Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 51–70.
DOI: 10.37070/AML.2023.40.1.02

VARGA CSABA TUDOMÁNYOS TEVÉKENYSÉGE

KRISTÁLY SÁNDOR

A dolgozat Varga Csaba matematikus tudományos munkásságát hivatott áttekinteni, melynek kiindulópontját a variációszámítás adja és alkalmazásai a parciális differenciálegyenletek elméletétől egészen a Finsler-geometriáig terjednek. A leírásban törekedtem a megfelelő matematikai háttér bemutatására, majd ezen belül elhelyezni Varga Csaba tudományos eredményeit. A leírásban felhasználom a Farkas Csaba által elkészített publikációs listát, amely az e cikket követő 71–77. oldalakon található. Az említett listában lévő n-edik dolgozatra a $[*n]$ formában történik a hivatkozás.

1. Kezdeti évek

Varga Csaba egyetemi tanulmányait 1983-ban fejezte be a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika szakán. Egyetemi karrierjét 1990-ben kezdte, miután hét évet tanított a besztercei 2-es számú iskolában középiskolai tanárként. Az akkori kommunista időszak nehézségei – mely időszakra negatívan emlékezett vissza minden tekintetben – rányomták bélyegét a tudományos kibontakozására. Elmondása szerint, 1990-ben újra kellett tanulnia a magas fokú matematika művelését. Csaba jó érzékkel közeledett a „nagy matematikához”, hiszen egykori kiváló diákjaival, M. Crainic-al és G. Farkassal (akik később világklasszis matematikusokká váltak), megpróbálta feltárni az akkor épp aktuális kutatási témákat, melyeket az akkor még szegényesen (és rendszerint késéssel) ellátott könyvtárból próbált megszerezni. Csaba első próbálkozásra az algebrai topológia témákba vetette bele magát, – Ljusternik-Schnirelmann kategóriaelmélet, sűrűségi és kondenzációs problémák, – melyekből a [∗15], [∗16], [∗19], [∗22], [∗23] dolgozatok születtek. Ezek a dolgozatok meghatározóaknak bizonyultak a következő időszakban, amikor kapcsolatba lépett D. Motreanuval, akivel elkezdte mélyebben kutatni a topologikus és variációs jelenségeket. Ezekből az eredményekből született meg az 1996-ban megvédett doktori disszertációja is, melynek címe “*Topological Methods in Optimizations*”. A doktori tézisének központi témája a *variációszámítás*, ezen belül pedig a *nem-sima kritikus pontok elmélete* volt.

A következő két fejezetben rövid matematikai kalandra hívom az Olvasót, melyben egyrészt betekintést nyerünk a variációszámításba és annak alkalmazásaiba, másrészt elhelyezzük Varga Csaba fontosabb tudományos eredményeit ezekbe az igen dinamikusan fejlődő kutatási témákba.

2. Variációszámítás: kritikus pontok elmélete és alkalmazásai

A variációszámítás a matematikai analízis azon ága, mely szélsőértékfeladatok megoldásával foglalkozik. Napjainkban a variációs elvek a matematika és más természettudományok számos területén nélkülözhetetlenek: ezen elvek alkalmazásai átfogják úgy a nemlineáris analízist, a konvex analízist, a differenciálszámítást, a játék-, illetve a fixponttételek elméletét, a globális analízist, mint a közgazdaságtant és a fizikát. A variációszámítást, – mint a matematika egyik ágának megjelenését – 1696-tól, Johann Bernoullinak a matematikus társadalom, és főképp fivére, Jacob felé felvetett *brachisztochron problémájától*[1] számítják. A probléma olyan nagy matematikusok érdeklődését is felkeltette, mint G. L'Hospital, G.W. Leibniz, I. Newton és természetesen J. Bernoulli, akik szinte egy időben találtak rá a megoldásra. Később J.-L. Lagrange mellett L. Euler és K. Weierstrass is foglalkozott ezzel a problémával. A következő századokban rengeteg tudós foglalkozott a variációszámítással és ért el jelentős eredményeket e területen: ide sorolhatjuk D. Hilbert, L. Tonelli, J. Hadamard, H. Lebesgue, C. Carathéodory, I. Ekeland, J. Borwein, Pólya György vagy épp Vályi Gyula nevét.

2.1. Kritikus pontok elmélete

A XX. század második felétől kezdődően a variációs elvek egy újszerű megközelítése fejlődött ki, melyet *kritikus pontok elméleté*nek nevezünk és amely egy modern, nem szokványos tárgyalási eszköztárhoz vezetett.

Legyen X egy Banach-tér és $E : X \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény; az $x_0 \in X$ az E függvény *kritikus pont*ja, ha a függvény differenciálja eltűnik az x_0 pontban, azaz

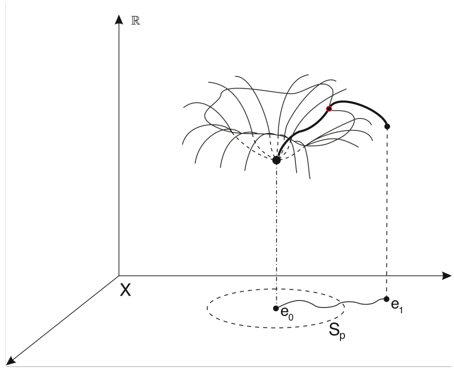
$$dE(x_0) = 0.$$

Ebbe a problémakörbe – többek között – a matematika igen fontos fejezetei sorolhatóak:

- elliptikus parciális differenciálegyenletek gyenge megoldásai a hozzájuk társított energiafüggvények kritikus pontjai lesznek;
- geodetikus vonalak Riemann/Finsler-sokaságokon a természetes energiafunkcionál kritikus pontjaiként jelentkeznek.

P. Fermat klasszikus tétele értelmében, egy adott funkcionál minimum/maximum pontjai természetes módon megjelennek mint kritikus pontok.

[1] Egy gyöngyszem kezdősebesség nélkül mozog egy dróton a gravitációs erő hatására. Adjuk meg annak a drótnak/görbének az alakját, melyen a gyöngy a lehető legrövidebb idő alatt ér el a drót egyik végpontjából a másikba!



1. ábra. A hegyátkelés tételének geometriai formája.

Felmerült a kérdés olyan kritikus pontok lokalizálására, melyek nem szélsőértékpont jellegűek. Ilyen áttörő eredményt igazolt 1974-ben A. Ambrosetti és P. Rabinowitz [3], mely az ún. *hegyátkelés tétel*eként (Moutain Pass Theorem) vonult be a köztudatba; lásd az 1. ábrát. Ennek egyik közismert formája így fogalmazható meg:

Legyen X egy Hilbert-tér, $E : X \to \mathbb{R}$ egy C^2-osztályú függvény, $e_0, e_1 \in X$ két különböző elem és $p > 0$ szám úgy, hogy

– $\inf_{\|u\|=p} E(u) > \max\{E(e_0), E(e_1)\} =: \alpha$;
– *E teljesíti a $(PS)_c$-feltételt a*

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} E(\gamma(t))$$

minimax értékben, ahol

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; X) : \gamma(0) = e_0, \gamma(1) = e_1\}.$$

Ekkor létezik $u \in X$ kritikus pontja E-nek úgy, hogy $E(u) = c \geq \alpha$.

A $(PS)_c$ kompatitási feltétel R. Palais és S. Smale [30] matematikusoktól ered, mely azt követeli meg, hogy tetszőleges $(u_k) \subset X$ sorozat esetén, melyre $E(u_k) \to c$ és $dE(u_k) \to 0$, kiválasztható az (u_k) egy konvergens részsorozata[2].

[2]H. Brezis és L. Nirenberg [6] igazolták, hogy a Palais–Smale-feltétel elengedhetetlen követelmény a hegyátkelés tételében. Erre egy elegáns példa a C^∞-osztályú $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $E(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$. Azonnal belátható, hogy E teljesíti a hegyátkelés geometriáját, de csak a $(0, 0)$ kritikus pontja van.

A fenti tételt *deformációs lemmá*val vagy az *Ekeland variációs elv*vel[3] lehet igazolni, lásd M. Willem [38] és P. Rabinowitz [33], melynek kvantitatív változatainak igazolásában Varga Csaba központi szerepet kapott, akár jóval gyengébb simasági feltételek mellett is, lásd §2.1.1.

A hegyátkelés tétele – habár lassan 50 éves – még mindig több tucat matematikai munka kiindulópontja. Alkalmazását tekintve, peremfeltétellel ellátott vagy akár Schrödinger-típusú egyenletek megoldásának létezésére és ezek lokalizálására használható. Az egyszerűség kedvéért, tekintsük a következő modell feladatot:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos $\mathcal{C}^1$-tartomány, Δ a Laplace-operátor, míg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy (legalább) folytonos függvény, mely eleget tesz bizonyos növekedési feltételeknek az origóban és a végtelenben. Ilyen esetben a szokásos eljárás az, hogy társítjuk a (P) feladathoz a természetes $E : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ energiafunkcionált, melynek alakja

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(t)dtdx,\ u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

ahol $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ a szokásos Szoboljev-tér, lásd H. Brezis [5]. Az f függvény megfelelő növekedési/simasági feltételei mellett igazolható, hogy E egy C^2-osztályú függvény és

$$dE(u) = 0 \Longleftrightarrow u \text{ gyenge megoldása a } (P) \text{ feladatnak.}$$

Ennek a jellemzésnek megfelelően, a (P) megoldásainak vizsgálatát visszavezethetjük az E energiafunkcionál kritikus pontjainak keresésére, melynek minimax típusú kritikus pontjait például a hegyátkelés tétele révén biztosíthatjuk.

2.1.1. Lokálisan Lipschitz függvények kritikus pontjai

A nyolcvanas évek elején, K.-C. Chang [10] a (P) feladat vizsgálatát javasolta nem folytonos, csak lokálisan esszenciálisan korlátos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények esetére. A kérdés hátterében mérnöki problémák állnak, hiszen bizonyos szakadási

[3] Matematikai érdekességként megemlítjük, hogy I. Ekeland [14] híres variációs elve - habár többnyire parciális differenciálegyenletek és egyensúlypont problémák esetén alkalmazták – a végtelen dimenziós Riemann-sokaságokon vizsgált Hopf–Rinow-tétel érvényességének eldöntésére lett kidolgozva. Míg véges dimenziós teljes Riemann-sokaságok esetén bármely két tetszőleges pont összeköthető legalább egy minimális geodetikus vonallal, addig a végtelen dimenziós esetben ez a jelenség csak egy G_δ-sűrű halmazon érvényes. Sajátosan, a sokaság majdnem bármely két pontja összeköthető minimális geodetikus vonallal, lásd I. Ekeland [15], ahol a bizonyítás gerincét épp az általa elnevezett variációs elv képezi.

pontokat tartalmazó jelenségek leírására, – mint hidak töréspontjainak vizsgálata, lásd P.D. Panagiotopoulos [31], vagy a von Kármán lemezek egyensúlyi helyzete, lásd D. Motreanu és P.D. Panagiotopoulos [28] – egy megfelelő *nemsima kritikus pont elmélet* lenne a megfelelő eszköz.

Mivel az új helyzetben a nemlineáris f tag csak lokálisan esszenciálisan korlátos, az a nem kívánt helyzet állhat elő, hogy egy elvárt jelenségre semmiféle választ ne kapjunk, azaz, a (P) feladatnak akár egy megoldása se, vagy csak a triviális nulla megoldása adódjon. Éppen ezért, az a kézenfekvő megoldás adódik, hogy a szakadási részeket kitöltjük, az $f(t)$ értéket helyettesítve egy $[\underline{f}(t), \overline{f}(t)]$ intervallummal, ahol

$$\underline{f}(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{essinf}_{|s-t|<\delta} f(s), \quad \overline{f}(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{esssup}_{|s-t|<\delta} f(s),$$

ahol $\operatorname{essinf}_A f = \sup\{a \in \mathbb{R} : f(x) \geq a$ majdnem minden $x \in A$ elemre$\}$ és $\operatorname{esssup}_A f = -\operatorname{essinf}_A(-f)$, $A \neq \emptyset$. Így hát, a (P) feladat helyett egy *differenciál inklúziót* kapunk,

$$\begin{cases} -\Delta u(x) \in \partial F(u(x)) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{DI}$$

ahol $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ *lokálisan Lipschitz* függvény[4], melynek a Clarke-szubgradiense

$$\partial F(t) = [\underline{f}(t), \overline{f}(t)], \ t \in \mathbb{R}.$$

Természetes módon, a (DI)-hez társított $E : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ energiafunkcionál már nem lesz sima, csak lokálisan Lipschitz a $W_0^{1,2}(\Omega)$ Szoboljev-téren, míg ennek a Chang-értelemben vett kritikus pontja, azaz $0 \in \partial E(u)$, megoldása lesz a (DI) problémának.

Általában, egy adott X Banach téren értelmezett $E : X \to \mathbb{R}$ lokálisan Lipschitz függvény *Clarke-szubgradiense* (lásd F.H. Clarke [11]) egy $u \in X$ pontban

$$\partial E(u) = \{\xi \in X^* : E^o(u; v) \geq \langle \xi, v\rangle, \ \forall v \in X\},$$

ahol X^* az X duális tere, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ a dualitási leképzés, míg

$$E^o(u; v) = \limsup_{w\to v, t\to 0^+} \frac{E(w + tv) - E(w)}{t}$$

az E függvény Clarke-értelembe vett iránymenti deriváltja az $u \in X$ pontban és $v \in X$ irányban.

[4]Az $F : X \to \mathbb{R}$ függvény *lokálisan Lipschitz*, ha minden $x \in X$ pontnak létezik egy olyan U környezete és $K_x > 0$ állandó úgy, hogy minden $u, v \in U$ esetén $|f(u) - f(v)| \leq K_x\|u - v\|$.

Varga Csaba legfontosabb eredményeinek egy jelentős része a Chang-kérdéskörhöz kapcsolódik. A kilencvenes évek végén D. Motreanuval azon dolgoztak, hogy a hegyátkelés tételét (és bővebben, a minimax elveket) kiterjesszék lokálisan Lipschitz függvényekre. A legnagyobb technikai kihívás számukra – a függvény simaságának elvesztése révén – egy megfelelő deformációs lemma igazolása volt. A deformációs lemma azt a természetes jelenséget hivatott leírni (pl. $X = \mathbb{R}^n$ esetén), hogy ha egy adott $E : X \to \mathbb{R}$ függvénynek a $E^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) = \{x \in X : c-\epsilon \leq E(x) \leq c+\epsilon\}$ halmazában nincs kritikus értéke ($\epsilon > 0$), akkor az $E^{c+\epsilon}$ nívóhalmaz topologikusan ekvivalens az $E^{c-\epsilon}$ halmazzal, ahol $E^{\alpha} = \{x \in X : E(x) \leq \alpha\}$. Ellenkező esetben, az $E^{c+\epsilon}$ nívóhalmaz topologikusan felépíthető az $E^{c-\epsilon}$ halmaz és egy adott d-dimenziós topológikus fogantyú segítségével, ahol d az adott $x_0 \in E^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ kritikus pont Morse-indexe, lásd J. Milnor [27].

Varga Csaba és D. Motreanu [∗21], [∗27] azt az ötletes megoldást találták, hogy a klasszikus gradiens-vektormező helyett egy ún. *pszeudo-gradiens-vektormezőt* használtak, melynek révén egy kvantitatív, nem-sima deformációs lemmát igazoltak reflexív Banach-tereken értelmezett lokálisan Lipschitz függvényekre. Ennek segítségével több minimax típusú tételt sikerült igazolniuk (hegyátkelés tétele, linking-típusú tételek, nyeregpont-típusú tételek és ezek csoport-invariáns formái). Később, ezeket az eredményeket kiterjesztették olyan esetekre, lásd [∗43], amikor a nemsima Palais-Smale-feltétel helyett egy jóval gyengébb, az ún. Cerami-feltételt használták.

Kiemelendő az a tény is, hogy a [∗21] dolgozatban sikerült a hegyátkelés tételének egy *null-magasságú* (zero-altitude) formáját igazolniuk, amely az alkalmazásoknál igen hasznosnak bizonyult, lásd pl. C.O. Alves és J.A. Santos [1], valamint C.O. Alves, R.C. Duarte és M.A.S. Souto [2] dolgozatait.

2.1.2. Folytonos és többértékű függvények kritikus pontjai

M. Degiovanni és M. Marzocchi [12] a kilencvenes évek elején kidolgozták tetszőleges X metrikus téren definiált $E : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvények kritikus pont elmelétét. Bármely $u \in X$ pont esetén a szerzők bevezetik a derivált normájának általánosított fogalmát, $|dE|(u)$, amelyet *gyenge meredekségnek* (weak slope) neveznek. Közvetett módon ez a fogalom akkor is definiált egy $u \in X$ esetén, ha $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ félig-folytonos, és $E(u) < +\infty$. Ha E valamely regularitási tulajdonsággal rendelkezik (pl. lokálisan Lipschitz), a gyenge lejtőről kiderül, hogy a nem-sima analízis más fogalmaihoz kapcsolódik, különösen a Clarke-szubdifferenciáléhoz. A szerzők a hegyátkelés tételének és a Lusternik-Schnirelmann elméletnek a metrikus tereken folytonos funkcionálokra kiterjesztett változatait igazolták, – ahol a főeszközt az Ekeland- variációs elve képezte, – majd több alkalmazással támasztották alá az általuk bevezetett új fogalom hasznosságát.

Mivel Varga Csaba a kilencvenes évek végén a lokálisan Lipschitz függvények kritikus pont elméletén dolgozott, természetes volt számára megvizsgálni, hogy milyen mértékben igazolhatóak és alkalmazhatóak különböző minimax-típusú eredmények kvantitatív deformációs lemmák révén a Degiovanni-Marzocchi-féle elméletben. Mint kiderült, a kísérletet siker koronázta, melynek során több ilyen elméleti eredmény is született; lásd a [∗26] összefoglaló dolgozatot. Egy igazán nem szokványos alkalmazása a gyenge lejtő tárgykörnek egy olyan eredmény, mely révén a szerzők igazolják a [∗32] dolgozatban izometria-invariáns geodetikus görbék létezését nem-sima geometriai objektumokon (Lipschitz-sokaságokon).

Mi több, 2000-ben, egy újszerű ötlet során, M. Frigon [16] bevezette a gyenge lejtő fogalmát metrikus tereken értelmezett többértékű leképzésekre is. Csaba és társszerzői a [∗30], [∗33], [∗34] dolgozatokban igazolni tudták kvantitatív formáit a deformációs lemmának többértékű leképzések esetén, melyek alapul szolgáltak az új kritikus pont elméletnek a kidolgozásában. A hegyátkelés tételüknek többértékű változata (lásd [∗33]) központi helyet kapott a Y. Jabri [20] által írt átfogó monográfiában.

2.2. Differenciál inklúziók, variációs és hemivariációs egyenlőtlenségek

A (DI) differenciál inklúziónak van egy alternatív megközelítése, mely a *variációs-hemivariációs egyenlőtlenségek* segítségével fogalmazható meg. Ennek egy lehetséges formája a következő:

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega F^0(u(x);-v(x))dx \geq 0, \quad \forall v\in W_0^{1,2}(\Omega), \qquad (VHE)$$

ahol $F^0(s;t)$ az $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lokálisan Lipschitz függvény Clarke-féle iránymenti deriváltja az $s\in\mathbb{R}$ pontban és $t\in\mathbb{R}$ irányban. A Clarke-analízis segítségével megmutatható (lásd F.H. Clarke [11]), hogy ha $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ megoldása a (DI) feladatnak, akkor egyúttal megoldja a (VHE)-t is. Fordítva az állítás rendszerint nem igaz, hacsak nincs további regularitása az F lokálisan Lipschitz függvénynek (pl. konvexitás, vagy C^1-osztály). A (DI) vagy (VHE) feladatokat úgy választják a szerzők, hogy a lehető legjobban illeszkedjenek a tanulmányozandó problémára: a (DI) tipikusan korlátos halmazon értelmezett, ugrás-jellegű szakadásos nemlineáris tagok esetén alkalmasak, míg a (VHE) forma akkor megfelelőbb, amikor a feladat nem feltétlenül korlátos halmazon értelmezett és már eleve egy lokálisan Lipschitz függvényt tartalmaz kiindulási adatként.

Varga Csaba talán legtöbbet művelt matematikai kutatásai a (DI) és (VHE)-típusú problémák köré csoportosulnak, melyeket két külön kategóriába osztunk, attól függően, hogy az adott probléma korlátos vagy nem korlátos halmazon adott.

2.2.1. Korlátos halmazok

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos halmaz és tekintsük a (DI) feladatnál egy valamivel általánosabb helyzetét, éspedig:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) \in \partial F(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\widetilde{DI})$$

ahol $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy Carathéodory-függvény úgy, hogy

– $F(\cdot, t)$ mérhető minden $t \in \mathbb{R}$ esetén;

– $F(x, \cdot)$ lokálisan Lipschitz minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén;

– $F(x, 0) = 0$ minden $x \in \Omega$ esetén.

A $(\widetilde{DI})$ feladatban a Clarke-szubgradiens a második változó szerint értendő, azaz $\partial F(x, \cdot)$. Mi több, feltételezzük, hogy

1. $|\zeta| \leq a_1 + a_2|t|^s$, $\forall(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \forall\zeta \in \partial F(x, t)$, valamely $a_1, a_2 \geq 0$ állandókra, $0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$ ha $n \geq 3$;
2. $\displaystyle\sup_{||v||_{H_0^1}=\rho} \int_\Omega F(x, v(x))dx \leq \frac{1}{2}\rho^2$ valamely $\rho > 0$ esetén;
3. $t\zeta - \mu^{-1}F(x, \zeta) \geq -b_1|t|^\sigma - b_2$, $\forall(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ és $\zeta \in \partial F(x, t)$, valamely $\mu > 2$, $1 \leq \sigma < 2$ és $b_1, b_2 \geq 0$ állandókra;
4. $\displaystyle\limsup_{s\to\infty} \frac{1}{s^\sigma} \int_\Omega F(x, sv_0(x))dx = +\infty$ valamely $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ esetén.

Ezen feltételek mellett, a szerzők [∗21] azt igazolták, hogy a $(\widetilde{DI})$ feladatnak létezik legalább egy nem-nulla megoldása a $W_0^{1,2}(\Omega)$ Szoboljev-téren. A bizonyítás a lokálisan Lipschitz függvényekre vonatkozó hegyátkelés tételén alapszik. A fő nehézség a nem-sima Palais–Smale-feltétel igazolásában áll, melyben kulcsszerepet kap a $W_0^{1,2}(\Omega)$ tér kompakt beágyazása az $L^q(\Omega)$ Lebesgue-térbe, $q \in (2, \frac{2n}{n-2})$.

A fentihez hasonló eredményeket igazolt Csaba különböző társszerzőkkel, amikor a nemlineáris F tag más viselkedéssel rendelkezik a nullában és végtelenben, vagy a feladat más peremfeltételt teljesít (pl. Neumann, Steklov), lásd a [∗36], [∗40] és [∗49] dolgozatokat.

Mi több, 2004-et követően, – miután megjelent B. Ricceri [35] három kritikus pont elve, – több multiplicitási eredményt is sikerült igazolnia Csabának olyan kontextusokban, melyek a (DI) feladat nemlineáris perturbációiként állnak elő. Ezek hátterében a P. Pucci és J. Serrin [32] által igazolt három kritikus pont tétel áll, melynek B. Ricceri egy *stabilitási* formáját igazolta. Ezekben az eredményekben érdemes megfigyelni a differenciálinklúziók (vagy akár sima verziójuk) megoldásainak számának stabilitását kicsi perturbációk esetén, lásd a [∗48], [∗53], [∗57], [∗60], [∗61], [∗64], [∗65] és [∗76] dolgozatokat.

2.2.2. Nem korlátos halmazok

A nem korlátos halmazokon megfogalmazott elliptikus problémák (sima vagy nem-sima) különös odafigyelést igényelnek, tekintettel arra, hogy a klasszikus Szoboljev-beágyazások ebben az esetben nem kompaktak. Éppen ezért, variációs és/vagy topologikus módszereket kombinálnak rendszerint különböző technikákkal ennek a nehézségnek a leküzdésére: közelítés korlátos halmazokkal; súlyozott Szoboljev-terek vagy ezek valamely szimmetrikus résztereinek használata annak érdekében, hogy kompakt beágyazásokat kapjunk.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ egy nem kompakt tartomány (sima $\partial\Omega$ határral) és $p \in (1, n)$ egy valós szám, $p^* := np/(n-p)$ a Szoboljev-féle kritikus exponens. Jelöljük J_ϕ-vel a $\phi(t) := t^{p-1}$ normalizáló függvényhez rendelt dualitási leképzést.

Varga Csaba egyik kedvenc feladata a következőképpen fogalmazható meg: találjunk olyan $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ függvényt, melyre

$$\langle J_\phi(u), v\rangle + \lambda \int_\Omega b(x)F^0(u(x); -v(x))dx \geq 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad (\widetilde{VHE})$$

ahol $W_0^{1,p}(\Omega)$ az $u : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényeket tartalmazó szokásos Szoboljev-tér (lásd H. Brezis [5], L. Simon [37]), $\lambda > 0$ egy paraméter, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokálisan Lipschitz függvény, melyre teljesül

(F) $F(0) = 0$ és létezik $k > 0$, $q \in (0, p-1)$ úgy, hogy

$$|\xi| \leq k|s|^q, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \partial F(s),$$

míg $b : \Omega \to \mathbb{R}$ egy nem-negatív, nem-nulla függvény úgy, hogy $b \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Varga Csaba [∗44] igazolta, hogy ha $\mathcal{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ úgy értelmezett, hogy

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega b(x)F(u(x))dx,$$

akkor $\mathcal{F}$ lokálisan Lipschitz és szekvenciálisan gyengén folytonos a $W_0^{1,p}(\Omega)$ téren, lásd E. Zeidler [39], valamint

$$\mathcal{F}^0(u; v) \leq \int_\Omega b(x)F^0(u(x); v(x))dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mi több, további feltételek mellett az F és b függvényekre vonatkozóan, a [∗42], [∗50], [∗54], [∗55] dolgozatok szerzői igazolták, hogy létezik olyan $\lambda > 0$ paraméter, hogy a $(\widetilde{VHE})$ feladatnak három különböző megoldása van a $W_0^{1,p}(\Omega)$ Szoboljev-térben.

A fenti eredmény igazolásának egy része formailag hasonlít a korlátos halmazok esetén használt bizonyításra (ami a hegyátkelés geometriáját illeti). A lényeges különbség abból adódik, hogy a $(\widetilde{VHE})$ egyenlőtlenséghez társított energiafunkcionál *nem* teljesíti a Palais–Smale-féle kompaktitási feltétel semmilyen formáját. Ennek ellensúlyozására, az egyik kiváló módszer az ún. Palais-féle *kritikus szimmetria elv*, lásd R. Palais [29]. Mi több, a $(\widetilde{VHE})$ esetén a Palais-elv nem-sima verziójára van szükség, melyet W. Krawcewicz és W. Marzantowicz [24] igazoltak lokálisan Lipschitz függvényekre. További nem-sima formái a kritikus szimmetria elvnek a [∗47], valamint a J. Kobayashi és M. Ôtani [23] és a M. Squassina [36] dolgozatokban találhatóak, ahol egy lokálisan Lipschitz (vagy $\mathcal{C}^1$ osztályú) függvény perturbációja található egy konvex, alulról félig folytonos függvény által. A kritikus szimmetria elve azt mondja ki, hogy ha van egy lineárisan ható G csoport egy adott X Banach-téren, és az $E : X \to \mathbb{R}$ funkcionál G-invariáns, akkor minden kritikus pontja az E leszűkítésének a

$$\mathrm{Fix}_G X = \{u \in X : gu = u, \forall g \in G\}$$

fix-pontok halmazára egyúttal kritikus pontja lesz az eredeti E funkcionálnak is.

A kritikus szimmetria elv hasznossága abban rejlik (pl. $\Omega = \mathbb{R}^n$ és a $(\widetilde{VHE})$ feladat esetén), hogy az eredeti $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Szoboljev-tér helyett (mely nem ágyazható be kompakt módon egyetlen $L^q(\mathbb{R}^n)$ térbe sem, $q \in (2, 2n/(n-2))$) a radiálisan szimmetrikus $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$-beli függvények $W^{1,p}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ alterét választjuk, ami már kompakt módon beágyazható az $L^q(\mathbb{R}^n)$ térbe, $q \in (2, 2n/(n-2))$, lásd pl. P.-L. Lions [25], és amelyre a leszűkített energiafüggvény teljesíti a Palais-Smale kompaktitási feltételt. Az utolsó lépés már csak az, hogy az így kapott kritikus pontja a leszűkített energiafüggvénynek egyúttal kritikus pontja lesz az eredeti energiafüggvénynek is – ezáltal megoldása a tanulmányozandó feladatnak, – mivel

$$W^{1,p}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Fix}_{O(n)} W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

ahol $O(n)$ az n-ed rendű ortogonális csoportot jelöli.

Varga Csaba a kritikus szimmetria elvének egyik nagymestere volt, melyet különböző formában használt más és más problémákra (tartomány- és csoportválasztástól függően akár sima, akár nem-sima esetben). Ehhez fűződő dolgozatai [∗46], [∗47], [∗52], [∗56], [∗61], [∗62] és a [∗3]-as könyvfejezet.

Csabát érdekelték a kritikus pontok lokalizációi is, melyekre sikeresen alkalmazta a Schechter-típusú lemmákat, akár nem-sima esetben is, lásd a [∗90]-[∗95] és [∗99] dolgozatokat. Hasonló módon, központi kérdéskört töltött be számára különböző fraktálok felett értelmezett elliptikus problémák megoldásainak vizsgálata is, melyben több jelentős eredményt ért el szerzőtársaival, lásd a [∗63], [∗71], [∗74], [∗81], [∗82], [∗88] és [∗98] dolgozatokat.

3. Finsler-geometria

Általában a Finsler-geometriára a Riemann-geometria egy lehetséges általánosításaként tekintenek. S.-S. Chern, a Finsler-geometria egyik atyja, szinte érthetetlen módon úgy nyilatkozott, hogy „a Finsler-geometria nem más, mint Riemann-geometria a kvadratikus megkötés nélkül". Jó hír a Finsler-geométerek számára, hogy S.-S. Chern ebben a tekintetben alaposan tévedett. Mint kiderült, valóban sok fontos jelenség/eredmény természetes módon átvihető a Riemann-geometriáról Finsler-geometriára (pl. Hopf-Rinow, Hadamard- Cartan és Bonnet-Myers tételek, valamint Rauch és Bishop-Gromov összehasonlítási elvek, lásd D. Bao, S.-S. Chern és Z. Shen [4]), de mint kiderült, igazán meglepő és váratlan jelenségek is megjelennek, amelyek Riemann-geometriai szemszögből nézve teljesen elképzelhetetlenek.

Ezen meglepő jelenségek érdekelték már a kezdetek óta Varga Csabát is, így geometriai kutatásai többnyire a Finsler-geometria különböző fejezeteire terjedtek ki (melyeket a 2000 évek elején kezdett el kutatni), mint:

– Busemann-egyenlőtlenségek és geodetikus vonalak létezése részsokaságok között;

– Szoboljev-terek Finsler-sokaságok felett és ezek alkalmazása parciális differenciálegyenletek elméletében.

A pontos tárgyalás érdekében, szükségünk van pár alapfogalomra a Finsler-geometriából.

Legyen M egy $n(\geq 2)$-dimenziós összefüggő differenciálható sokaság és $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$. Az (M,F) pár egy *Finsler–sokaság*, ha az $F: TM \to [0,\infty)$ folytonos függvény kielégíti a következő feltételeket:

(a) $F \in C^\infty(TM \setminus \{0\})$;

(b) $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$ minden $\lambda \geq 0$ és $(x,y) \in TM$ esetén;

(c) $g_{ij}(x,y) = [\frac{1}{2}F^2]_{y^iy^j}(x,y)$ pozitív-definit minden $(x,y) \in TM \setminus \{0\}$ esetén, ahol $F(x,y) = F(y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$.

Az (M,F) *reverzibilis*, ha a (b) pont helyett érvényes:

(b') $F(x,\lambda y) = |\lambda| F(x,y)$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $(x,y) \in TM$ esetén.

A g_{ij} az $y=0$ estén csak akkor értelmezett, ha (M,F) egy *Riemann-sokaság*, amikor természetszerűen a $g_{ij}(x) = g_{ij}(x,y)$ független az y iránytól. A legegyszerűbb Finsler-struktúrákat a *Minkowski-terek* képezik, amelyek egy véges dimenziós V vektortérből és egy Minkowski-normából állnak (amely egy Finsler-metrikát indukál V-n, azaz $F(x,y)$ független a x alapponttól). Míg egyetlen euklideszi tér létezik (izometriáitól eltekintve), addig végtelen sok (izometrikusan különböző) Minkowski-tér létezik.

Az $L_F(\sigma) = \int_0^r F(\sigma(t), \dot\sigma(t))\, dt$ mennyiség a $\sigma : [0, r] \to M$ darabonkénti C^∞-osztályú görbe *integrálhosszát* jelenti. Két tetszőleges $x_1, x_2 \in M$ pont esetén, a $d_F : M \times M \to [0, \infty)$ *távolságfüggvényt* a

$$d_F(x_1, x_2) = \inf_{\sigma\in\Lambda(x_1,x_2)} L_F(\sigma) \tag{1}$$

összefüggés adja meg, ahol $\Lambda(x_1, x_2)$ az összes $\sigma : [0, r] \to M$ darabonkénti C^∞-osztályú görbe halmaza úgy, hogy $\sigma(0) = x_1$ és $\sigma(r) = x_2$. Ha $(M, F) = (\mathbb{R}^n, F)$ Minkowski-tér, akkor $d_F(x_1, x_2) = F(x_2 - x_1)$.

A Riemann-geometriából ismert Levi–Civita-konnexióval ellentétben (lásd pl. M.P. do Carmo [13]), a Finsler-geometria nem szolgáltat egy egyedi (torzió-mentes és metrika-kompatibilis) konnexiót. Az egyik természetes konnexió a Finsler-geometriában az ún. *Chern-konnexió*, melyet a π^*TM nyalábon értelmezünk, amely torzió-mentes és *majdnem* metrika-kompatibilis, lásd D. Bao, S.-S. Chern és Z. Shen [4, 2.4.1. tétel]. A Chern-konnexió együtthatóit jelöljük a Γ^i_{jk} szimbólummal, amelyek a Riemann-geometriából jól ismert Christoffel-szimbólumoknak felelnek meg. Egy Finsler-sokaság *Berwald-típusú*, ha a természetes koordinátákban reprezentált $\Gamma^k_{ij}(x, y)$ Chern-konnexió együtthatói függetlenek az y iránytól. Azonnal felismerhető, hogy a Riemann-sokaságok és Minkowski-terek mind Berwald-struktúrákat eredményeznek.

A Chern-konnexió természetes módon indukál a π^*TM nyalábon egy R *görbületi tenzort*, melynek révén definiálható a D *kovariáns derivált.* A C^∞-osztályú görbe $\sigma : [0, r] \to M$ egy *geodetikus*, ha $D_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$. Kényelmi okokból a geodetikusokat ívhosszal arányosan paraméterezettnek tekintjük.

Legyen $u, v \in T_xM$ két nem-kollineáris vektor és $\mathcal{S} = \text{span}\{u, v\} \subset T_xM$. Az R görbületi tenzor segítségével értelmezhető az $\{\mathcal{S}, v\}$ objektum ún. *flag-görbülete*, melyet a

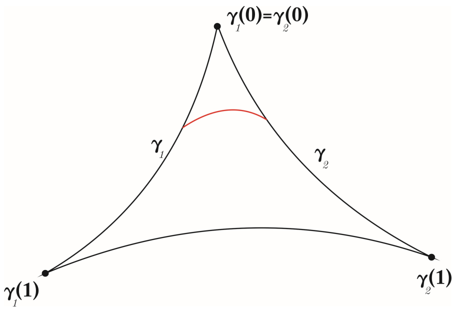
$$K(\mathcal{S}; v) = \frac{g(R(U, V)V, U)}{g(V, V)g(U, U) - g(U, V)^2}, \tag{2}$$

mennyiség ad meg, ahol $U = (v; u), V = (v; v) \in \pi^*TM$. Ha (M, F) Riemann-sokaság, akkor a flag-görbület megegyezik a szokásos metszetgörbülettel.

3.1. Metrikus összefüggések és geodetikusok létezése részsokaságok között

3.1.1. Busemann-egyenlőtlenségek

Az 1940-es évek végén H. Busemann – párhuzamosan a D.D. Alexandrov-féle elmélettel (lásd M. Bridston és A. Haefliger [7] monográfiáját), – egy szintetikus, *nem-pozitívan görbült* geometriának az axiomatikus kidolgozását javasolta metrikus tereken, amelyek eleve nem rendelkeznek differenciálstruktúrával, viszont hiva-



2. ábra. Busemann-egyenlőtlenség: az alapoldal hosszúsága legalább kétszerese a másik két oldal középpontja közötti geodetikus távolságnak.

tottak magukba hordozni a Riemann/Finsler-sokaságok kvalitatív tulajdonságait. Ezek a struktúrák az úgynevezett G-terek, lásd H. Busemann [8]. A nem-pozitív görbület ezen fogalma megköveteli – melyet ma a *Busemann-egyenlőtlenség* néven ismerünk, – hogy kis geodetikus háromszögekben egy oldal hosszúsága legalább kétszerese legyen a másik két oldal középpontja közötti geodetikus távolságnak, azaz, ha (M,d) lokálisan geodetikus metrikus tér, és adott $\gamma_1,\gamma_2:[0,1]\to M$ két tetszőleges (természetesen paraméterezett) lokális, geodetikus vonal úgy, hogy $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$, akkor

$$d\left(\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right),\gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\le\frac{1}{2}d(\gamma_1(1),\gamma_2(1)),\tag{3}$$

lásd a 2. ábrát.

H. Busemann [8] rámutatott arra, hogy a (3) metrikus összefüggés természetes módon jellemzi a nem-pozitív metszetgörbületű Riemann-sokaságokat.[5] Az igazi kihívást, – H. Busemann megfogalmazása szerint, – a Finsler-tereken érvényes (3) metrikus összefüggés képezte.[6] Mint kiderült, igazán váratlan jelenségbe ütköztek, hiszen a negatív görbület semmiféle garanciát nem jelentett a (3) tulajdonság érvényességére: egy egyszerű, zárt és konvex görbe belsejének Hilbert-metrikája az euklideszi síkban – amely általánosan egy (projektív) Finsler-metrika állandó flag-görbülettel – akkor és csakis akkor elégíti ki a Busemann-féle (3) metrikus összefüggést, ha az adott görbe ellipszis, lásd P. Kelly és E. Straus [22]. Az utóbbi helyzet (azaz, ha a határgörbe ellipszis), a Hilbert-metrika Riemann-metrikává válik, tehát egy erős rigiditással állunk szembe.

[5] Eukleidészi esetben a Busemann-egyenlőtlenség a jól ismert kis Thalész-tételre redukálódik.

[6] Az Alexandrov-értelemben nem-pozitívan görbült Finsler-terek, egy rigiditási eredménynek köszönhetően, szükségszerűen Riemann-sokaságok lesznek, így ezek a jelenségek nem képeztek érdekes kérdéseket a Finsler-terek elméletében.

Természetesnek adódott az a kérdés, hogy megtalálni azon nem-riemanni Finsler-sokaságok osztályát, ahol a (3) metrikus összefüggés továbbra is érvényes.

Ez a kérdés Varga Csabát a 2000-es évek elején foglalkoztatta. A [∗39] dolgozatban a szerzők azt mutatták meg, hogy nem-pozitívan görbült Berwald-sokaságok teljesítik a (3) metrikus összefüggést. Ez volt az első olyan eredmény, mely részleges választ adott a H. Busemann által megfogalmazott kérdésre, ugyanis, megtalálták az első nem-riemanni Finsler-sokaságok osztályát, ahol a (3) összefüggés teljesül. Jóval később, 2019-ben, egy nagyon ötletes érvelés mentén, S. Ivanov és A. Lytchak [19] igazolták, hogy a fenti válasz a lehető legjobb, azaz, ha egy Finsler-sokaságon érvényes a (3) metrikus összefüggés, akkor a Finsler-sokaság szükségszerűen Berwald-sokaság kell legyen.

Tekintettel arra, hogy a (3) metrikus összefüggés iteratív alkalmazása bizonyos konvexitási tulajdonságot eredményez két geodetikus vonal távolságának mérése során, a [∗39] dolgozatban lévő eredmény alkalmazhatóvá vált különböző gazdasági/szállítási feladatok tárgyalásában is, lásd az [∗5] monográfiában.

3.1.2. Geodetikusok részsokaságok között

Varga Csaba egy másik kedvenc kérdéskörét adott Finsler-sokaság bizonyos részsokaságai között elhelyezkedő geodetikus vonalak létezése és ezek száma képezte. A problémát K. Grove [17] Riemann-sokaságokon igazolt eredményei inspirálták. Mivel a probléma általános helyzetben igen nehéznek bizonyult, ezért geometriai közegnek egyelőre egy n-dimenziós teljes (M, g) Riemann-sokaságot tekintünk, valamint az $M \times M$ térnek egy $N = N_1 \times N_2$ részsokaságát. A g Riemann-metrikát domináló F Finsler-metrika esetében a szerzők a [∗38] dolgozatban megvizsgálják a feladathoz társított Finsler-energiafüggvény tulajdonságait, melyet a Riemann-Hilbert-féle ΛN sokaságon értelmeznek. Az így értelmezett energiafüggvény kritikus pontjai épp az N_1 és N_2 részsokaságokat összekötő (és rájuk bizonyos Finsler-értelemben merőleges) geodetikus vonalak lesznek. Várható módon, a kihívást a Finsler-energiafüggvény Palais–Smale-feltételének igazolása képezi a ΛN sokaságon.

A [∗38] dolgozat második részében az $N = N_1 \times N_2$ speciális választásai találhatóak, ahol N_1 és N_2 az M zárt részsokaságai. Ha M-et egy domináns Finsler-metrikával ruházzuk fel, akkor bizonyos topologikus megkötések mellett igazolható, hogy az N_1 és N_2 részsokaságokat végtelen sok Finsler-geodetikus köti össze M-en.

A [∗38] dolgozat további kiváló eredményeket inspirált, mint G. Lu [26] vagy E. Caponio, M.Á. Javaloyes és A. Masiello [9] Finsler-típusú energiafüggvények jellemzését stacionárius téridőben.

3.2. Szoboljev-terek Finsler-sokaságokon: reverzibilitás fontossága.

Varga Csaba hitvallása szerint, a legszebb matematika akkor tárulkozik a szemünk elé, ha több matematikai irány egyidőben jelentkezik. Ilyennek tartotta a parciális differenciálegyenletek elméletét Riemann/Finsler-sokaságokon, melyet előszeretettel kutatott.

Finsler-sokaságokon értelmezett elliptikus problémák vizsgálata megköveteli a sokaság felett értelmezett Szoboljev-terek alapvető tulajdonságainak (mint például reflexivitásának és beágyazhatóságának) feltérképezését. Mint tudjuk, a Finsler-sokaságok nem feltétlenül reverzibilisek, aminek igen váratlan következményei lehetnek.

Legyen (M, F) egy Finsler-sokaság és tekintsük a hozzárendelt

$$r_F = \sup_{x\in M} \sup_{v\in T_xM\setminus\{0\}} \frac{F(x,v)}{F(x,-v)} \tag{4}$$

reverzibilitási állandót, lásd H.-B. Rademacher [34]. Nyilvánvaló, hogy $r_F \geq 1$ (sőt r_F akár végtelen is lehet), továbbá az $r_F = 1$ egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha (M, F) reverzibilis.

Tekintsük az (M, F) Finsler-sokaság felett értelmezett

$$W^{1,2}(M,F,\mathsf{m}) := \left\{u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(M) : \int_M [F^*(x, Du(x))]^2\, \mathrm{d}\mathsf{m}(x) < +\infty\right\}$$

Szoboljev-teret, továbbá legyen $W^{1,2}_0(M,F,\mathsf{m})$ a $C^\infty_0(M)$ térnek a

$$\|u\|_F := \left(\int_M [F^*(x, Du(x))]^2\, \mathrm{d}\mathsf{m}(x) + \int_M u^2(x)\mathrm{d}\mathsf{m}(x)\right)^{1/2} \tag{5}$$

norma általi lezárása, ahol $\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \mathrm{d}V_F(x)$ a természetes Haussdorff-mértéket jelöli. Megjegyezzük, hogy $\|\cdot\|_F$ rendszerint egy aszimmetrikus norma. A továbbiakban az F függvénynek az

$$F_s(x,y) = \left(\frac{F^2(x,y) + F^2(x,-y)}{2}\right)^{1/2},\ (x,y) \in TM$$

alakú szimmetrizáltját is használni fogjuk.

Ha az (M, F) Finsler-sokaság egy (M, g) Riemann-sokaság, a $W^{1,2}(M,F,\mathsf{m})$ Szoboljev-tér a Riemann-sokaságok felett értelmezett $H^1_g(M)$ Szoboljev-térrel esik egybe, lásd E. Hebey [18].

A [∗84] dolgozatban a szerzők igazolják, hogy amennyiben az (M, F) Finsler-sokaság reverzibilitási állandója véges, a felette értelmezett $W^{1,2}(M,F,\mathsf{m})$ Szoboljev-tér reflexív Banach-tér lesz, továbbá a $\|\cdot\|_{F_s}$ és $\|\cdot\|_F$ normák ekvivalensek. Sajátosan, fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\left(\frac{1+r_F^2}{2}\right)^{-1/2}\|u\|_F \leq \|u\|_{F_s} \leq \left(\frac{1+r_F^{-2}}{2}\right)^{-1/2}\|u\|_F,\ \forall u \in W^{1,2}_0(M,F,\mathsf{m}). \tag{6}$$

Azonnal következik, hogy a fenti állítás bármilyen Riemann-sokaságra, kompakt Finsler-sokaságra, vagy Minkowski-térre is alkalmazható.

Ezzel szemben, ugyanabban a [∗84] dolgozatban egy olyan nem-kompakt (M, F) Finsler-sokaságot szerkesztenek, amelynek a reverzibilitási állandója végtelen és a sokaság felett értelmezett Szoboljev-tér *még csak vektortér sem lesz.* Az utóbbi (ellen)példa a Finsler-Poincaré golyón van szerkesztve és rámutat a Riemann- és Finsler-geometriák közötti mély, lényeges különbségekre. Ez az eredmény lezárja egyúttal a nem-kompakt sokaságokon értelmezett Szoboljev-terek elméletét is.

3.3. Parciális differenciálegyenletek Finsler-sokaságokon

Csaba érdeklődési köre kiterjedt Finsler-sokaságokon értelmezett funkcionálegyenlőtlenségekre is, melyek fontos szerepet játszanak a parciális differenciálegyenletek elméletében.

A [∗100] cikkben egy olyan módszert dolgoztak ki, melynek segítségével L^2-típusú, súlyozott Hardy-egyenlőtlenségeket lehet igazolni (M, F) Finsler-sokaságokon. Igazolták, hogy a súlyfüggvény szuperharmonicitása egy elégséges feltételt biztosít Hardy-típusú egyenlőtlenségek igazolására (lásd pl. alább (7)). A szuperharmonicitási feltételt alkalmazva több Hardy-egyenlőtlenséget, egy Caccioppoli-egyenlőtlenséget, egy Gagliardo-Nirenberg-egyenlőtlenséget és egy Heisenberg–Pauli–Weyl-féle határozatlansági elvet igazoltak az (M, F) Finsler-sokaságon. Felhasználva a kapott súlyozott Hardy-egyenlőtlenségeket, a súlyfüggvény megfelelő megválasztásával további Hardy-egyenlőtlenségeket vezettek le véges reverzibilitási állandóval rendelkező Finsler-Hadamard sokaságokon. Egy ilyen eredmény a következő: ha (M, F) egy n-dimenziós Finsler–Hadamard-sokaság, ahol $n \geq 3$, $r_F < \infty$ és identikusan nulla $\mathbf{S}$-görbülettel, valamint $x_0 \in M$ pont tetszőlegesen rögzített, és jelölje $r = d_F(x_0, \cdot)$ az x_0 ponthoz tartozó távolságfüggvényt, akkor bármely $\alpha \in (-\infty, 1)$ és $u \in C_0^\infty(M)$ esetén érvényes

$$\frac{(n-2)^2(1-\alpha)^2}{4\,r_F^2} \int_M r^{\alpha(2-n)} \frac{u^2}{r^2}\, \mathsf{dm}(x) \;\leq\; \int_M r^{\alpha(2-n)} F^2(x, \boldsymbol{\nabla} u)\, \mathsf{dm}(x). \tag{7}$$

Az $\alpha = 0$ sajátos esetben a (7) egyenlőtlenség éles lesz és visszaadja a [∗84] dolgozatban leírt sajátos Hardy-egyenlőtlenséget. Ugyanebben a dolgozatban, a fenti egyenlőtlenségeket hatékonyan alkalmazták bizonyos Poisson-típusú differenciálegyenletek által implikált rigiditási eredmények igazolásában.

4. Zárszó

Varga Csaba tudomást szerezve betegségéről 2017-ben, idejének javarészét szakcikkek olvasásával töltötte. Meggyőződésem, hogy kevés embernek volt hozzá fogható lexikális tudása és rálátása a nemlineáris analízisre, differenciálgeometriára és differenciálegyenletek elméletére.

Kollégái és tanítványai rendszeresen megkeresték útbaigazítást kérve tőle, és ha nem is tudta a konkrét választ az adott kérdésre, biztosan javasolt olyan irodalmat, ahol a problémát a kérdező szempontjából hasznosan tárgyalták.

Az utolsó szakmai kívánságai között egy monográfia megírása szerepelt, és mintha érezte volna az idő szorítását, már 2017-ben nekikezdett ennek a nagyívű munkának a megírásához. A végső, nyomtatott formáját e munkának sajnos nem láthatta meg, mivel a monográfia bő egy hónappal később jelent meg távozása után, lásd [∗10], melyet egyben Csaba matematikai munkásságának megkoronázásaként is tekinthetünk.

Tudományos tevékenysége mellett Csaba legnagyobb erénye a tanítványainak kinevelésében rejlik. Több tucat diák hálás az évtizedeken átívelő oktatói tevékenységéért, mellyel több kiváló matematikus és matematikatanár számára sikerült tudományos és erkölcsi irányt mutatnia.

Távozását mély megrendüléssel vettük tudomásul, hiánya óriási űrt hagy bennünk. Mi, egykori diákjai, tanítványai és kollégái, emlékét méltó módon őrizni fogjuk szívünkben és elménkben, megpróbálva eleget tenni annak a Csaba által megfogalmazott kívánságnak, hogy munkáját tovább folytassuk.

Kolozsvár, 2021. december 4. Kristály Sándor

Hivatkozások

[1] C.O. Alves and J.A. Santos: *Multivalued elliptic equation with exponential critical growth in* $\mathbb{R}^2$, J. Differential Equations, Vol. **261** No. **9**, pp. 4758–4788, (2016). DOI: 10.1016/j.jde.2016.07.006

[2] C.O. Alves, R.C. Duarte and M.A.S. Souto: *A Berestycki-Lions type result and applications*, Rev. Mat. Iberoam., Vol. **35** No. **6**, pp. 1859–1884 (2019). DOI: 10.4171/rmi/1104

[3] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz: *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal, Vol. **14**, pp. 349–381 (1973). DOI: 10.1016/0022-1236(73)90051-7

[4] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen: *Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Vol. **200** (2000). DOI: 10.1007/978-1-4612-1268-3

[5] H. Brezis: *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, (1983). ISBN: 2-225-77198-7, ISSN: 0754-4405

[6] H. Brezis and L. Nirenberg: *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. **44** No. **8-9** pp. 939–963 (1991). DOI: 10.1002/cpa.3160440808

[7] M. Bridston and A. Haefliger: *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, (1999). DOI: 10.1007/978-3-662-12494-9

[8] H. Busemann: *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, (1955).

[9] E. Caponio, M.Á. Javaloyes and A. Masiello: *On the energy functional on Finsler manifolds and applications to stationary spacetimes*, Math. Ann., Vol. **351** No. **2**, pp. 365-392 (2011). DOI: 10.1007/s00208-010-0602-7

[10] K.-C. Chang: *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **80** No. **1** pp. 102–129 (1981). DOI: 10.1016/0022-247X(81)90095-0

[11] F.H. Clarke: Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, (1983).

[12] M. Degiovanni and M. Marzocchi: *A critical point theory for nonsmooth functionals*, Ann. Mat. Pura Appl., Vol. **167**, pp. 73–100 (1994). DOI: 10.1007/BF01760329

[13] M.P. do Carmo: *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1992). DOI: 10.1007/978-1-4757-2201-7

[14] I. Ekeland: *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **47**, pp. 324–353 (1974). DOI: 10.1016/0022-247X(74)90025-0

[15] I. Ekeland: *The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension*, J. Differential Geometry, Vol. **13** No. 2, pp. 287–301 (1978). DOI: 10.4310/jdg/1214434494

[16] M. Frigon: *On a critical point theory for multivalued functionals and application to partial differential inclusions*, Nonlinear Anal., Vol. **31** No. **5-6**, pp. 735–753 (1998). DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00436-7

[17] K. Grove: *Condition (C) for the energy integral on certain path space and application to the theory of geodesics J. Diff*, Geometry, Vol. **8**, pp. 207–223 (1973). DOI: 10.4310/jdg/1214431639

[18] E. Hebey: *Nonlinear analysis on manifolds*: *Sobolev spaces and inequalities, volume 5 of Courant Lecture Notes in Mathematics*, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, (1999). DOI: 10.1090/cln/005

[19] S. Ivanov and A. Lytchak: *Rigidity of Busemann convex Finsler metrics*, Comment. Math. Helv., Vol. **94** No. **4**, pp. 855–868 (2019). DOI: 10.4171/CMH/476

[20] Y. Jabri: *The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, Vol. **95** (2003). DOI: 10.1017/CBO9780511546655

[21] J. Jost: *Nonpositivity Curvature*: *Geometric and Analytic Aspects*, Birkhäuser Verlag, Basel, (1997). DOI: 10.1007/978-3-0348-8918-6

[22] P. Kelly and E. Straus: *Curvature in Hilbert geometry*, Pacific J. Math., Vol. **8**, pp 119–125 (1958). DOI: 10.2140/pjm.1958.8.119

[23] J. Kobayashi and M. Ôtani: *The principle of symmetric criticality for non-differentiable mappings*, J. Funct. Anal., Vol. **214**, pp. 428–449 (2004). DOI: 10.1016/j.jfa.2004.04.006

[24] W. Krawcewicz and W. Marzantowicz: *Some remarks on the Lusternik-Schnirelman method for non-differentiable functionals invariant with respect to a finite group action*, Rocky Mount. J. Math., Vol. **20**, pp. 1041–1049 (1990). DOI: 10.1216/rmjm/1181073061

[25] P.-L. Lions: *Symétrie et compacité dans les espaces Sobolev*, J. Funct. Anal., Vol. 49, pp. 315–334 (1982). DOI: 10.1016/0022-1236(82)90072-6

[26] G. Lu: *Splitting lemmas for the Finsler energy functional on the space of H^1-curves*, Proc. Lond. Math. Soc., Vol. **113** No. **1**, pp. 24–76 (2016). DOI: 10.1112/plms/pdw022

[27] J. Milnor: *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. **51**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963).

[28] D. Motreanu and P.D. Panagiotopoulos: *Minimax theorems and qualitative properties of the solutions of hemivariational inequalities*, Nonconvex Optimization and its Applications, Vol. **29**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999). DOI: 10.1007/978-1-4615-4064-9

[29] R.S. Palais: *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys., Vol. **69**, pp. 19–30 (1979). DOI: 10.1007/BF01941322

[30] R.S. Palais and S. Smale: *A generalized Morse theory*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. **70**, pp. 165–172 (1964). DOI: 10.1090/S0002-9904-1964-11062-4

[31] P.D. Panagiotopoulos: *Hemivariational inequalities*, Applications in mechanics and engineering, Springer-Verlag, Berlin, (1993). DOI: 10.1007/978-3-642-51677-1_4

[32] P. Pucci and J. Serrin, *A mountain pass theorem*, J. Differential Equations Vol. **60** No. **1**, pp. 142–149 (1985). DOI: 10.1016/0022-0396(85)90125-1

[33] P.H. Rabinowitz: *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. **65**. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, (1986). DOI: 10.1090/cbms/065

[34] H.-B. Rademacher: *A sphere theorem for non-reversible Finsler metrics*, Math. Ann., Vol. **328** No. **3**, pp. 373–387 (2004). DOI: 10.1007/s00208-003-0485-y

[35] B. Ricceri: *A general variational principle and some of its applications*, Fixed point theory with applications in nonlinear analysis, J. Comput. Appl. Math., Vol. **113** No. **1-2**, pp. 401–410 (2000). DOI: 10.1016/S0377-0427(99)00269-1

[36] M. Squassina: *On Palais' principle for non-smooth functionals*, Nonlinear Anal., Vol. **74** No. **11**, pp. 3786–3804 (2011). DOI: 10.1016/j.na.2011.03.026

[37] L. Simon: *Parciális Differenciálegyenletek*, I-II. Egyetemi jegyzet (1969, 1970).

[38] M. Willem: *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Vol. **24**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1996). DOI: 10.1007/978-1-4612-4146-1

[39] E. Zeidler: *Nonlinear functional analysis and its applications*, III. Variational methods and optimization, Springer-Verlag, New York, (1985).

Kristály Sándor (tudományos közleményekben: Kristály Alexandru) 1997-ben végzett a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika szakán. Ugyanott 2003-ban megvédte az első doktori tézisét matematikai analízisben, 2005-ben a Debreceni Egyetemen differenciálgeometriában, majd 2010-ben a Közép-Európai Egyetemen gazdasági optimizációban. Kristály Sándor két fő kutatási iránya a variációszámítás és geometriai analízis, valamint ezek alkalmazása elliptikus parciális differenciálegyenletekben, gazdasági egyensúlypontok vizsgálatában, Riemann–Finsler-geometriában és Heisenberg-csoportok elméletében. Számos nemzetközi konferencián volt meghívott plenáris előadó, továbbá vendégkutatóként olyan rangos intézetekben is tevékenykedhetett, mint a CityU of Hong Kong, Institut des Hautes Études Scientifiques, University of Kyoto, Istituto Nazionale di Alta Matematica vagy Universität Bern. Kétszer elnyerte az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat (2009-2012, 2013-2016), melynek során 2013-ban kiérdemelte az MTA Bolyai Plakettjét is. MTA doktori tézisét 2019-ben védte meg. A Román Akadémia 2014-ben a kutatási eredményeiért a Spiru Haret-díjjal tüntette ki, majd 2020-ban elnyerte az Ad Astra díjat is. A MathSciNet-en munkáira 1069 hivatkozás található 638 szerzőtől.

KRISTÁLY SÁNDOR
Babeş-Bolyai Tudományegyetem,
Kolozsvár & Óbudai Egyetem, Budapest
Elektronikus levelezési címek:
alex.kristaly@econ.ubbcluj.ro,
kristaly.alexandru@uni-obuda.hu

THE SCIENTIFIC ACTIVITY OF CSABA VARGA

Alexandru Kristály

The paper intends to review the mathematical work of Csaba Varga (1959-2021), presenting his contributions within the theory of calculation of variations together with applications in partial differential equations and Finsler geometry. We first present the appropriate mathematical backgrounds and within them, we place Csaba Varga's scientific results.

Keywords: calculus of variations; Riemann-Finsler geometry; partial differential equations.