósági függvényét mutatja három általános paraméter együttesre kiszámolva. A megoldás görbeseregének legfontosabb paramétere a  $\gamma$  kitevő, minél nagyobb ennek az értéke, annál több nullátmenettel rendelkezik a függvény, ám maximum értéke egyre csökken. A  $c_1$ -es integrálási konstans csak eltolja a megoldást az  $x$  tengely mentén, a  $c_2$  pedig csak skálázza a maximális értéket. A  $\frac{\rho_\infty c_p}{\kappa}$  hányados a megoldás félérték szélességéért felelős. Néhány speciális  $\gamma$  értékre a Kummer függvények más speciális függvényekre egyszerűsödnek,  $\gamma = \pm\frac{1}{2}$  és 0 esetére a megoldások kifejezhetővé válnak a hibafüggvénnyel. Negatív egész  $\gamma$  értékekre páros fokú polinomokat kapunk, pl.  $\gamma = -1$  esetén  $f = (c_2 + c_3) \cdot (2\kappa + c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2)$ . A polinom megoldások  $\eta \rightarrow \infty$  esetén divergálnak, ezért nem tekinthetőek fizikailag releváns megoldásnak, ezért nem elemezzük őket részletesebben.

Az utolsó, hetedik ábra a hőmérséklet eloszlás  $y = 0$  vetületét ábrázolja a  $\gamma = 0.8$ -as önhasonló exponens értékére. Látható, hogy a gyors tér és időbeli lecsengés ellenére a függvény mutat egy előjelváltást.

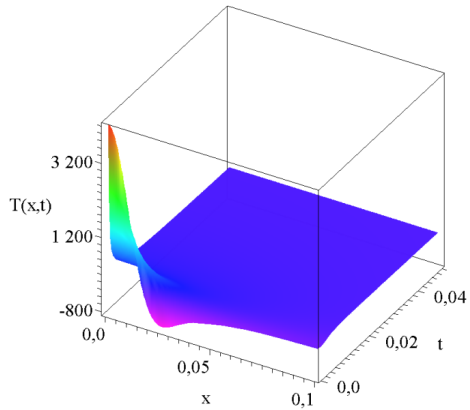
Mindezek ismeretében hasonlítsuk össze a két vizsgált modellt és értelmezzük a kapott eredményeket. Evidens, hogy a sebesség és nyomástér független a hőmérséklet eloszlástól (ezek lecsatolódnak a megoldás során). Egyértelműen látható tehát a viszkózus fűtési tag hatása. Azonos fizikai kezdeti feltételek mellett, ahol az egész térben egy időben  $1/t$  alakú nyomáseloszlás és egy térben erősen lokalizált és gyorsan csökkenő sebességtér két lényegesen különböző hőmérséklet eloszlást eredményez. A viszkózus fűtés nélküli esetben, a fűtött felület gyakorlatilag kihűl, a kezdeti nagy sebesség és nyomás gyorsan csökkenti a hőmérsékletet, közben kisebb-nagyobb oszcillációkat okozva. A véges viszkózus fűtési tag a dinamika során felmelegíti a felületet, egyfajta sűrűlődként hőt termel és visszafogottabb ingadozásokat eredményez.

### 3. Összefoglalás és kitekintés

A dolgozatunkban fűtött határrétegek PDE egyenleteit vizsgáltuk az önhasonló Ansatz segítségével. Kétféle modell eredményeit hasonlítottuk össze; az elsőben figyelembe vettük a viszkózitásból adódó fűtési tagot, amely magasabb áramlási sebesség értékek esetén ad realisabb eredményt, a második vizsgált modellben azonban mellőztük ezt a tagot. Mind a sebesség, mind a nyomástér mindkét esetben analitikusan kifejezhető. Az első esetben a hibafüggvénnyel, a másodikban pedig egy triviális,  $1/t$  alakú időfüggvénnyel. A fizika szempontjából egyetlen lényegesen különböző eredményt a hőmérséklet eloszlásra kaptuk. A viszkózus fűtési



6. ábra. A (21) hőmérséklet hasonlósági függvényre  $h(\eta)$  vonatkozó megoldás három különféle paraméter szettre  $(\gamma, c_2, c_3, c_p, \rho_\infty, \kappa)$  kiszámítva. A fekete, a kék és a piros vonal a  $(0.8, 4, 0, 1, 0.9, 0.3)$ ,  $(3.4, 4, 0, 1, 1, 0.6)$  és a  $(6.3, 4, 0, 1, 3, 10)$  numerikus értékekhez tartozó függvényeket ábrázolja.



7. ábra. A hőmérséklet eloszlás  $T(x, y = 0, t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} h(\eta)$  grafikonja a  $(\gamma, c_2, c_3, c_p, \rho_\infty, \kappa)$  paraméterek  $(0.8, 4, 0, 1, 0.9, 0.3)$  numerikus értékeire.

tag hiányában az eredményeket négyzetes argumentumú Kummer-függvényekkel írtuk fel analitikus formában, amely megoldások egy erősen csillapodó oszcillációs tulajdonságot mutatnak. Tehát a határrétegben a hőmérséklet nagy amplitúdójú változásokat mutat. Ha figyelembe vesszük a viszkozus tagot, akkor a végeredmény nem írható fel analitikus alakban, viszont mindenfajta oszcillációtól mentes és egy logisztikus függvényre emlékeztető formájú. Tanulmányunknak tehát az a legfontosabb következtetése, hogy a viszkozus hővezetési tag hiányában kihűl a felület, kezdeti hőmérséklete oszcillálva csökken, ám ha létezik véges viszkozus hővezetés, akkor ez az ingadozás már enyhébb a folyamat során.

További terveink, hogy vizsgálatainkat kiterjesztjük nem-newtoni közegekre is. Egy másik természetes általánosítási lehetőség, hogy ferroelektromos, esetleg magnetohidrodinamikus közegek határrétegeit tanulmányozzuk.

#### 4. Köszönetnyilvánítás

A 129257 számú projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a K\_18 pályázati program finanszírozásában valósult meg.

#### Hivatkozások

- [1] L. PRANDTL: *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlungen des III. Int. Math. Kongr., pp. 484–491 Heidelberg, Teubner, Leipzig (1905).
- [2] H. BLASIUS: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung*, Zeitschrift für Mathematische Physik, Vol. **56**, pp. 1–37 (1908).
- [3] H. SCHLICHTING AND K. GERSTEN: *Boundary-Layer Theory*, Springer, (2017).
- [4] Y. HORI: *Hydrodynamic Lubrication*, Springer (2006).
- [5] P.A. LIBBY AND H. FOX: *Some perturbation solutions in laminar boundary-layer theory*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **17**, pp. 433–449 (1963), DOI: [10.1017/S0022112063001439](https://doi.org/10.1017/S0022112063001439).
- [6] P.K.H. MA AND W.H. HUI: *Similarity solutions of the two-dimensional unsteady boundary-layer equations*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **216**, pp. 537–559 (1990), DOI: [10.1017/S0022112090000520](https://doi.org/10.1017/S0022112090000520).
- [7] G.I. BURDE: *The Construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Steady flows*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **47**, pp. 247–260 (1994). DOI: [10.1093/qjmam/47.2.247](https://doi.org/10.1093/qjmam/47.2.247).
- [8] G.I. BURDE: *The Construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Unsteady flows*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **48**, pp. 611–633 (1995). DOI: [10.1093/qjmam/48.4.611](https://doi.org/10.1093/qjmam/48.4.611).
- [9] G.I. BURDE: *New similarity reductions of the steady-state boundary layer equations*, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. **29**, pp. 1665–1683 (1996). DOI: [10.1088/0305-4470/29/8/015](https://doi.org/10.1088/0305-4470/29/8/015).
- [10] P.D. WEIDMAN: *New solutions for laminar boundary layers with cross flow*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. **48**, pp. 341–356 (1997). DOI: [10.1007/s000330050035](https://doi.org/10.1007/s000330050035).
- [11] D.K. LUDLOW, P.A. CLARKSON AND A.P. BASSOM: *New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations* The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **53**, pp. 175–206 (2000). DOI: [10.1093/qjmam/53.2.175](https://doi.org/10.1093/qjmam/53.2.175).

- [12] G. BOGNÁR: *Similarity solution of boundary layer flows for non-Newtonian fluids*, International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. **10**, pp. 1555–1566 (2009). DOI: [10.1515/IJNSNS.2009.10.11-12.1555](https://doi.org/10.1515/IJNSNS.2009.10.11-12.1555).
- [13] G. BOGNÁR AND J. KOVÁCS: *Non-isothermal steady flow of power-law fluids between parallel plates*, International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. **6**, pp. 122–129 (2012). DOI: [10.1.1.352.6564](https://doi.org/10.1.1.352.6564).
- [14] G. BOGNÁR: *Analytic Solutions to a Boundary Layer Problem for Non-Newtonian Fluid Flow Driven by Power Law Velocity Profile*, WSEAS Transactions on Fluid Mechanics, Vol. **6**, pp. 22–31 (2011).
- [15] U.S. MAHABALESHWAR, P.N. VINAY KUMAR, K.R. NAGARAJU, G. BOGNÁR AND S.N. RAVICHANDRA NAYAKAR: *A New Exact Solution for the Flow of a Fluid through Porous Media for a Variety of Boundary Conditions*, Fluids, Vol. **4** No. **3**, pp. 1–22 (2019). DOI: [10.3390/fluids4030125](https://doi.org/10.3390/fluids4030125).
- [16] I.F. BARNA AND L. MÁTYÁS: *Analytic self-similar solutions of the Oberbeck-Boussinesq equation*, Chaos Solitons and Fractals, Vol. **78**, pp. 249–255 (2015). DOI: [10.1016/j.chaos.2015.08.002](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.08.002).
- [17] I.F. BARNA, M.A. POCSAI, S. LÖKÖS AND L. MÁTYÁS: *Rayleigh-Benard convection in the generalized Oberbeck-Boussinesq system* Chaos Solitons and Fractals, Vol. **103**, pp. 336–341 (2017). DOI: [10.1016/j.chaos.2017.06.024](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.06.024).
- [18] I.F. BARNA, L. MÁTYÁS AND M.A. POCSAI: *Self-similar analysis of a viscous heated Oberbeck-Boussinesq flow system*, Fluid Dynamics Research, Vol. **52**, 015515 (2020). DOI: [10.1088/1873-7005/ab720c](https://doi.org/10.1088/1873-7005/ab720c).
- [19] L. SEDOV: *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, CRC Press, (1993).
- [20] YA. B. ZEL'DOVICH AND YU. P. RAIZER: *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press, New York, (1966).
- [21] L. MÁTYÁS AND I.F. BARNA: *General Self-Similar Solutions of Diffusion Equation and Related Constructions*, Romanian Journal of Physics, Vol. **67**, pp. 101–117 (2022). URL: [https://rjp.nipne.ro/2022\\_67\\_1-2/RomJPhys.67.101.pdf](https://rjp.nipne.ro/2022_67_1-2/RomJPhys.67.101.pdf).
- [22] P.J. OLVER: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, (Graduate Texts in Mathematics), Springer, Vol. **107** (1986).
- [23] I.F. BARNA: *Self-Similar Solutions of Three-Dimensional Navier-Stokes Equation*, Communication in Theoretical Physics, Vol. **56**, pp. 745–750 (2011). DOI: [10.1088/0253-6102/56/4/25](https://doi.org/10.1088/0253-6102/56/4/25).
- [24] I.F. BARNA AND L. MÁTYÁS: *Analytic solutions for the three dimensional compressible Navier-Stokes equation*, Fluid Dynamics Research, Vol. **46**, 055508 (2014). DOI: [10.1088/0169-5983/46/5/055508](https://doi.org/10.1088/0169-5983/46/5/055508).
- [25] I.F. BARNA, M.A. POCSAI AND L. MÁTYÁS: *Analytic Solutions of the Madelung Equation*, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, Vol. **11** No. **2**, p. 4 (2017). DOI: [10.4172/1736-4337.1000271](https://doi.org/10.4172/1736-4337.1000271).
- [26] I.F. BARNA: *Self-similar shock wave solutions of the nonlinear Maxwell equations*, Laser Physics, Vol. **24**, 086002 (2014). DOI: [10.1088/1054-660X/24/8/086002](https://doi.org/10.1088/1054-660X/24/8/086002).

- [27] I.F. BARNA AND R. KERSNER: *Heat conduction: a telegraph-type model with self-similar behavior of solutions*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. **43**, 375210 (2010). DOI: [10.1088/1751-8113/43/37/375210](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/37/375210).
- [28] F.W.J. OLVER, D.W. LOZIER, R.F. BOISVERT AND C.W. CLARK: *NIST handbook of mathematical functions*, Cambridge University Press, (2010).



- Született: 1972. november 13., Budapest.
- Végzettség: Mérnök-fizikus, Budapesti Műszaki Egyetem, Természet és Társadalom Tudományi Kar, 1997.
- Doktori cím: Justus Liebig Egyetem, Németország, 2002, Elméleti Fizikai Intézet, "Ionization of helium in relativistic heavy-ion collisions", témája elméleti atomfizika.
- Korábbi munkahelyek:
  - 2002 - 2004 Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Drezda, Németország.
  - 2004 - 2005 Bécsi Műszaki Egyetem, Elméleti Fizika Tanszék
  - 2006 - 2013 MTA Atomenergia-kutató Intézet.
- Jelenlegi munkahely, beosztás: Wigner Fizikai Kutatóközpont, tudományos főmunkatárs.

-Oktatási tevékenység: Biofizika oktatása német nyelven az Állatorvostudományi Egyetemen elsőéves hallgatóknak.

- Kutatási terület: lézer - anyag kölcsönhatás, transzport folyamatok nemlineáris parciális differenciálegyenleteinek önhasonló és haladó hullám megoldásai.

- Publikációs tevékenység eredménye:

56 tudományos cikk, két könyvfejezet, hozzávetőleg 600 darab független hivatkozással.

BARNA IMRE FERENC

Wigner Fizikai Kutatóközpont,  
Konkoly-Thege Miklós út 29 - 33, Budapest 1121  
[barna.imre@wigner.hu](mailto:barna.imre@wigner.hu)



- Született: 1974. június 2., Gyergyószentmiklós.
- Végzettség: Fizika licenciátus 1996, Babes-Bolyai Tudományegyetem, Fizika mesteri 1997.
- Doktori cím: Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2002.
- Korábbi munkahelyek:  
2001 - 2002 Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Drezda, Németország.  
2003 - 2005 Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgium.
- Jelenlegi munkahely, beosztás:  
Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, egyetemi adjunktus.
- Kutatási terület: transzportfolyamatok, illetve nemlineáris parciális egyenleteinek önhasonló

és haladó hullám megoldásai.

- Publikációs tevékenység eredménye:

30 tudományos cikk, egy könyv, egy könyvfejezet, hozzávetőleg 286 hivatkozás.

#### MÁTYÁS LÁSZLÓ

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem,  
Biomérnöki Tanszék,  
Szabadság tér 1,  
Csíkszereda, Hargita megye, 530104 Románia  
matyaslaszlo@uni.sapientia.ro



- Született: Miskolc, 1986. 07. 19.
- Végzettség: Mérnök-informatikus, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, 2009, Mérnök tanár, Miskolci Egyetem, Bölcsészettudományi Kar, 2021
- Doktori cím: Miskolci Egyetem, Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola, 2015
- Korábbi munkahelyek: Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Analízis Tanszék
- Jelenlegi munkahely, beosztás: Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet, egyetemi docens
- Kutatási terület: folyadékmechanika, áramlás-

tani nemlineáris parciális differenciálegyenletek önhasonlós és haladó hullám megoldásai.

- Publikációs tevékenység eredménye:

20 tudományos folyóiratcikk, 2 könyvfejezet, 26 konferenciakötetben megjelent tudományos cikk, 79 hivatkozás, melyből 54 független.

HRICZÓ KRISZTIÁN

Miskolci Egyetem,  
Gépészmérnöki és Informatikai Kar,  
Matematikai Intézet  
Miskolc Egyetemváros, 3515  
mathk@uni-miskolc.hu

#### SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF THE INCOMPRESSIBLE BOUNDARY LAYERS WITH VISCOUS HEAT CONDUCTION

IMRE FERENC BARNA, LÁSZLÓ MÁTYÁS, KRISZTIÁN HRICZÓ

We investigated the heated boundary layer equations with the time-dependent self-similar Ansatz. We found that all the three dynamical variables, the velocity, pressure and temperature fields could be expressed with special analytic functions like error, Gaussian or Kummer functions. The parameter dependencies were studied in details. Our analysis clearly showed that if the regular heat conduction equation were complemented with the extra viscous heat conduction term (which were relevant at higher velocities) then the resulting temperature distribution had no oscillatory behaviour and could not be expressed with analytic functions any more.

*Keywords:* self-similar solutions, heat conduction, boundary layer

*Mathematics Subject Classification (2000):* 35C06, 35Q79, 76Dxx