

KORRELÁLT EGYENSÚLY A FUZZY JÁTÉKOKBAN

MAKÓ ZOLTÁN, SALAMON JÚLIA

A cikkben a kétszemélyes, véges, nem-kooperatív, fuzzy játékok Nash- és korrelált egyensúlyai közötti összefüggést tárgyaljuk. Igazoljuk, hogy hasonlóan a klasszikus játékokhoz, a Nash-egyensúly egy olyan korrelált egyensúly, amely független peremeloszlásokat eredményez.

1. Bevezetés

A hagyományos játékelmélet feltételezi, hogy a játék kifizetései minden játékos számára pontosan ismertek és a játékosok a várható hasznukat akarják maximalizálni. Valós játékhelyzetekben, a rendelkezésre álló információk pontatlansága miatt a játékosok többnyire nem képesek pontosan értékelni a kifizetéseket. A pontatlanság és a bizonytalanság különböző típusú lehet (például: sztochasztikus, fuzzy és fuzzy sztochasztikus). A fuzzy szó jelentése: homályos, elmosódott, lágy körvonalú, életlen vonalú. Ha valamely stratégiához tartozó kifizetés például így van megadva „a kifizetés közel van az a értékhez”, akkor ez a pontatlanság fuzzy típusú. Ezt a kijelentést kvantitatívan fuzzy számmal lehet leírni.

A fuzzy számokkal megadott játékokat fuzzy játékoknak (angolul: fuzzy games) nevezzük. A fuzzy halmazokat először Butnariu használta a nem-kooperatív játékelméletben [5]. Nishizaki és Sakawa tanulmányozták a fuzzy kifizetésekkel és fuzzy célokkal egyaránt rendelkező játékokat. Eredményeiket általánosították a többcélú játékokra is [19]. Bector és Chandra olyan modellt javasoltak a kétszemélyes, nem-kooperatív, fuzzy játékok tanulmányozására, amelyben a bizonytalanság kezelése a lineáris programozási feladatok dualitásán alapul [4]. Larbani a fuzzy paraméterekkel rendelkező játékok egy olyan új osztályát vezette be, amely úgy a játékelméleti, mint a bizonytalanság melletti döntéshozatal mechanizmusát is beépíti a modellbe [13]. Maeda a lehetőségi fok (angolul: possibility degree) segítségével értelmezte a Nash-egyensúly fogalmát [14]. Cunlin és Zhang általánosították Maeda modelljét az aszimmetrikus háromszög alakú fuzzy számokra [6].

Az elméleti közgazdasági modellek egyik érdekes feladata a Nash-egyensúly [17] egyértelműségét biztosító feltételek megállapítása. De mi történik, ha a modellnek több Nash-egyensúlya van? Ebben az esetben az optimális választás csak a játékosok közötti kommunikációval vagy külső jel segítségével történhet. A külső jeleket

használó döntéshozatali eljárások többek közt az úgynevezett korrelált egyensúly fogalmához vezetnek.

A korrelált egyensúly fogalmát Robert Aumann vezette be [2, 3]. Informális definíciója a következő. *Minden játékos egy jelet generál, köztudott folyamat megfigyelése alapján választ egy cselekvést. Ha egyetlen játékosnak sem érdeke eltérni a kiválasztott cselekvéstől, feltéve, hogy a többiek sem térnek el, akkor ezt a stratégiát leíró együttes valószínűségi eloszlást korrelált egyensúlynak nevezzük.* A jelt generáló folyamat tulajdonképpen összehangolja (korrelálja) a cselekvéseket, de nem kötelezi a játékosokat az összehangolt cselekvésre, így nem kell elhagyni a nem-kooperatív játékok körét. A korrelált egyensúlyok halmaza egy konvex politóp, és lineáris programozási módszerekkel meghatározható, lásd pl. [7, 8, 9, 11].

Tudjuk azt, hogy a klasszikus játékokban a Nash-egyensúly egy olyan korrelált egyensúly, amely független peremeloszlásokat eredményez [7, 8, 9]. A kérdés az, hogy ez az alaptulajdonság más struktúrákban is megmarad-e. Igazoljuk, hogy ez a tulajdonság érvényes marad abban az esetben is, amikor a kifizetések fuzzy számokkal vannak jellemezve és a játékosok preferenciái nem teljes előrendezések.

A cikk első része a megértéshez szükséges alapfogalmakat tartalmazza. A második részben megadjuk a korrelált és a Nash-egyensúly értelmezését a fuzzy játékok esetére, illetve a közöttük levő összefüggést. Példák segítségével szemléltetjük az egyensúlyok közti kapcsolatot.

A cikkben bemutatott általános keret lehetővé teszi az alkalmazott t -normák és a nem teljes előrendezések megfelelő megválasztásával egyedi modellek készítését és tanulmányozását.

2. Fuzzy számok előrendezése

Egy fuzzy halmazhoz való hozzátartozás fokát a tagsági függvény segítségével tudjuk leírni. Legyen $X \neq \emptyset$ egy alaphalmaz. Az X egy A fuzzy részhalmazát a $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ tagsági függvénnyel jellemezzük. Bármely $x \in X$ esetén a $\mu_A(x)$ azt fejezi ki, hogy x milyen mértékben tartozik hozzá az A -hoz. Tulajdonképpen a μ_A tagsági függvény egy halmazhoz való hozzátartozást megadó $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ karakterisztikus függvény általánosítása.

Legyen $p \in (1, +\infty)$ és $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ egy folytonos, szigorúan csökkenő függvény, amelyre $g(1) = 0$ és $g(0) = 1$. A $g^{[-1]} : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ pszeudo-inverze a g -nek, ahol $g^{[-1]}(t) = g^{-1}(t)$, ha $0 \leq t \leq 1$, illetve $g^{[-1]}(t) = 0$, ha $t > 1$.

2.1. Definíció. ([12]) A kvázi-háromszögű fuzzy szám egy olyan $\tilde{a} = \langle a, d \rangle$ -vel jelölt fuzzy halmaz, amelynek tagsági függvénye $\mu_{\tilde{a}}(t) = g^{[-1]}(|a - t|/d)$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $a \in \mathbb{R}$ az \tilde{a} középpontja, $d > 0$ pedig a kiterjedése. $d = 0$ esetén $\mu_{\tilde{a}}(a) = 1$ és $\mu_{\tilde{a}}(t) = 0$, ha $t \neq a$. A továbbiakban $\mathcal{N}_{g,p} = \{\langle a, d \rangle \mid a \in \mathbb{R}, d \geq 0\}$ jelöli a kvázi-háromszögű fuzzy számok halmazát.

Például, ha a generáló függvény $g(t) = 1 - t^2$, a kifizetés $\tilde{a} = \langle 3; 0, 2 \rangle$, akkor az \tilde{a} középpontja $a = 3$, kiterjedése $d = 0, 2$ és tagsági függvénye

$$\mu_{\tilde{a}}(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - |3 - t|/0, 2}, & \text{ha } t \in [2, 8; 3, 2], \\ 0, & \text{ha } t \in (-\infty; 2, 8) \cup (3, 2; +\infty). \end{cases}$$

Az „ a közel van a 3-hoz” kijelentés egy lehetséges kvantitatív interpretációja az $\tilde{a} = \langle 3; 2 \rangle$ kvázi-háromszögű fuzzy szám.

A t -normákon alapuló kiterjesztési elv alapján [10] a fuzzy számok összeadási operátorának tagsági függvényét, a g által generált t -norma segítségével az alábbi módon definiáljuk:

$$\mu_{\tilde{a} + \tilde{b}}(t) = \sup_{t=x+y} g^{[-1]} \left((g^p(\mu_{\tilde{a}}(x)) + g^p(\mu_{\tilde{b}}(y)))^{\frac{1}{p}} \right), \text{ bármely } t \in \mathbb{R} \text{ esetén.} \quad (1)$$

Felhasználva azt a tényt, hogy két fuzzy halmaz egyenlő, ha tagsági függvényeik is egyenlők, a (1) képlettel megadott összeadási műveletre igazolható az alábbi tulajdonság.

2.2. *Állítás.* ([12]) Bármely $\tilde{a} = \langle a, d_1 \rangle, \tilde{b} = \langle b, d_2 \rangle \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \left\langle a + b, (d_1^q + d_2^q)^{1/q} \right\rangle \in \mathcal{N}_{g,p}, \text{ ahol } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Az összeg képlete alapján $2 \cdot \langle a, d \rangle = \langle a, d \rangle + \langle a, d \rangle = \langle 2a, 2^{1/q}d \rangle$. Ezért a skalárral való szorzás művelete: $\lambda \cdot \langle a, d \rangle = \langle \lambda a, \lambda^{1/q}d \rangle$, bármely $\langle a, d \rangle \in \mathcal{N}_{g,p}$ és $\lambda \geq 0$ esetén.

A [15]-ös cikk igazolja, hogy az $(\mathcal{N}_{g,p}, +)$ struktúra olyan félcsoport, amely vektortérre bővíthető, ahol a zérus elem $0 = \langle 0, 0 \rangle$ és teljesülnek a $(\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{a} = \lambda_1 \cdot \tilde{a} + \lambda_2 \cdot \tilde{a}$, $\lambda_1 (\tilde{a} + \tilde{b}) = \lambda_1 \cdot \tilde{a} + \lambda_1 \cdot \tilde{b}$, $\lambda_1 \lambda_2 \tilde{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \tilde{a})$, $1 \tilde{a} = \tilde{a}$ összefüggések, bármely $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén.

A preferencia reláció megválasztásának problémája kulcsfontosságú a fuzzy kifizetésekkel rendelkező kétszemélyes játékokban. Ebben a dolgozatban az $(\mathcal{N}_{g,p}, +)$ félcsoporttal kompatibilis, nem teljes preferencia rendezést használunk. Az alapfeltételeket formálisan a következőképpen fogalmazzuk meg.

Legyen \preceq egy bináris reláció az $\mathcal{N}_{g,p}$ halmazon. Két \tilde{a} és \tilde{b} kvázi-háromszögű fuzzy szám \preceq -összehasonlítható, ha vagy $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ vagy $\tilde{b} \preceq \tilde{a}$ teljesül. Ellenkező esetben \tilde{a} és \tilde{b} \preceq -összehasonlíthatatlanok. A \preceq reláció teljes az $\mathcal{N}_{g,p}$ halmazon, ha bármely két $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{N}_{g,p}$ kvázi-háromszögű fuzzy szám \preceq -összehasonlítható. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a \preceq reláció nem teljes.

2.3. *Definíció.* A \preceq reláció az $\mathcal{N}_{g,p}$ összeadási és skalárral való szorzási műveleteivel kompatibilis, nem teljes előrendezés, ha bármely $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén teljesülnek az alábbi feltételek:

- C1) a \preceq reláció reflexív és tranzitív;
- C2) bármely $\lambda \in]0, 1[$ esetén az $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\lambda \tilde{a} + (1 - \lambda) \tilde{c} \preceq \lambda \tilde{b} + (1 - \lambda) \tilde{c}.$$

A definícióban C1 az előrendezés, C2 pedig a kompatibilitás feltételét adja meg.

Az $\mathcal{N}_{g,p}$, az összeadási és skalárral való szorzási műveletekkel, valamint a 2.3. Definíció feltételeit teljesítő \preceq relációval megadja azt a fuzzy környezetet, amelyben a kétszemélyes nem-kooperatív játékokat vizsgáljuk. Ezt a struktúrát a továbbiakban $(\mathcal{N}_{g,p}, +, \cdot, \preceq)$ -vel jelöljük.

3. Korrelált egyensúly a fuzzy játékokban

Egy $\tilde{\Gamma} = (I, J, S_I, S_J, \tilde{A}, \tilde{B}, \preceq_I, \preceq_J)$ kétszemélyes, véges, nem-kooperatív, fuzzy játéknál a játékosok tiszta stratégiáit az $I = \{1, 2, \dots, m\}$ és a $J = \{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmazokkal jelöljük. Az első játékos jellemzésére az $(\mathcal{N}_{g_1,p_1}, +, \cdot, \preceq_I)$ struktúrát, a másodikéra pedig a $(\mathcal{N}_{g_2,p_2}, +, \cdot, \preceq_J)$ struktúrát használjuk. Ha az első játékos az i , a második játékos a j stratégiát választja, akkor az első játékos kifizetését az $\tilde{a}_{ij} = \langle a_{ij}, d_{ij}^a \rangle \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$, a második játékos kifizetését pedig $\tilde{b}_{ij} = \langle b_{ij}, d_{ij}^b \rangle \in \mathcal{N}_{g_2,p_2}$ fuzzy számok adják meg minden $(i, j) \in I \times J$ esetén. A továbbiakban $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ és $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{m \times n}$ jelöli a játékosok fuzzy kifizetési mátrixait. Ebben az esetben a kevert stratégiák halmazai:

$$S_I = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0, i \in I, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\};$$

$$S_J = \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_j \geq 0, j \in J, \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}.$$

Ha feltételezzük, hogy a játékosok a preferencia döntéseiknél nem teljes előrendezést használnak, akkor Aumann tétele [1] és az összeg képlete alapján a játékosok célfüggvényei

$$\tilde{E}_I(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \tilde{a}_{ij} y_j, \quad \tilde{E}_J(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \tilde{b}_{ij} y_j, \tag{2}$$

kvázi-háromszögű fuzzy számot adó $\tilde{E}_I(x, y) \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$ és $\tilde{E}_J(x, y) \in \mathcal{N}_{g_2,p_2}$ mennyiségek lesznek, ahol $(x, y) \in S_I \times S_J$.

3.1. Definíció. Egy $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ a $\tilde{\Gamma}$ játék Nash-egyensúlya, ha $x^T \tilde{A} y^* \preceq_I x^*{}^T \tilde{A} y^*$ és $x^*{}^T \tilde{B} y^* \preceq_J x^*{}^T \tilde{B} y^*$ bármely $(x, y) \in S_I \times S_J$ esetén.

Hasonló módon érvelve, mint a klasszikus játékoknál, figyelembe véve a \preceq_I és \preceq_J nem teljes előrendezések tulajdonságait, a fuzzy játékokra a korrelált egyensúlyt a következőképpen értelmezzük.

3.2. *Definíció.* ([16]) A P együttes valószínűségi eloszlás korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak, ha

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} \tilde{a}_{kj} \preceq_I \sum_{j=1}^n p_{ij} \tilde{a}_{ij} \text{ bármely } i \in I \text{ és } k \in I \setminus \{i\};$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} \tilde{b}_{il} \preceq_J \sum_{i=1}^m p_{ij} \tilde{b}_{ij} \text{ bármely } j \in J \text{ és } l \in J \setminus \{j\}.$$

3.3. *Megjegyzés.* Úgy a Nash-, mint a korrelált egyensúly értelmezésében azt feltételezzük, hogy a reláció két oldalán levő kvázi-háromszögű fuzzy számok összehasonlíthatóak. Ezeket a típusú értelmezéseket a szakirodalomban „erős” jelzővel illetik. A „gyenge” jelzőt használnánk, ha az értelmezések így lennének megfogalmazva: „a relációk bal és jobb oldalán szereplő két kvázi-háromszögű fuzzy szám nem összehasonlítható, vagy ha összehasonlítható, akkor teljesülnek a megadott relációk”.

A következő tétel szemlélteti a fuzzy játékokban a Nash- és a korrelált egyensúlyok közötti kapcsolatot. A tétel bizonyítása a [16] cikkben található.

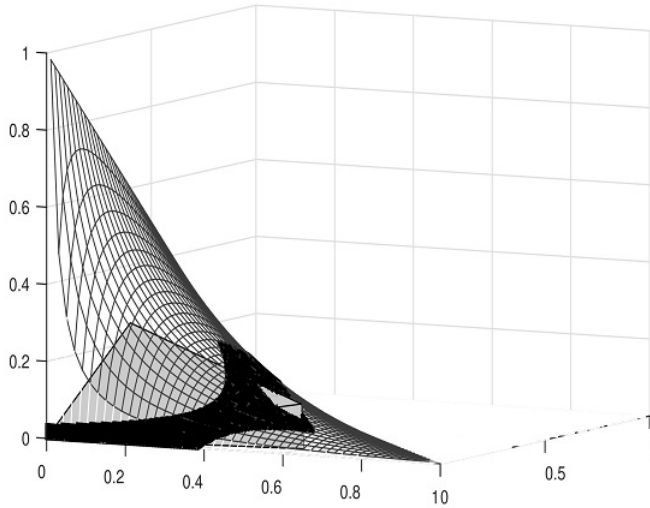
3.4. *Tétel.* (Makó-Salamon, 2020) Tekintsük a $\tilde{\Gamma}$ kétszemélyes, nem-kooperatív, fuzzy játékot.

i) Ha $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ egy Nash-egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak, akkor a $P = (p_{ij})_{m \times n}$ együttes valószínűségi eloszlás, ahol $p_{ij} = x_i^* y_j^*$ ($i \in I, j \in J$) korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak.

ii) Ha $P = (p_{ij})_{m \times n}$ együttes valószínűségi eloszlás a $\tilde{\Gamma}$ játék korrelált egyensúlya, és az $(x, y) \in S_I \times S_J$ peremeloszlásokra teljesül a $p_{ij} = x_i y_j$ összefüggés bármely $i \in I, j \in J$ esetén, akkor (x, y) Nash-egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak.

A klasszikus játékok geometriáját Nau, Canovas és Hansen [18] tanulmányozta. Ezen játékok esetén jelöljük Π -vel az összes P együttes valószínűségi eloszlás halmazát. Geometriailag Π egy $mn - 1$ dimenziós szimplexet határoz meg. Jelöljük D -vel az egyenlőtlenségi feltételek által meghatározott korrelált egyensúlyok halmazát. Geometriailag ez egy konvex politóp.

Legyen E az összes független, együttes valószínűségi eloszlások halmaza. Ha a Nash-egyensúlyokat együttes eloszlásoknak tekintjük, akkor a Nash-egyensúlyok halmaza $D \cap E$, amely Nash tétele alapján nem üres. A klasszikus, kétszemélyes, véges, nem-kooperatív játékok esetén a Nash-egyensúlyok, mint együttes eloszlások a korrelált egyensúlyok halmazának a határán helyezkednek el [18].



1. ábra. A Nash- és korrelált egyensúlyok közötti kapcsolat Maeda modelljében.

3.5. *Megjegyzés.* A 3.4. Tétel állítása nem triviális, függ a preferencia rendezés tulajdonságaitól. Maeda a [14] cikkében a preferencia rendezést a lehetőségi mérték (angolul: possibility degree) segítségével értelmezte. Így az ő modelljében nem teljesül a 2.3. Definíció tranzitivitási feltétele, valamint a C2 feltétel direkt iránya. Igazolható, hogy ekkor létezik olyan fuzzy játék, amelyben a 3.4. Tétel i) tulajdonsága nem teljesül. Az ilyen játékoknál, a Maeda modelljében a korrelált egyensúlyok politópja és a Nash-egyensúlyok között a 1. ábrán szemléltetett kapcsolat mutatható ki. Fekete szín jelöli a Nash-féle egyensúlypontokat, szürke szín a korrelált egyensúlyok politópját (D), hálórács a játékosok között független eloszlások nyeregfelületét (E). Megfigyelhető, hogy $D \cap E$ szigorú részhalmaza a Nash-egyensúlypontok halmazának. Tehát vannak olyan Nash-egyensúlyok, amelyek nem korreláltak.

Sajátos esetként tekintsük azt a $\tilde{\Gamma}$ játékot, amelyben a nem teljes előrendezés az alábbi összefüggésekkel van megadva:

$$\tilde{a}_1 \preceq_I \tilde{a}_2 \Leftrightarrow a_1 - (d_1)^{q_1} \leq a_2 - (d_2)^{q_1} \text{ és } a_1 + (d_1)^{q_1} \leq a_2 + (d_2)^{q_1}$$

bármely $\tilde{a}_1 = \langle a_1, d_1 \rangle \in \mathcal{N}_{g_1, p_1}$, $\tilde{a}_2 = \langle a_2, d_2 \rangle \in \mathcal{N}_{g_1, p_1}$ esetén. Hasonlóan értelmezzük a \preceq_J nem teljes előrendezést az \mathcal{N}_{g_2, p_2} -ben is.

Mivel \preceq_I és \preceq_J olyan nem teljes előrendezések, amelyek teljesítik a

2.3. Definíció feltételeit, ezért a 3.4. Tételben megfogalmazottak itt is érvényesek maradnak.

Ha $\Gamma_{bal} = (I, J, S_I, S_J, A^{bal}, B^{jobb})$ és $\Gamma_{jobb} = (I, J, S_I, S_J, A^{jobb}, B^{jobb})$ jelöli azokat a kétszemélyes, klasszikus játékokat, amelyek kifizetési mátrixai $A^{bal} = (a_{ij}^{bal})_{m \times n}$, $B^{bal} = (b_{ij}^{bal})_{m \times n}$, illetve $A^{jobb} = (a_{ij}^{jobb})_{m \times n}$, $B^{jobb} = (b_{ij}^{jobb})_{m \times n}$, ahol $a_{ij}^{bal} = a_{ij} - (d_{ij}^a)^{q_1}$, $a_{ij}^{jobb} = a_{ij} + (d_{ij}^a)^{q_1}$, $b_{ij}^{bal} = b_{ij} - (d_{ij}^b)^{q_2}$ és $b_{ij}^{jobb} = b_{ij} + (d_{ij}^b)^{q_2}$, akkor az alábbi tulajdonság fogalmazható meg.

3.6. *Állítás. ([16])* Egy P együttes valószínűségi eloszlás akkor és csakis akkor korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma} = (I, J, S_I, S_J, \tilde{A}, \tilde{B}, \preceq_I, \preceq_J)$ fuzzy játéknak, ha P korrelált egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak, azaz

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} a_{ij}^{bal} \geq \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{kj}^{bal}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{ij}^{jobb} \geq \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{kj}^{jobb}, \quad \text{bármely } i, k \in I;$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} b_{ij}^{bal} \geq \sum_{i=1}^m p_{il} b_{il}^{bal}, \quad \sum_{i=1}^m p_{ij} b_{ij}^{jobb} \geq \sum_{i=1}^m p_{il} b_{il}^{jobb}, \quad \text{bármely } j, l \in J.$$

Az alábbiakban olyan fuzzy játékra adunk példát, amelynek van korrelált egyensúlya, de nincs Nash-egyensúlya.

3.7. *Példa.* Tekintsük azt a játékot, amelyben a bal, illetve a jobb oldali játékok kifizetési mátrixai a következők:

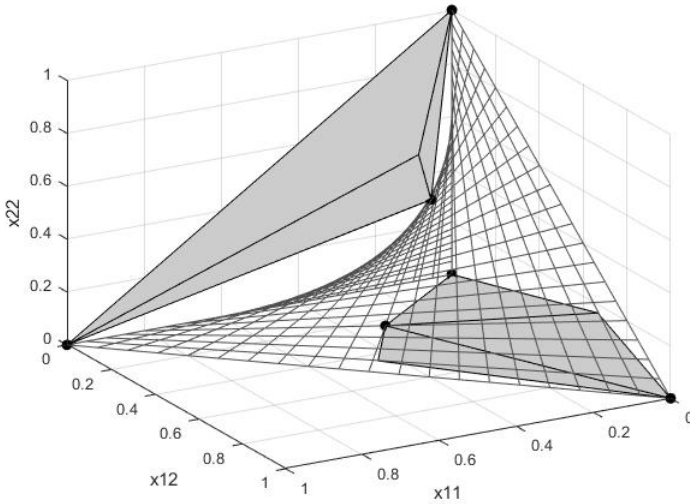
Γ_{bal}	1	2	3	Γ_{jobb}	1	2	3
1	(15, 2)	(6, 11)	(13, 10)	1	(16, 5)	(8, 17)	(18, 15)
2	(8, 19)	(16, 16)	(5, 7)	2	(14, 23)	(20, 20)	(12, 12)
3	(18, 6)	(11, 4)	(9, 15)	3	(23, 13)	(15, 10)	(14, 20)

A Γ_{bal} játék egyetlen Nash-egyensúlya:

$$x_0^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{19}{45}, \frac{17}{45} \right), \quad y_0^* = \left(\frac{3}{77}, \frac{25}{77}, \frac{7}{11} \right),$$

ami nem Nash-egyensúlya a Γ_{jobb} játéknak.

Ha $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ Nash-egyensúlya lenne a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak, akkor a 3.4. Tétel alapján $P = (p_{ij})_{m \times n}$, ahol $p_{ij} = x_i^* y_j^*$, korrelált egyensúlya lenne a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak. Azaz a 3.6. állítás alapján P korrelált egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak is. Ebből következik, hogy (x^*, y^*) Nash-egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak. Mivel a Γ_{bal} játéknak egyetlen Nash-egyensúlya van $(x^*, y^*) = (x_0^*, y_0^*)$. Tehát (x_0^*, y_0^*) Nash-egyensúlya a Γ_{jobb} játéknak, ami ellentmond az előző bekezdés kijelentésének. Következésképpen, a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs Nash-egyensúlya.



2. ábra. A Nash- és korrelált egyensúlyok geometriája a 3.8. Példában.

A korrelált egyensúly definícióját felhasználva könnyen igazolható, hogy a

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ és } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

együttes valószínűségi eloszlások korrelált egyensúlyai a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak.

Tudjuk, hogy a klasszikus kétszemélyes, véges játékok kevert bővítésének mindig van Nash- és korrelált egyensúlya. Az alábbi példa azt szemlélteti, hogy ezen játékokkal ellentétben nem minden fuzzy játéknak létezik korrelált egyensúlya.

3.8. Példa. Tekintsük azt a játékot, amelyben a bal, illetve a jobb oldali játésmák kifizetési mátrixai a következők:

Γ_{bal}	1	2
1	(10, 10)	(7, 4)
2	(7, 4)	(10, 6)

Γ_{jobb}	1	2
1	(21, 22)	(17, 23)
2	(25, 19)	(13, 15)

Amikor a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játék geometriáját szeretnénk szemléltetni, az előbbieken Nau, Canovas és Hansen [18] által megfogalmazott tulajdonságot alkalmazzuk a Γ_{bal} és a Γ_{jobb} klasszikus játékokra. A 2. ábra a Nash- és korrelált egyensúlyok geometriáját mutatja. A kis fekete körök a bal, illetve a jobb oldali játék

Nash-egyensúlypontjai. Mivel ezek különböznek, a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs Nash-egyensúlya. A hálórács a játékosok között független eloszlások nyeregfelületét (E), a szűrke politópok pedig a bal és jobb oldali játékok korrelált egyensúlyainak halmazait szemléltetik. Megfigyelhető, hogy a politópok az E felület különböző oldalain helyezkednek el és nincs közös pontjuk. Ezért ennek a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs korrelált egyensúlya.

Hivatkozások

- [1] R.J. AUMANN: *Utility theory without the completeness axiom*, *Econometrica*, Vol. **30**, pp. 445–462 (1962). DOI: [10.2307/1909888](https://doi.org/10.2307/1909888)
- [2] R.J. AUMANN: *Subjectivity and correlation in randomized strategies*, *J. Math. Econ.*, Vol. **1**, pp. 67–96 (1974). DOI: [10.1016/0304-4068\(74\)90037-8](https://doi.org/10.1016/0304-4068(74)90037-8)
- [3] R.J. AUMANN: *Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality*, Vol. **55**, pp. 1–18 (1987). DOI: [10.2307/1911154](https://doi.org/10.2307/1911154)
- [4] C.R. BECTOR, S. CHANDRA: *Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games*, Springer (2005). DOI: [10.1007/3-540-32371-6](https://doi.org/10.1007/3-540-32371-6)
- [5] D. BUTNARIU: *Fuzzy games: A description of the concept*, *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. **1**, pp. 181–192 (1992). DOI: [10.1016/0165-0114\(78\)90003-9](https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90003-9)
- [6] L. CUNLIN, Z. QIANG: *Nash equilibrium strategy for fuzzy non-cooperative games*, *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. **176**, pp. 46–55 (2011). DOI: [10.1016/j.fss.2011.03.015](https://doi.org/10.1016/j.fss.2011.03.015)
- [7] F. FORGÓ, J. SZÉP, F. SZIDAROVSKY: *Introduction to the Theory of Games, Concepts, Methods, Applications*, Kluwer Academic Publishers (1999).
<https://link.springer.com/book/9780792357759>
- [8] F. FORGÓ: *A generalization of correlated equilibrium: A new protocol*, *Math. Soc. Sci.*, Vol. **60**, pp. 186–190 (2010). DOI: [10.1016/j.mathsocsci.2010.08.002](https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2010.08.002)
- [9] F. FORGÓ: *Egyensúly a játékelméletben: egzisztencia és általánosítások*, Akadémiai doktori értekezés (2014). http://real-d.mtak.hu/728/7/dc_837_14_doktori_mu.pdf
- [10] C. CARLSSON, R. FULLÉR: *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*, *Studies in Fuzziness and Soft Computing Series*, Vol. **82**, Springer (2002). DOI: [10.1007/978-3-7908-1805-5](https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1805-5)
- [11] A.X. JIANG, K. LEYTON-BROWN: *Polynomial-time computation of exact correlated equilibrium in compact games*, *Games Econ. Behav.*, Vol. **91**, pp. 347–359 (2015). DOI: [10.1515/crll.1902.124.1](https://doi.org/10.1515/crll.1902.124.1)
- [12] M. KOVÁCS: *A stable embedding of ill-posed linear systems into fuzzy systems*, *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. **45**, pp. 35–312 (1992). DOI: [10.1016/0165-0114\(92\)90148-W](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90148-W)
- [13] M. LARBANI: *Solving bimatrix games with fuzzy payoffs by introducing Nature as a third player*, *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. **160**, pp. 657–666 (2009). DOI: [10.1016/j.fss.2008.06.010](https://doi.org/10.1016/j.fss.2008.06.010)
- [14] T. MAEDA: *Characterization of the equilibrium strategy of the bimatrix game with fuzzy payoff*, *J Math Anal Appl.*, Vol. **251**, pp. 885–896 (2000). DOI: [10.1006/jmaa.2000.7142](https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7142)

- [15] Z. MAKÓ: *Real vector space of LR-fuzzy intervals with respect to the shape-preserving t -norm-based addition*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **200**, pp. 136–149 (2012). DOI: [10.1016/j.fss.2012.02.014](https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.02.014)
- [16] Z. MAKÓ, J. SALAMON: *Correlated equilibrium of the games in fuzzy environment*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **398**, pp. 112–127 (2020). DOI: [10.1016/j.fss.2020.03.001](https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.03.001)
- [17] J. NASH: *Noncooperative games*, Ann. Math., Vol. **54**, pp. 286–295 (1951). DOI: [10.2307/1969529](https://doi.org/10.2307/1969529)
- [18] R. NAU, S.G. CANOVAS, P. HANSEN: *On the geometry of Nash equilibria and correlated equilibria*, Int. J. Game Theory, Vol. **32**, pp. 443–453 (2003). DOI: [10.1007/s001820300162](https://doi.org/10.1007/s001820300162)
- [19] I. NISHIZAKI, M. SAKAWA: *Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution*, Physica-Verlag, Heidelberg, (2001). DOI: [10.1515/9781400829460](https://doi.org/10.1515/9781400829460)



Makó Zoltán a középiskolát a sepsiszentgyörgyi Székely Mikó Kollégiumban végezte, majd a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika szakán szerzett egyetemi oklevelet. Doktorátusi tézisét a fuzzy optimalizálás témaköréből írta, amelyet 2002-ben mutatott be. Az egyetem elvégzése után, 1992-ben a kézdivásárhelyi Gábor Áron Szakközépiskolába kapott tanári kinevezést. 1997-ben a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Mechanika és Csillagászati tanszékének tanársegédje, majd adjunktusa lett. 2006-tól a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának főállású oktatója. Jelenleg (2016-tól) a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának

egyetemi tanára, ahol a matematikai analízis, a gazdasági döntések matematikai modellezése és a döntéselmélet tantárgyakat oktatja. Kutatási területei: fuzzy optimalizálás, játékelmélet, mesterséges intelligencia és égi mechanika.

MAKÓ ZOLTÁN

Sapientia-Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar
makozoltan@uni.sapientia.ro



Salamon Júlia a középiskolát a csíkszeredai Márton Áron Gimnáziumban végezte. A kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika-informatika szakán szerzett egyetemi oklevelet 2002-ben, majd ugyanitt folytatta doktorátusi tanulmányait. Doktorátusi tézisét a paraméteres vektor egyensúlyi feladatok témaköréből írta, amelyet 2009-ben mutatott be. 2002-től a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának főállású oktatója. Jelenleg (2013-tól) a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának egyetemi docense, ahol az informatika (Matlab), operációkutatás, programozás és adatstruktúrák tantárgyakat oktatja. Kutatási területei: vektor egyensúlyi feladatok, játékelmélet.

SALAMON JÚLIA

Sapientia-Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar
salamonjulia@uni.sapientia.ro

CORRELATED EQUILIBRIA IN FUZZY GAMES

ZOLTÁN MAKÓ, JÚLIA SALAMON

In this paper, we discuss the relationship between correlated and Nash equilibria for two-player, non-cooperative fuzzy games. We show that, similarly to classical games, the Nash equilibrium can be constructed as a correlated equilibrium that yields independent marginal distributions.

Keywords: Fuzzy game; Fuzzy number; Correlated equilibrium; Nash equilibrium

Mathematics Subject Classification (2000): 90C70, 91A05.